## Решения.

**1.** Сумма ста чисел равна 1000. Самое большое из них увеличили в два раза, а еще одно число уменьшили на 10. Оказалось, что сумма не изменилась. Найдите самое маленькое из исходных чисел.

**Ответ:** 10.

**Решение.** Пусть $x$ — наибольшее из данных чисел, а $y$ — то число, которое уменьшили. Тогда $x + y = 2x + y - 10$, т. е. $x = 10$.

Так как среднее арифметическое исходных чисел равно 10 и самое большое из этих чисел также равно 10, то каждое из данных чисел равно 10.

**2.** На доске написано число $19941995\ldots20032004$. Разобьем его десятичную запись произвольным образом на два числа и сложим их. С полученным числом проделаем аналогичную операцию и так до тех пор пока не получим однозначное число. Какие однозначные числа можно получить таким образом?

**Ответ:** 2.

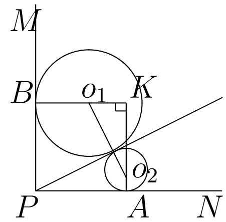
**Решение.** Пусть в результате некоторого разбиения получены числа $x$ и $y$, тогда исходное число имело вид $x \cdot 10\ldots0 + y$, а число, полученное в результате указанной операции равно $x + y$. Рассмотрим разность этих чисел: $(x \cdot 10\ldots0 + y) - (x + y) = 99\ldots9 \cdot x$.

Так как эта разность кратна 9, то исходное и полученное число имеют одинаковые остатки от деления на 9. Следовательно, каждый раз, при выполнении указанной операции этот остаток не изменяется (является инвариантом).

Остаток при делении на 9 числа $19941995\ldots20032004$ равен 2.

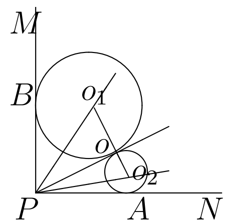
**3.** Внутри прямого угла $MPN$ проведен луч $PO$. В каждый из образовавшихся острых углов вписана окружность, причем обе они касаются луча $PO$ в точке $O$. Найдите длину отрезка $PO$, если радиусы окружностей равны 2 и 3.

**Ответ:** $x = 6$.




**Решение.** Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры меньшей и большей окружностей соответственно, $A$ и $B$ — точки их касания со сторонами угла, $PA = PO = PB = x$.

**Первый способ.** Продлим до пересечения в точке $K$ лучи $AO_1$ и $BO_2$. Легко видеть, что $APBK$ — квадрат. Тогда $KO_1 = x - 2$, $KO_2 = x - 3$ и по теореме Пифагора в треугольнике $KO_1O_2$ имеем $25 = (x-2)^2 + (x-3)^2$, откуда $x = 6$.




**Второй способ.** Так как $\angle APB = 90°$, а $PO_1$ и $PO_2$ — биссектрисы углов $\angle APO$ и $\angle OPB$ соответственно, то $\angle OPO_1 + \angle OPO_2 = 45°$. Тогда $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{\operatorname{tg}\angle OPO_1 + \operatorname{tg}\angle OPO_2}{1 - \operatorname{tg}\angle OPO_1 \cdot \operatorname{tg}\angle OPO_2}$, то есть $1 = \dfrac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}}$, откуда $\dfrac{5}{x} = 1 - \dfrac{6}{x^2}$ и тогда $x = 6$.

**4.** Решите уравнение: $(2x+2)\,(5-2x)\,(4x^2+8x+11) = 10(2x+3)^2$.

**Ответ:** $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

**Решение.** Преобразуем данное уравнение:
$(2x+2)\,(5-2x)\,(4x^2+8x+11) = 10(2x+3)^2 \Leftrightarrow (-4x^2+6x+10)\,(4x^2+8x+11) = 10(2x+3)^2$.

Так как $x = -1,5$ не является корнем уравнения (проверяется подстановкой), то полученное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3} \cdot \frac{4x^2+8x+11}{2x+3} = 10.$$

Пусть $\dfrac{-4x^2+6x+10}{2x+3}=y$; $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=z$, тогда $y+z=\dfrac{14x+21}{2x+3}=7$.

Таким образом,

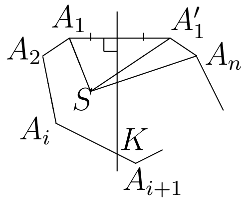
$$\begin{cases} y\cdot z=10,\\ y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\begin{cases} y=2,\\ z=5. \end{cases}\\ &\begin{cases} y=5,\\ z=2. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Далее, в каждой из полученных систем достаточно рассмотреть одно из уравнений.

1) $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=5 \Leftrightarrow 2x^2-x-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

2) $\dfrac{4x^2+8x+11}{2x+3}=2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+5=0$. Это квадратное уравнение не имеет корней.

**5.** Сумма плоских углов при вершине пирамиды больше $180°$. Докажите, что каждое её боковое ребро короче полупериметра основания.




**Решение.** Пусть $SA_1A_2\ldots A_n$ — данная пирамида.

Рассмотрим следующую её развёртку: разрежем пирамиду по рёбрам основания и по ребру $SA_1$. Основание пирамиды удалим. Развёртка будет предствлять из себя многоугольник $SA_1A_2\ldots A_nA'_1$ (чтобы не перегружать запись, мы сохранили обозначения вершин за их образами на развёртке), у которого угол $A_1SA'_1$ по условию больше развёрнутого.

Рассмотрим тогда серединный перпендикуляр к отрезку $A_1A'_1$. Поскольку лучи $SA_2$, $SA_3$,…, $SA_n$, разбивают дополнение к углу $\angle A_1SA'_1$ на $n$ углов, указанный перпендикуляр пройдёт внутри или по стороне одного из них. Значит, он пересечёт ломаную $A_1A_2\ldots A_nA'_1$ в точке $K$, лежащей на каком-то отрезке $A_iA_{i+1}$.

Тогда применим два известных следствия неравенства треугольника: $A_1K\le A_1A_2+A_2A_3+\ldots+$ $+A_iK$ (ломаная не короче отрезка, соединяющего её концы), $KA'_1\le KA_{i+1}+A_{i+1}A_{i+2}+\cdots+A_nA'_1$ (то же) и $A_1S+SA'_1<A_1K+KA'_1$ (если из двух треугольников с общим основанием один находится внутри другого, то сумма его боковых сторон меньше суммы боковых сторон другого).

Из этих неравенств следует $2A_1S<A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA'_1$, что и требовалось.

Поскольку ребро $SA_1$ было выбрано произвольно, задачу можно считать решённой полностью.

**6.** Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник без дыр. Известно, что его можно разрезать по линиям сетки на прямоугольники $2\times1$. Докажите, что у него есть хотя бы одна сторона четной длины.

**Решение.** Раскрасим клетки в шахматном порядке. Так как многоугольник можно разрезать на прямоугольники $2\times1$, то количество белых клеток и количество черных клеток равны. Тогда общее количество сторон белых клеток равно количеству сторон черных клеток.

Поскольку внутри фигуры к каждой стороне белой клетки примыкает сторона черной клетки, то количества "белых" и "черных" сторон внутри фигуры равны. Следовательно, количества на границе также равны. Но если все стороны многоугольника нечетны, то начало каждой стороны примыкает к квадрату того же цвета, что и конец этой стороны, и конец каждой стороны примыкает к квадрату того же цвета, что и начало следующей стороны.

Следовательно, сторон клеток какого-то цвета на границе многоугольника больше. Противоречие.

**7.** Сравните $\log_2 5-\log_3 4$ и 1.

**Решение.** Пусть $A=\log_2 5-\log_3 4=\log_2 2,5+1-2\log_3 2=y+1$, где $y=\log_2 2,5-2\log_3 2$. Так как $0<\log_3 2<1$, то $0<2\log_3 2<2$.

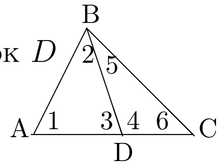
Так как $\log_2 2,5<\log_2 4=2$, то $y<0$. Следовательно, $A=y+1<1$. Значит, $\log_2 5-\log_3 4<1$.

**Комментарий.** Из того, что $\log_2 2,5<2$ и $2\log_3 2<2$ не следует, что их разность меньше 0.

**Верное решение.** Докажем, что $\log_2 5 - \log_3 4 > 1$.

Это эквивалентно тому, что $\log_2 5 - 2 > \log_3 4 - 1 \ \Leftrightarrow\ \log_2 \frac{5}{4} > \log_3 \frac{4}{3} \ \Leftrightarrow\ 3^{\log_2 \frac{5}{4}} > \frac{4}{3}$. Воспользуемся тождеством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (для его доказательства достаточно прологарифмировать обе части по основанию $b$) и очевидным неравенством $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Итак, $3^{\log_2 \frac{5}{4}} = (\frac{5}{4})^{\log_2 3} > (\frac{5}{4})^{\frac{3}{2}} > \frac{4}{3}$, так как $(\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64} > \frac{16}{9} = (\frac{4}{3})^2$.

**8.** Сумма углов треугольника равна $180^o$.




**Доказательство.** Пусть $S$— сумма углов треугольника $ABC$. Проведем отрезок $D$ и пронумеруем получившиеся углы (см. рис).

Тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = S$ (*) и $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = S$ (**).

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6 = S$ и $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ — так как эти углы— смежные.

Сложим равенства (*) и (**): $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2S$; $S + 180^\circ = 2S$. Следовательно $S = 180^\circ$, ч. т. д.

**Комментарий.** Приведенное рассуждение опирается на тот факт, что все треугольники имеют одну и ту же сумму углов.

**9.** Есть ожерелье из пяти бусинок разного размера. Сколькими способами можно покрасить бусинки не более чем в пять цветов так, чтобы никакие две соседние бусинки не были одного цвета?

**Ответ:** 960.

**Решение.** Первую бусинку можно покрасить в любой из пяти цветов, то есть пятью способами, каждую из двух соседних — четырьмя способами, а из двух оставшихся: одну — четырьмя способами, а другую — тремя. Итого: $3 \cdot 4^3 \cdot 5 = 960$.

**Комментарий.** Есть вариант, когда цвет второй из двух оставшихся бусинок тоже можно выбрать 4 способами (если она оказалась между одноцветными бусинками).

**Верный ответ:** 1020 способов.

**Верное решение.** Зафиксируем одну бусинку. Пусть, для определенности, она покрашена в цвет 1. Тогда рассмотрим два случая:

1. Бусинки слева и справа от фиксированной одного цвета $x$ (см. рис. 1), который можно выбрать 4-мя способами (любой цвет, кроме 1). Тогда цвета четвертой и пятой бусинок можно выбрать $4 \times 3$ способами ($y$ — не такой, как $x$, то есть выбирается 4-мя способами, $z$ — не такой, как $x$ и $y$, то есть выбирается 3-мя способами). Итого: $4 \times 4 \times 3 = 48$ способов.

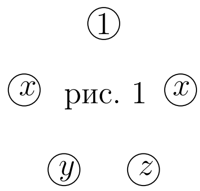


рис. 1

2. Бусинки слева и справа от фиксированной разного цвета $x$ и $y$ (см. рис. 2), которые можно выбрать $4 \times 3$ способами (а не $4 \times 4$, так как случай, когда они одного цвета, мы уже рассмотрели).

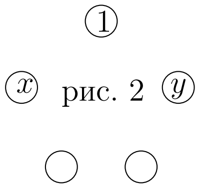


рис. 2

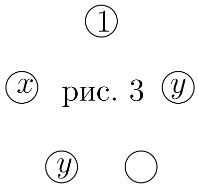


рис. 3

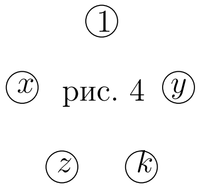


рис. 4

Для каждой раскраски уже рассмотренных бусинок существуют еще два случая:

a) бусинка рядом с $x$ покрашена в цвет $y$ (см. рис. 3). Тогда оставшуюся бусинку можно покрасить 4-мя способами.

b) бусинка рядом с $x$ покрашена в какой-то другой цвет $z$ (см. рис. 4), отличный от $y$. Тогда цвет $z$ можно выбрать 3-мя способами, цвет для покраски последней бусинки — тоже.

Итого: $4 \times 3 \times (4 + 9) = 156$. Таким образом, количество способов "докрасить"бусы, если бусинка цвета 1 фиксирована, равно $48 + 156 = 204$. А общее количество способов в 5 раз больше, т.е., 1020.

**10.** Найдите все уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, такие, что числа $p$ и $q$ являются его корнями.

**Решение.**

Первый способ. По теореме Виета:

$$\begin{cases} p+q=-p, \\ pq=q \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p=0, \\ q=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q=-2, \\ p=1. \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$.

Второй способ. Подставим числа $p$ и $q$ в данное уравнение:

$$\begin{cases} p^2+p^2+q=0, \\ q^2+pq+q=0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2p^2+q=0, \\ q(q+p+1)=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=0, \\ 2p^2=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q=-p-1, \\ 2p^2-p-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=0, \\ q=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p=1, \\ q=-2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p=-1/2, \\ q=-1/2. \end{cases}$$

Таким образом, искомые уравнения: $x^2 = 0$, $x^2 + x - 2 = 0$ и $x^2 - (1/2)x - 1/2 = 0$.

**Верное решение.** Несмотря на различные ответы, полученные в первом и втором решениях, оба решения можно считать верными. Авторы этих решений по-разному толковали фразу "$p$ и $q$ являются его корнями".

Автор первого решения понимает это как "$\{p; q\}$ (или $\{p\}$ при $p = q$) есть множество корней данного уравнения". При таком понимании корни должны удовлетворять теореме Виета, составленная система решена верно. Автор второго решения понимает фразу условия как "$p$ — корень данного уравнения и $q$ тоже его корень". На основании определения понятия "корень уравнения"составлена и верно решена система уравнений. Естественно, что ответы, полученные в ходе второго решения, включают в себя ответы, полученные при первом, а уравнение $x^2 - (1/2)x - 1/2 = 0$ имеет два корня, один из которых $p$ (и он же $q$), а второй — совершенно другое число.

Составителям второе толкование условия кажется чуть более естественным, однако и первое имеет право на существование — проблема здесь в некорректности формулировки задания и неоднозначности перевода условия задачи с естественного языка на формально-математический. Заметим, что в обоих решениях не требуется проверка того, что найденные уравнения удовлетворяют условиям.

**11.** Среди первообразных любой периодической функции, непрерывной на R, найдется хотя бы одна периодическая функция.

**Доказательство.** Пусть $f(x)$— периодическая функция, то есть, $\forall x \in R\ f(x+T) = f(x)$. Тогда $\int f(x+T)\,dx = \int f(x)\,dx$.

Если $F(x)$— одна из первообразных $f(x)$, то первообразная функции $f(x+T)$ равна $F(x+T)$ (по теореме о первообразной композиции функций). Следовательно, полученное равенство интегралов равносильно тому, что $F(x+T) = F(x) + C$, где $C \in R$.

В частности, при $C = 0$ получим: $F(x+T) = F(x)$, то есть, $F(x)$ — периодическая функция.

**Комментарий.** Сформулированное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = \cos x + 1$ — периодическая функция, а множество ее первообразных $F(x) = \sin x + x + C$. Среди них периодических функций нет.

На самом деле, из равенства интегралов следует то, что $F(x+T) + C_1 = F(x) + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ — любые действительные числа. Но их разность $C_2 - C_1$ — уже не любое число! (Т.к. $F(T)$ не всегда равна $F(0)$).

**12.** Если центр окружности, проходящей через середины трех сторон треугольника, лежит на биссектрисе одного из его углов, то треугольник — равнобедренный.

**Доказательство.** Пусть центр $O$ окружности $S$, проходящей через середины $K$, $M$ и $N$ сторон соответственно $BC$, $AB$ и $AC$, лежит на биссектрисе угла $A$. Пусть биссектриса угла $A$ пересекает окружность $S_1$, описанную около треугольника $AMN$, в точке $P$. Тогда $PM = PN$ (из равенства дуг следует равенство соответствующих хорд). Кроме того, $OM = ON$ (как радиусы окружности $S$). Поскольку точки $P$ и $O$ равноудалены от концов отрезка $MN$, то прямая $OP$, проходящая также через точку $A$, — серединный перпендикуляр к отрезку $MN$. Следовательно, $AM = AN$ и $AB = AC$.

**Комментарий.** Автором решения не рассмотрен еще один случай: когда точки $P$ и $O$ совпадают. Тогда, так как окружности $S$ и $S_1$ описаны вокруг равных треугольников $AMN$ и $MKN$, то они симметричны относительно $MN$. Следовательно, центр окружности $S_1$ принадлежит окружности $S$. Обозначим его $O_1$. Если угол $\angle MAN = \alpha$, то $\angle MO_1N = 2\alpha$, и $\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ (так как сумма углов $MAN$ и $MPN$ равна $180^\circ$). Следовательно $\alpha = 60^\circ$.

Т.е., на самом деле ответ в задаче такой: или треугольник $ABC$ равнобедренный, или угол, на биссектрисе которого лежит центр данной окружности равен $60^o$ (и треугольник не обязательно равнобедренный).