1. Чётные числа

Целые числа: $0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$. Они бывают чётными и нечётными. Число n *чётное*, если оно равно $2m$ для некоторого целого m. Остальные числа называют *нечётными*.

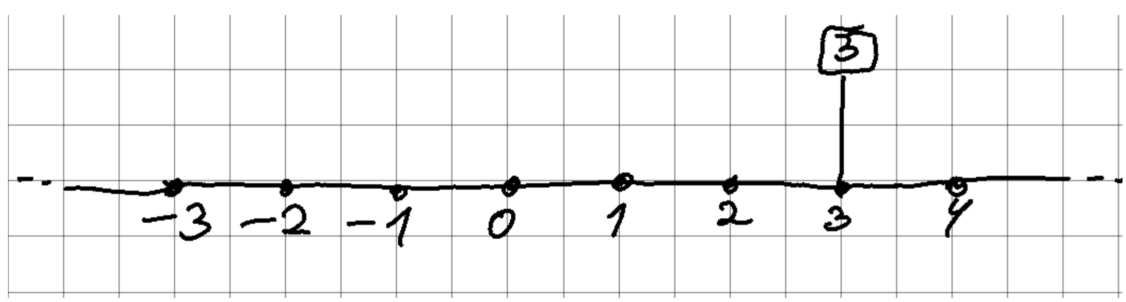
• Можно сказать так: в мешке чётное число n яблок, если их можно поделить поровну (для педантов: не разрезая яблок; величина яблока не учитывается, важно только их количество) между двумя людьми. Или так: если можно разложить яблоки парами. Эти два способа соответствуют умножению m на 2 (две группы по m яблок) или 2 на m (m групп по два яблока). Ещё можно сказать так: n чётно, если $n/2$ целое — но для этого нужно уметь обращаться с дробями (и делить n на 2, даже если нацело не делится).

1.1 Будет ли число 123 чётным? Будет ли число 124 чётным?

1.2 Будет ли нуль чётным числом, согласно нашему определению?

1.3 Сколько чётных среди двузначных чисел (от 10 до 99)? Кстати — а сколько всего двузначных чисел? Сколько чётных среди трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

Целые числа удобно изображать на числовой оси — можно представлять себе прямую дорогу с километровыми столбами. Отрицательные числа отмеряют в другую сторону

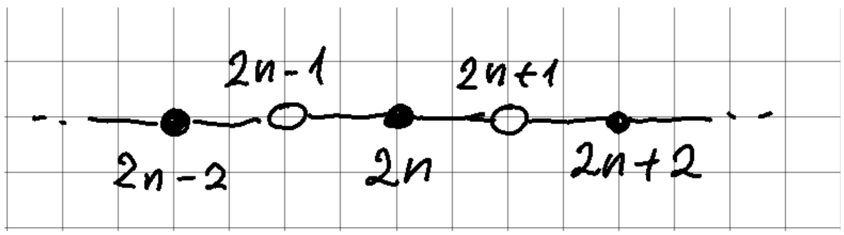


1.4 Отметьте чётные и нечётные числа на этом рисунке.

1.5 Будем выписывать положительные чётные числа в порядке возрастания: первое равно 2, второе 4, третье 6 и так далее. Чему равно 1000-е чётное число? Чему равно n-е (читается: «энное») чётное число?

1.6 Те же вопросы для положительных *нечётных* чисел: первое равно 1, второе 3, третье 5 и так далее.

Из картинки видно, что чётные и нечётные числа чередуются. Значит, число $2n+1$, соседнее с чётным числом $2n$, будет нечётно. Наоборот, любое нечётное число можно записать как $2n+1$, потому что его сосед слева чётный и его можно записать как $2n$. Получаем общую формулу: $2n$ для чётных чисел и $2n+1$ для нечётных чисел.



• На самом деле в этом рассуждении, если его проводить более строго, скрыто деление с остатком. Мы к этому ещё вернёмся.

1.7 Маша предлагает другую общую формулу для нечётных чисел: $2n-1$? Права ли она?

1.8 Всегда ли будет чётной сумма двух чётных чисел?

1.9 Докажите, что разность двух чётных чисел чётна.

1.10 Будет ли чётной сумма чётного и нечётного числа? сумма двух нечётных чисел?

Можно свести доказанное в таблицу сложения для чётности и нечётности:

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

(чётности слагаемых записаны в первой строке и первой колонке, по таблице читаем чётность суммы).

1.11* Аня и Беня играют в такую игру: сначала Аня называет целое число по своему усмотрению (и Беня его слышит), потом Беня. Затем оба числа складывают. Если сумма чётна, выигрывает Аня, если нечётна — Беня. Кому выгоднее эта игра?

$\boxed{\textbf{1.12}}$ Составить таблицу умножения для чётности и нечётности. (Другими словами, надо определить, будет ли чётным произведение (а) двух чётных чисел, (б) чётного и нечётного и (в) двух нечётных.)

×	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

$\boxed{\textbf{1.13}^*}$ Аня и Беня играют в такую игру: сначала Аня называет целое число по своему усмотрению (и Беня его слышит), потом Беня. Затем оба числа перемножают. Если произведение чётно, выигрывает Аня, если нечётно — Беня. Кому выгоднее эта игра?

$\boxed{\textbf{1.14}^*}$ Учитель усадил по кругу вокруг стола 25 учеников своего класса (девочек и мальчиков), причём — говорит он — так, что никакие два мальчика не сидят рядом, и никакие две девочки не сидят рядом. Почему он ошибается?

$\boxed{\textbf{1.15}^*}$ По кругу написано 20 плюсов и 20 минусов в каком-то порядке. Подсчитаем число пар соседних плюсов (места, где плюсы стоят рядом). Аналогично подсчитаем число пар соседних минусов. Почему получится одно и то же число?

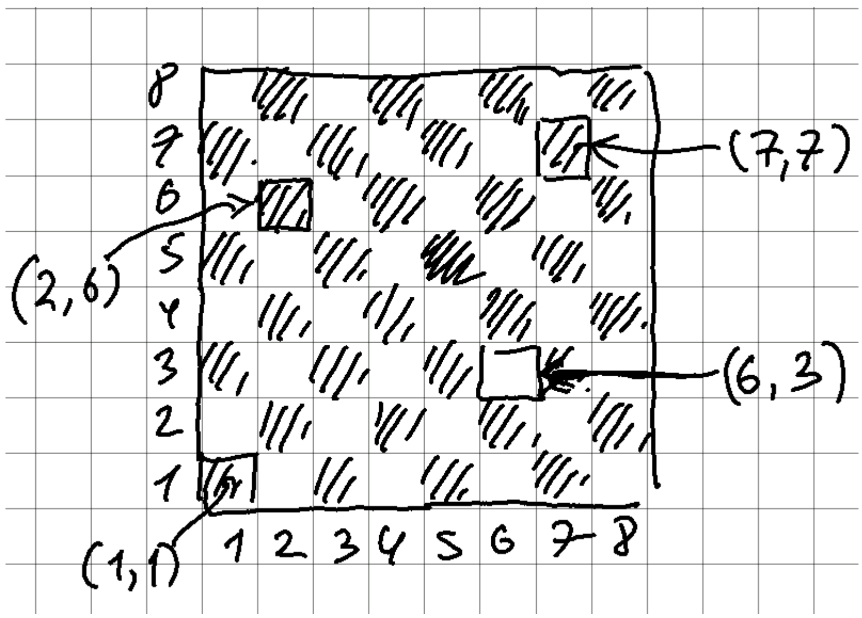
$\boxed{\textbf{1.16}^*}$ *Точным квадратом* называют квадрат целого числа (0, 1, 4, 9, 16,...). Может ли точный квадрат быть чётным, но не делиться нацело на 4?

$\boxed{\textbf{1.17}^*}$ Докажите, что точный квадрат не может быть вдвое больше другого точного квадрата, кроме того случая, когда они оба равны нулю.

• Это формулируют так: уравнение $x^2 = 2y^2$ имеет единственное решение в целых числах: $x = 0, y = 0$. Отсюда следует, что никакая дробь x/y с целыми числителем и знаменателем не равна в квадрате 2. Как говорят, $\sqrt{2}$ — иррациональное число (не представляется в виде дроби с целым числителем и знаменателем)

$\boxed{\textbf{1.18}}$ Клетки шахматной доски обычно обозначают буквами и числами: a1 — левый нижний угол, a8 — левый верхний, h1 — правый нижний и так далее. Будем вертикали тоже нумеровать (вместо букв): тогда левый нижний угол будет $(1, 1)$, левый верхний $(1, 8)$, правый нижний

(8, 1) и так далее. Закончите предложение: «клетка (i, j) раскрашена в белый цвет, если...». (По шахматным правилам левая нижняя клетка чёрная.)



1.19 Будет ли сумма $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ чётной или нечётной? (Ответ можно дать, не вычисляя, чему равна эта сумма.)

1.20* Может ли прямая пересекать все стороны невыпуклого 13-угольника, не проходя через его вершины?

• Тут надо бы объяснить, что такое невыпуклый 13-угольник — но в задаче можно считать, что есть просто 13 различных точек (вершин) $A_1, A_2, \ldots, A_{13}$, и мы проводим 13 отрезков (сторон) A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{12}A_{13}$, $A_{13}A_1$.

1.21 Закончите фразу: «сумма нескольких целых чисел будет чётной в тех случаях, когда в этой сумме чётное число...».

• Более точно было бы сказать «в тех и только тех случаях, когда», «тогда и только тогда, когда», «если и только если» и т.п. Этот математический жаргон подразумевает сразу два утверждения: (1) если в сумме чётное число ⟨...⟩, то она чётна, и (2) если сумма чётна, то в ней чётное число ⟨...⟩.

1.22* Придя на занятие математического кружка, некоторые школьники пожали друг другу руки. Докажите, что количество тех школьников, которые сделали нечётное число рукопожатий, чётно.

$\boxed{\mathbf{1.23}^*}$ В классе из 15 школьников каждый считает, что у него в классе есть семь друзей (среди остальных). Докажите, что отношение дружбы несимметрично: найдутся такие два школьника A и B, что A считает B своим другом, а B не считает A своим другом.

$\boxed{\mathbf{1.24}^*}$ Можно ли заполнить таблицу 7×11 (7 строк и 11 столбцов) целыми числами так, чтобы сумма чисел в каждой строке была бы чётна, а сумма чисел в каждом столбце была нечётна?

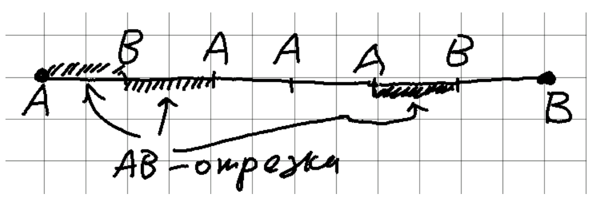
$\boxed{\mathbf{1.25}^*}$ Чтобы узнать, чётно ли целое положительное число, достаточно посмотреть на его последнюю цифру. Почему?

$\boxed{\mathbf{1.26}}$ Докажите, что произведение двух соседних целых чисел всегда чётно.

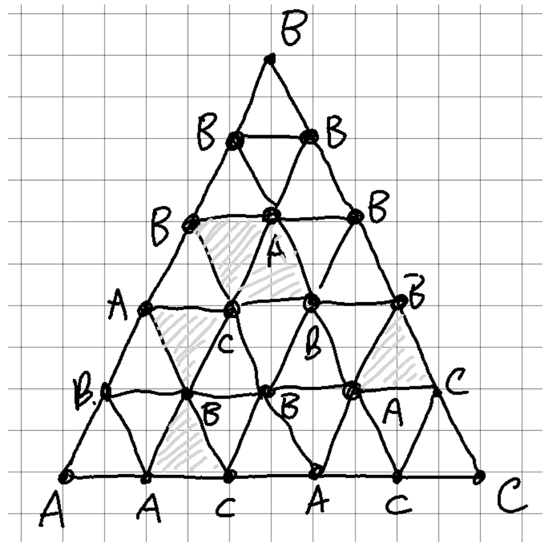
$\boxed{\mathbf{1.27}^*}$ Запишем степени двойки $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ и степени тройки $(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$. Может ли в этих двух последовательностях чисел встретиться какое-то общее число, кроме 1?

• Это утверждение, если знать про логарифмы, можно сформулировать и так: $\log_2 3$ иррационален.

$\boxed{\mathbf{1.28}^*}$ Отрезок AB разбит на несколько частей промежуточными точками, которые произвольно размечены буквами A или B (каждая точка либо A, либо B). Из этих частей выберем AB-отрезки, то есть те части, у которых концы помечены разными буквами (в любом порядке, так что можно было бы их назвать и BA-отрезками). (а) Докажите, что есть хотя бы один AB-отрезок. (б) Докажите, что общее число AB-отрезков нечётно.



$\boxed{\mathbf{1.29}^*}$ Треугольник ABC разрезан на меньшие (как на рисунке), и их вершины помечены буквами A, B и C произвольным образом (каждая вершина одной буквой). При этом на стороне AB использованы только буквы A и B, на стороне BC — только B и C, на стороне AC — только A и C. Докажите, что есть ABC-треугольники (в вершинах которых все три буквы), и их нечётное число.



• Это утверждение, которое можно обобщить на любую размерность (хотя тетраэдр сложнее разрезать на маленькие тетраэдры, но тоже можно), называется *леммой Шпернера*. Она используется в одном из доказательств *теоремы Брауэра о неподвижной точке*: всякое непрерывное отображение треугольника в себя оставляет хотя бы одну точку на месте. Схема рассуждения такая: если это не так и все точки сдвигаются хотя бы на некоторое расстояние $d > 0$, то разрежем треугольник на такие маленькие треугольники, чтобы вершины каждого переходит в близкие точки (расстояние между образами вершин много меньше d). Теперь пометим вершину буквой A, если она приближается к противоположной стороне BC, аналогично для букв B (приближение к AC) и C (приближение к AB). Поскольку точки не остаются на месте, то к одной из трёх сторон они должны приближаться и букву выбрать можно (могут сразу к двум, тогда выберем произвольно). Теперь разнобуквенный треугольник создаёт противоречие: его вершины куда-то сдвигаются, и примерно в одно и то же место, и не могут сразу приближаться ко всем трём сторонам.

В свою очередь, теорема Брауэра о неподвижной точке применяется в математической экономике (для доказательства существования равновесий в играх, в том числе *равновесия Нэша*).