

МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ

*Конференция победителей конкурсов
Пьера Делиня и фонда Дмитрия Зимина «Династия»*

12-13 января 2009 года, Москва

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Иван Аржанцев (*лауреат премии Пьера Делиня 2007 г.*)

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Кольца Кокса, геометрическая теория инвариантов и автоморфизмы многообразий. Известно, что проективное пространство можно получить профакторизовав открытое подмножество ненулевых векторов в векторном пространстве по действию одномерного алгебраического тора. При этом однородные элементы одной степени в кольце многочленов образуют систему однородных координат проективного пространства. Эти наблюдения были обобщены в известной конструкции Д. Кокса (1995) для торических многообразий. Дальнейшее обобщение позволило сопоставить каждому нормальному алгебраическому многообразию X со свободной конечно порожденной группой классов дивизоров замечательный инвариант – мультиградуированное факториальное кольцо $R(X)$, называемое тотальным координатным кольцом или кольцом Кокса. В докладе будет дано новое доказательство факториальности кольца $R(X)$.

Конструкция Кокса нашла много интересных применений в алгебраической геометрии. Мы остановимся на приложениях к задачам теории алгебраических групп преобразований. Среди прочего, будет дано комбинаторное описание проективных многообразий с «почти транзитивным» действием алгебраической группы, т.е. действием, дополнение до открытой орбиты которого имеет коразмерность не меньше двух.

Один из основных результатов статьи Кокса состоял в описании группы автоморфизмов полного симплицального торического многообразия. Это описание основано на подъеме автоморфизма многообразия до автоморфизма кольца Кокса, нормализующего градуировку. Мы покажем, что этот подход применим и к аффинным

многообразиям. В частности, подъем позволяет определить ручные и дикие автоморфизмы аффинного торического многообразия, и доказать, что группа автоморфизмов невырожденного аффинного торического многообразия размерности ≥ 2 бесконечномерна. Теория колец Кокса приводит к новым результатам из теории дивизоров абстрактных полугрупп в смысле книги З.И. Боревича и И.Р. Шафаревича «Теория чисел».

Доклад частично основан на совместных результатах с С.А.Гайфуллиным (МГУ) и Ю.Хаузенем (Тьюбинген, Германия).

Михаил Бондарко (*лауреат премии Пьера Делиня 2006 г.*)
Санкт-Петербургский государственный университет.

Весовые структуры, комплексы и мотивы Воеводского.

Одним из наиболее значительных достижений алгебраической геометрии последнего времени стало построение триангулированной категории мотивов Воеводского; оно позволило перевести многие важные вопросы о когомологиях и алгебраических циклах на язык мотивов.

Мной были получены следующие результаты:

- (1) Получено явное описание категории Воеводского в терминах комплексов Суслина гладких проективных многообразий.
- (2) Построен консервативный функтор весового комплекса из категории Воеводского в гомотопическую категорию комплексов мотивов Чжоу.
- (3) Построена каноническая (целочисленная) фильтрация весов и спектральная последовательность весов для произвольной когомологической реализации категории Воеводского.
- (4) Развита общая теория «весовых структур» на триангулированных категориях; изучена связь весовых структур с t -структурами. Данная теория позволяет обобщить результаты (2) и (3) на широкий класс триангулированных категорий (включая стабильную гомотопическую категорию), а также построить новую t -структуру на категории мотивных комплексов Воеводского.

Эдуард Гирш (*лауреат премии фонда «Династия» 2006 г.*)
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А.Стеклова РАН

Вычислительная сложность как препятствие и как ресурс.

Современная структурная сложность вычислений началась с классических работ Левина, Карпа и Кука 1970х годов. Понятия сведений и полных задач позволили говорить об отношениях между классами вычислительных задач в терминах конкретных задач.

Однако этот аппарат

- определяет сложность задачи лишь с точностью до полинома,
- не позволяет доказывать безусловные результаты о неравенстве классов (т.е. о нижних оценках на время решения задач),
- говорит лишь об асимптотической сложности,
- с трудом позволяет формулировать результаты о криптографической сложности, когда задача должна быть сложна «для подавляющего числа входов».

Всё это делает его непригодным для рассуждений о конструкциях, реализуемых на практике, в особенности, когда требуется, чтобы какая-нибудь вычислительная задача была заведомо сложной для противника.

В докладе будут освещены эти проблемы и подходы к их решению.

Сергей Иванов (*лауреат премии фонда «Династия» 2007 г.*)
Санкт-Петербургское отделение математического института
им. В.А.Стеклова РАН.

Граничная жесткость и минимальные заполнения.

Задача о (дистанционной) граничной жесткости состоит том, чтобы восстановить риманову метрику в области евклидова пространства, если известны геодезические расстояния между точками ее края. Вопросы такого типа изучаются с XIX века и впервые возникли в связи с обратными задачами геофизики. В настоящее время задача решена во многих частных случаях, но общий случай остается открытым вопросом. Я расскажу о некоторых современных результатах

в этой области и идеях, на которых они основаны. Одна из продуктивных идей состоит в том, чтобы свести задачу о граничной жесткости к более геометричной задаче о минимальном заполнении, то есть о минимизации объема области при аналогичных краевых ограничениях.

Павел Колесников. (*лауреат премии Пьера Делиня 2005 г.*)
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Алгебры конформных эндоморфизмов над линейной алгебраической группой.

Теория конформных алгебр (термин «конформная алгебра» предложен В. Г. Кацем в 1996 г.) является сравнительно новой областью алгебры, происходящей из конформной теории поля в математической физике. При исследовании структуры конформных алгебр возникают многочисленные задачи, относящиеся к «обычной» (в смысле «не-конформной») алгебре. Одной из наиболее важных задач такого рода является проблема описания простых объектов в специфических классах бесконечномерных ассоциативных алгебр.

Нами вводится понятие конформной алгебры над линейной алгебраической группой G . В рамки этого понятия укладываются, в частности, «обычные» алгебры (для $G = \{e\}$), градуированные алгебры ($|G| < \infty$), конформные алгебры ($G = \mathbb{A}^1$), псевдоалгебры над алгебрами многочленов от n переменных ($G = \mathbb{A}^n$) и так называемые \mathbb{Z} -конформные алгебры ($G = \mathbb{A}_m$).

Одним из наиболее важных примеров таких алгебр является алгебра $\text{Send}_n^{G,V}$, которую можно представлять как совокупность правил преобразования \mathbb{K}^n -значных регулярных функций на аффинном алгебраическом множестве V при помощи элементов группы G , действующей на V . Все упомянутые выше примеры соответствуют $V = G$ относительно регулярного действия. Мы рассматриваем неприводимые подалгебры в «обычной» алгебре линейных преобразований пространства $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}[G]$, которые соответствуют конформным подалгебрам в $\text{Send}_n^{G,G}$. Оказывается, что для произвольной группы G такие подалгебры соответствуют существенным (левым) идеалам в алгебре матриц $M_n(\mathbb{K}[G])$.

Александр Кузнецов (*лауреат премии Пьера Делиня 2005 г.*)
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Лаборатория Понселе
и Независимый Московский университет

Производные категории когерентных пучков и полуортогональные разложения.

В докладе будет рассказано о последних достижениях в изучении полуортогональных разложений производных категорий когерентных пучков.

Сергей Локтев (*лауреат премии Пьера Делиня 2006 г.*)
Институт теоретической и экспериментальной физики (Государственный научный центр РФ) и Независимый Московский университет

От представлений к инвариантам алгебраических особенностей.

В докладе будет рассказано о представлениях старшего веса алгебр многомерных токов - алгебр Ли функций на аффинном многообразии со значениями в редуктивной алгебре Ли. С помощью их характеров строятся инварианты локальных алгебр соответствующих многообразий. Будет разобран ряд примеров вычисления этих инвариантов

Тарас Панов (*лауреат премии Пьера Делиня 2006 г.*)
Институт теоретической и экспериментальной физики (Государственный научный центр РФ), Москва, Институт Проблем Передачи Информации РАН и Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Момент-угол многообразия в торической топологии.

Момент-угол комплексы и многообразия являются одними из важнейших объектов исследования в торической топологии. Каждому симплициальному комплексу \mathcal{K} с t вершинами сопоставляется пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с действием тора T^m , называемое *момент-угол комплексом*, причём эта конструкция функториальна по отношению к симплициальным отображениям. Первая конструкция пространства $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ как фактор-пространства по отношению эквивалентности появилась в работе Дэвиса-Янушкевича 1991 г. и восходит к конструкции Винберга универсального пространства для групп

Кокстера (1971 г.). Если \mathcal{K} является симплициальным разбиением сферы, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является (замкнутым) многообразием; в частности, такое *момент-угол многообразие* сопоставляется каждому симплициальному (а также простому) многограннику.

Вскоре стало ясно, что конструкции, приводящие к одному и тому же комплексу или многообразию $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ появляются в различных, на первый взгляд не связанных между собой, областях. Среди таких реализаций момент-угол комплекса отметим гомотопический слой вложения клеточного подкомплекса в произведении $(\mathbb{C}P^{\infty})^m$ (в теории гомотопий), дополнение конфигурации координатных подпространств в \mathbb{C}^m (в алгебраической геометрии), поверхность уровня торического отображения моментов (в симплектической геометрии) и, наконец, совсем недавно появившуюся реализацию в виде полного пересечения вещественных квадрик в \mathbb{C}^m . Эта последняя модель момент-угол многообразий приводит к сериям новых примеров некалеровых комплексных многообразий, обобщающих известные многообразия Хопфа и Калаби–Экманна, и устанавливает новые взаимосвязи между торической топологией и многомерным комплексным анализом.

В докладе будет дан обзор результатов о кохомологических и гомотопических свойствах момент-угол комплексов и многообразий, включая алгебраические приложения к описанию кохомологий колец граней (кольцо Стенли–Риснера) и недавние приложения к кобордизмам квазиторических многообразий. Мы также предложим некоторые открытые вопросы и проблемы.

Дмитрий Пионтковский (*лауреат премии фонда «Династия» 2006 г.*)
Государственный университет - Высшая школа экономики

О проблемах бернсайдовского типа в универсальной алгебре.

В докладе будет показано, что естественные вопросы бернсайдовского типа имеют отрицательное решение для линейных алгебр с произвольным набором операций и относительно небольшим количеством тождеств в каждой большой степени. В частности, оказывается, что любое многообразие алгебр с двумя и более операциями, заданное тождествами достаточно больших степеней, не шпехтово, т.е. в нем возможны бесконечные убывающие цепи подмногообразий. Доказательство

основано на построении минимальных резольвент и вычислениях производного функтора композиции модулей над соответствующими операдами. Это позволяет продолжить известные в теориях ассоциативных алгебр и r -групп теорему Голода–Шафаревича и конструкцию Голода, дающую соответствующие контрпримеры к проблемам бернсайдовского типа, на случай линейных операд.

Леонид Посицельский (*лауреат премии Пьера Делиня 2007 г.*)
Институт Проблем Передачи Информации РАН и Независимый Московский университет

Полубесконечные гомологии ассоциативных алгебраических структур.

Полубесконечные гомологии градуированных алгебр Ли известны с 1980-х годов; первые определения полубесконечных гомологий и когомологий градуированных ассоциативных алгебр появились в середине 1990-х. В докладе будет дано современное достаточно общее определение полубесконечного произведения кручения как двустороннего производного функтора не точного ни слева, ни справа функтора тензорно-котензорного произведения модулей над ассоциативной алгеброй над коассоциативной коалгеброй. Построение этого функтора требует некоторой модификации традиционного определения неограниченной производной категории. Целью доклада является формулировка теоремы сравнения с полубесконечными гомологиями тейтовских алгебр Ли.

Если позволит время, в конце будет сказано несколько слов о контрамодулях, являющихся модулями коэффициентов полубесконечных когомологий (в отличие от гомологий).

Андрей Райгородский (*лауреат премии фонда «Династия» 2006 г.*)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский физико-технический институт, Яндекс

Старые и новые проблемы комбинаторной геометрии и теории Рамсея.

В настоящем докладе мы дадим обзор наиболее важных проблем, которые лежат на стыке комбинаторной геометрии и теории

Рамсея. Среди задач, которые мы предполагаем обсудить, проблема Борсука о разбиении множеств в метрических пространствах на части меньшего диаметра и ее топологические аспекты, проблема раскраски метрических пространств с запрещенными одноцветными расстояниями и ее связь с комбинаторной и эргодической теорией чисел, проблема Эрдеша – Секереша об отыскании выпуклых множеств на плоскости, проблема Эрдеша – Хайнала, касающаяся так называемого свойства В гиперграфа, проблема подсчета чисел Рамсея и пр.

Мы также предложим некоторые новые задачи в указанных областях.

Леонид Рыбников (*лауреат премии Пьера Делиня 2006 г.*)

Институт Проблем Передачи Информации РАН, Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Лаборатория Понселе и Независимый Московский университет

Аффинные алгебры Каца–Мути и интегрируемые системы.

Вопросы об интегрируемости квантовых гамильтоновых систем часто удается свести к задачам теории представлений аффинных алгебр Ли (или связанных с ними квантовых групп). Характерными примерами таких интегрируемых систем являются цепочка Тоды, модель Годена (или, более общо, система Хитчина), цепочки ХХХ, ХХZ и т. д., система KdV. Я попытаюсь рассказать о том, как это работает на примере модели Годена, и о некоторых новых результатах в этой области.

Антон Савин (*лауреат премии Пьера Делиня 2007 г.*)

Российский университет дружбы народов и Независимый Московский университет

Эллиптическая теория и некоммутативная геометрия.

Во многих задачах некоммутативной геометрии возникают эллиптические операторы, которые являются нелокальными. Таковы, например, дифференциальные операторы на некоммутативном торе, изучавшиеся Конном. Коэффициенты этих операторов содержат операторы сдвига, порожденные иррациональными вращениями. Более общие

примеры нелокальных операторов связаны с деформациями алгебр функций на торических многообразиях (Конн-Ланди). Естественно возникает задача об исследовании общих нелокальных эллиптических операторов (дифференциальных или псевдодифференциальных), коэффициенты которых лежат в кольце, получаемом из гладких функций добавлением операторов сдвига, отвечающих действию дискретной группы диффеоморфизмов многообразия. Для таких операторов может быть выписано условие эллиптичности (гарантирующее фредгольмовость) и предъявляются формулы, выражающие фредгольмов индекс в топологических терминах (совместная работа с В.Е.Назайкинским и Б.Ю.Стерниным).

Тимур Садыков (*лауреат премии фонда «Династия» 2007 г.*)
Сибирский федеральный университет

Гипергеометрические системы дифференциальных уравнений с максимально приводимой монодромией.

Система дифференциальных уравнений гипергеометрического типа определяется целочисленной матрицей максимального ранга в совокупности с комплексным вектором параметров. Мы будем называть монодромию такой системы максимально приводимой, если пространство ее голоморфных решений есть прямая сумма одномерных инвариантных подпространств. В докладе будут представлены необходимые и достаточные условия максимальной приводимости монодромии произвольной неконфлюэнтной гипергеометрической системы уравнений. В частности, будет показано, что любая гипергеометрическая система, ассоциированная с произвольным плоским зонотопом, обладает этим свойством.

Аркадий Скопенков (*лауреат премии Пьера Делиня 2005 г.*)
Независимый Московский Университет, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Заузливание четырехмерных многообразий.

Проблема заузливания, т.е. классификации вложений — одна из трех классических проблем топологии (в терминологии Зимана). Мы рассматриваем эту проблему в категории *гладких* многообразий, вложений и изотопий, а также для *связных* многообразий.

В работах классиков (Ву, Хефлигер, Хирш, 1960-е гг.) получены некоторые конкретные полные классификационные результаты для вложений n -мерных многообразий N в m -мерное евклидово пространство R^m при $2m > 3n + 3$ или для узлов (т.е. вложений n -мерных сфер в R^m) при $m > n + 2$. В частности, были классифицированы вложения четырехмерных многообразий в R^m при $m \geq 8$, а также вложения $S^4 \rightarrow R^7$.

Затем на протяжении почти полувека не было конкретных полных классификационных результатов. Поэтому проблема заузливания является трудной.

Естественный подход — сначала классифицировать вложения *с точностью до связного суммирования с узлами*. Это было сделано для односвязных четырехмерных многообразий в R^7 (Беша, Хадсон, Хефлигер, 1970).

Основной результат доклада — *полная классификация вложений односвязных четырехмерных многообразий в R^7* (Кроули-Скопенков, arXiv:math/0512594 и arXiv:math/0808.1795). Классификация приводится в конкретных терминах:

- инварианты определяются явно и принимают значения в группах гомологий данного многообразия или в циклических группах легко определяемого порядка.
- имеется явная конструкция произвольного изотопического класса вложений по одному заданному, а также несколько простых конструкций вложений с парадоксальными свойствами.

Доказательства используют новый подход, основанный на модификации теории хирургии. Теория хирургии создана для решения проблем топологии — в частности, проблемы заузливания (Браудер, Кервер, Левин, Милнор, Новиков, Уолл, Хефлигер и др.). Необходимая модификация развита Креком, который (совместно с Виро, Хэмблтоном, Штольцем и др.) с ее помощью получил другие интересные важные результаты. С помощью нее получена также полная классификация вложений трехмерных многообразий в R^6 (Скопенков, *Mathematische Zeitschrift*, 2008, arXiv:math/0603429).

Дмитрий Талалаев (*лауреат премии фонда «Династия» 2007 г.*)
Институт теоретической и экспериментальной физики (Государственный
научный центр РФ)

Алгебро-геометрические методы решения квантовых интегрируемых систем.

Научный проект «Алгебро-геометрические методы решения квантовых интегрируемых систем» имеет основной своей задачей построение аналога метода решения классических интегрируемых систем, основанном на конструкции Хитчина. В квантовом случае объекты радикально видоизменяются, так отправной точкой работы над проектом стала конструкция квантового аналога спектральной кривой для рациональной системы Годена произвольного ранга, который является дифференциальным оператором со значениями в квантовой алгебре и производящей функцией квантовых гамильтонианов. Данная конструкция оказалась важной для нескольких смежных направлений: - описание центра универсальной обертывающей аффинной алгебры на критическом уровне, - геометрическое соответствие Ленглендса над полем \mathbb{C} , - нахождение эквивалентной формулировки уравнений Бете, описывающих спектр квантовой системы. За истекший период работы над проектом конкурсантом были получены новые результаты: - описание действия геометрических операторов Гекке на спектре квантовой системы Годена, использующее так называемую «изомонодромную» формулировку уравнений Бете в работе [math-ph/0802.0383](#); - построение квантового аналога спектральной кривой для эллиптической системы Годена в совместной работе с В. Рубцовым и А. Силантьевым. В докладе будет более подробно описан контекст, новые результаты и возможные перспективы дальнейших исследований.

Евгений Фейгин (*лауреат премии Пьера Делиня 2007 г.*)
Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН и Независимый Московский университет

Двойные аффинные структуры.

Теория аффинных (бесконечномерных) алгебр Ли обобщает теорию простых конечномерных алгебр Ли. Этот класс бесконечномерных алгебр оказывается важным в разнообразных задачах теории

представлений, комбинаторики, алгебраической геометрии и математической физики. В последнее время в работах А.Бравермана, Д.Каждана, Х.Накаджима, М.Финкельберга, В.Чари и др. было показано, что многие конструкции из теории аффинных алгебр имеют так называемые двойные аффинные обобщения. Эти конструкции важны и интересны как сами по себе, так и для изучения теории аффинных алгебр. Доклад будет посвящён краткому обзору вышеописанной теории. Будут также сформулированы основные результаты, полученные докладчиком при изучении двойных аффинных структур.

Сергей Шадрин (*лауреат премии Пьера Делиня 2005 г.*)
Амстердамский университет и НИИСИ РАН

Тавтологические соотношения.

Основные планы исследований в моей заявке на конкурс Делиня были сосредоточены вокруг двух задач. Первая — гипотеза Виттена о связи теории пересечений пространств r -спин структур и интегрируемых иерархий. Вторая — исследование нескольких алгоритмов вычислений, чудом дававших гипотетические соотношения между естественными кохомологическими классами в пространстве модулей кривых. Обе задачи были полностью решены мною с соавторами (Фабером, Звонкиным, Лосевым и Шнейбергом), и ключом к решению оказалась теория Гивенталья о действии некоторой естественной группы на кохомологических теориях поля.

Я надеюсь рассказать обо всем этом, но, скорее всего, мне придется ограничиться общим введением в теорию Гивенталья.

Илья Шкредов (*лауреат премии Пьера Делиня 2007 г.*)
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Несколько замечаний к теореме Семереди об арифметических прогрессиях.

В нашем докладе мы обсудим классические и новые результаты, связанные с известной теоремой Семереди об арифметических прогрессиях. Согласно этому утверждению в любом множестве целых чисел положительной плотности существует прогрессия

любой длины. В докладе мы затронем три подхода применявшихся для доказательства теоремы Семереди и ее обобщений, а именно, комбинаторный, эргодический и аналитический.