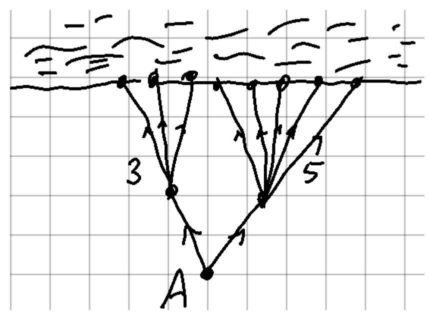
2. Сложение и умножение

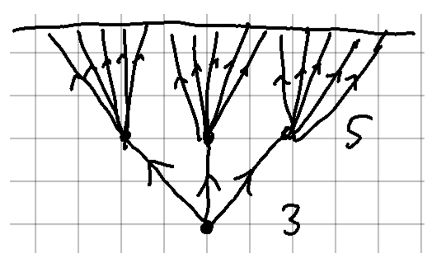
Мы уже видели, что при подсчётах количеств полезно складывать и умножать. Вот ещё несколько задач такого рода.

2.1 Из точки A к берегу ведут две дороги. Первая разветвляется на три, а вторая на пять. Сколькими способами можно пройти из A к берегу? (Идти обратно, удалясь от берега, нельзя.)

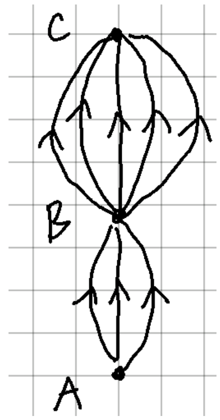


- Мы привели эту (очевидную) задачу, чтобы сравнить её со следующей.

2.2 Из точки A к берегу ведут три дороги. Каждая из них разветвляется на 5 (и дальше дороги доходят до берега, не пересекаясь). Сколькими способами можно пройти из A к берегу?

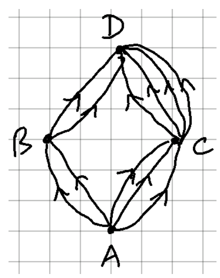


2.3 Из точки A в точку B ведут три дороги, а из точки B в точку C ведут пять дорог. Сколько есть способов добраться из A в C через B? (Возвращаться обратно нельзя.)



В некоторых задачах полезно и складывать, и умножать.

2.4 Сколькими способами можно пройти из A в D? Можно идти и через B, и через C, но возращаться нельзя (дороги односторонние, как показано стрелками).



• Представление разных вариантов в виде «путей» может быть полезно и в задачах, где изначально речи о путях нет.

2.5 Сколько «слов» (осмысленных и бессмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове `КОТ`?

• Можно представить себе, что буквы `К`, `О` и `Т` написаны на трёх кубиках, из которых мы составляем трёхбуквенное слово. Скажем, можно составить слова `ТОК` или `КТО`. Спрашивается, сколько разных слов (включая исходное слово `КОТ`) можно составить таким образом.

▷ Можно перебирать варианты иначе, рассуждая так: буква `К` может стоять на любой из трёх возможных позиций, так что все слова делятся на три типа `К**`, `*К*`, `**К` (звёздочками показаны ещё не определившиеся буквы). Для каждого типа букву `О` можно поставить вместо любой из двух звёздочек (два варианта), и после этого положение буквы T уже определяется однозначно. Получается такое же дерево (с ветвлением 3 в корне, 2 и 1 на следующих уровнях) и тот же ответ, но группы из двух слов другие: теперь, скажем, слова TKO и OKT попали в одну группу (где K на втором месте), а раньше они были в разных (начинающиеся на T и начинающиеся на O). ◁

2.6 Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны? Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны?

▷ Было бы проще, если бы мы рассматривали все числа от 000 до 999, записывая их тремя цифрами, тогда бы нуль ничем не отличался от остальных цифр. Но что есть, то есть: под трёхзначными числами понимают числа 100, … , 999. ◁

2.7* Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть и чётные, и нечётные цифры?

2.8 Пусть в какой-то стране автомобильные номера состоят из двух латинских букв, за которыми идут 4 цифры. Сколько различных номеров может быть в такой стране? (Считаем, что в латинском алфавите 26 букв.[6])

Мы уже несколько раз использовали одни и те же рассуждения, которые можно сформулировать теперь в общем виде.

- Пусть мы хотим составить список из k позиций, на каждую из которых можно поместить любой из n элементов (без ограничений). Тогда это можно сделать n^k способами. То же самое иначе: если в алфавите n букв, то «слов» (осмысленных или нет) длины k будет n^k.

- Если мы дополнительно потребуем, чтобы все элементы списка были разными (один и тот же элемент не может быть использован повторно в другой позиции), то число таких списков будет

  $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

  Вариант: столько будет слов длины k в алфавите из n букв, в которые никакая буква не входит дважды.

- Частный случай предыдущего при $n = k$: если каждую из n букв требуется использовать в слове (длины n) ровно один раз, то таких слов будет $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

[6]Это не всегда было так: когда-то в латинских текстах не использовали буквы J, U и W.

У этих ситуаций в русских учебниках есть традиционные названия. Вторая из них называется *размещения из n по k*, потому что мы размещаем какие-то из данных нам n элементов на k местах (первом, втором,…, k-м). Первая называется (немного странно) *размещениями с повторениями*. А последняя называется *перестановками n элементов*: мы переставляем алфавит из n букв в каком-то порядке.

Почему количества именно такие? В первом случае у нас k последовательных выборов, в каждом n вариантов, поэтому получается $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (k раз), то есть n^k. Во втором случае для первой буквы есть n вариантов, для второй $n-1$ (потому что первой буквы уже нет), для третьей надо выбирать из $n-2$ букв (кроме уже выбранной первой и второй), для четвёртой из $n-3$ и так далее до k-й буквы, где надо выбирать из $n-k+1$ (обратите внимание, что надо вычитать не номер буквы, а на единицу меньше: для четвёртой, скажем, было $n-3$ варианта, а не $n-4$). Всего получается $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

В случае перестановок мы доходим в произведении $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$ до конца (до множителя 1 — последняя буква без вариантов). Это произведение называют *факториалом числа n* и обозначают

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

▷ Математики в первом случае говорит о числе *отображений из k-элементного множества в n-элементное*, во втором — о числе *инъективных отображений из k-элементного множества в n-элементное*, в третьем — о числе *биективных отображений n-элементного множества в себя*. Смысл этих учёных терминов такой: отображение из k-элементного множества в n-элементное — это когда каждая из k позиций в списке отображается в занимающий её элемент, инъективность означает, что разные элементы отображаются в разные, а биективность — что имеется взаимно однозначное соответствие между позициями и элементами (все элементы разные и каждый элемент использован). ◁

2.9 Пусть, говоря о перестановках, мы вместо «ровно один раз» сказали «каждая буква используется не более одного раза». Изменится ли от этого количество перестановок? А если мы сказали «каждая буква используется не менее одного раза»?

В задачах по комбинаторике, особенно школьных, часто вопросы о количестве объектов формулируются в бытовых терминах («оживляж»), и нужно вникнуть в формулировку (что именно мы подсчитываем? какие объекты считаются одинаковыми, а какие разными), чтобы узнать одну из описанных ситуаций. (Или констатировать, что задача более сложная и не сводится так сразу к готовым формулам.) Вот несколько простых примеров.

2.10 Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные и разные?

2.11 Компьютерная память хранит *двоичные слова длины* 64 — последовательности из 64 битов.[7] (Бит — это нуль или единица). Сколько разных двоичных слов бывает?

• Если знать про двоичную систему счисления, можно сказать, что каждое двоичное слово изображает целое число от 000 … 000 (нуль) до 111 … 111 ($2^{64}-1$), и таких чисел как раз 2^{64}.

2.12 В классе проведено три контрольные работы, при этом каждый ученик получил за каждую из работ одну из оценок $3, 4, 5$. Какое максимальное число учеников может быть в классе, если известно, что нет двух учеников с одинаковым набором оценок?

2.13 Кодовый замок имеет девять кнопок. Известно, что для открытия двери нужно набрать код из трёх различных кнопок в определённом порядке. Сколько разных вариантов такого кода может быть? Тот же вопрос, если кнопки в коде не обязаны быть разными.

2.14* (Продолжение) Тот же вопрос, если для открытия замка нужно нажать на три кодовые кнопки одновременно.

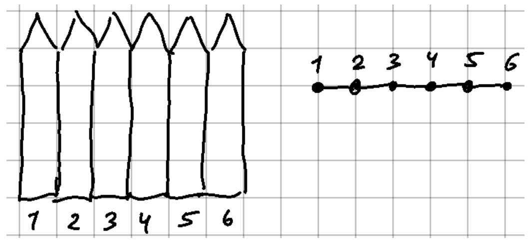
2.15* Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные, разные и идут в убывающем порядке. (Скажем, 751 годится, а 752, 775 или 375 — нет.)

2.16 Забор из 6 досок раскрашивают в 3 цвета, каждую доску в какой-то цвет, причём соседние доски должны иметь разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

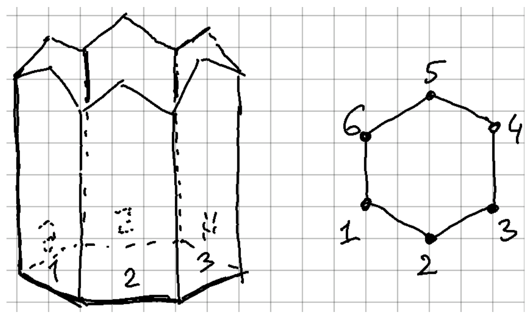
• На рисунке справа от забора нарисована схема задачи: каждая точка из шести точек изображает доску, а линии соединяют соседей, то есть доски, которые по условию должны быть покрашены в разные цвета. (Математики сказали бы, что надо покрасить вершины графа в три цвета, причём концы любого ребра должны иметь разные цвета.)

---

[7]Это типичный размер для 2023 года — раньше часто было 32 или 16. Биты часто разбивают на группы по 8, называемые *байтами*, так что каждое слово состоит из восьми байтов.



• Более сложная задача возникает для кольцевого забора (для шести досок он больше напоминает шестигранную беседку, но тем не менее).



$\boxed{2.17^*}$ Сколькими способами можно раскрасить кольцевой забор из шести досок, если есть три краски и соседние доски должны быть покрашены в разные цвета?

• Задачу о правильных раскрасках можно поставить для любого *графа*, как сказали бы математики: надо нарисовать точки (*вершины*), которые красят в k цветов, и соединить линиями (*рёбрами*) те точки, которые нельзя красить одинаково. После этого можно спросить, сколько правильных раскрасок есть у такого графа.

▷ Для графа, где вершины соединены рёбрами по кругу (цикла) мы научились решать задачу сравнительно просто: хотя у нас и нет готовой формулы, но можно последовательно вычислять ответ для цикла из n вершин, используя ответ для предыдущего цикла. При некотором терпении даже без компьютера можно получить ответ для графов с десятками вершин (а уж с помощью компьютеров и десятки тысяч вершин не будут проблемой). Но это нам повезло: для произвольных графов найти число раскрасок в 3 цвета (или хотя бы просто узнать, равно ли это число нулю, то есть существуют ли такие раскраски) — вычислительно сложная задача, и математики подозревают (хотя и не могут доказать), что любой такой алгоритм требует «экспоненциального перебора» (если не всех раскрасок, то какого-то другого большого множества), и для графов из тысяч вершин это (пока?) недостижимо сложная задача.

Можно ещё спросить, есть ли явная формула для S_n в нашей задаче. Попробуйте её угадать; для начала можно поделить все числа на два, получатся числа $3, 9, 15, 33\ldots$ — они получаются из степеней двойки прибавлением или вычитанием единицы, и это не случайно: наше рассуждение позволяет доказать (по индукции), что $S_n = 2\cdot(2^{n-1}+(-1)^n)$.

Можно фиксировать граф и рассматривать число правильных раскрасок в k цветов при разных k (как функцию от k). Эта функция всегда будет многочленом от k. Это можно доказать нашим способом, сведя граф к двум меньшим (надо выбрать ребро и рассмотреть два графа: в одном оно удалено, в другом стянуто в точку). Многочлен этот математики называют *хроматическим многочленом* графа. Приведённая выше формула для S_n обобщается на любое число цветов (k): хроматический многочлен равен $(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$; при каждом n получаем многочлен от k степени n. ◁

2.18* В выражении

$$(a+b-c)(d+e-f)(g+h-i)(j+k-l)$$

раскрыли все скобки, получили сумму произведений групп из четырёх букв. Сколько слагаемых в этой сумме? Перед сколькими из ними стоит знак «минус»?

Иногда перемножение количеств вариантов при независимом выборе полезно, даже если мы не знаем числа вариантов.

2.19* Пусть n — максимальное количество слонов, которое можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Покажите, что n чётно и что число способов расстановки n слонов, не бьющих друг друга, есть точный квадрат.

• Каждый слон атакует все поля на двух диагоналях, в пересечении которых он стоит.