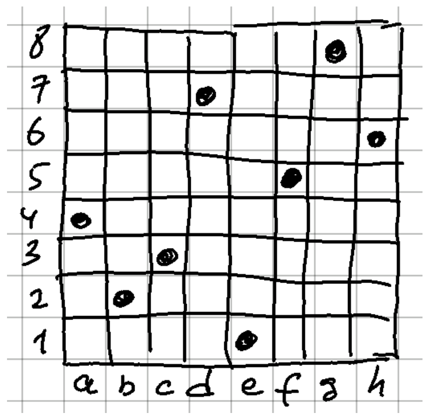
4. Соответствия

Мы разберём несколько задач, в которых полезно сравнивать размеры разных множеств, устанавливая между ними соответствия (что это значит, будет видно из примеров).

$\boxed{\textbf{4.1}}$ На шахматную доску 8×8 ставят 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. (Это значит, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали должно быть не больше одной ладьи.) Сколькими способами это можно сделать?

На рисунке показана одна из таких расстановок.



▷ В шахматной нотации положение ладей на рисунке можно записать как

a4, b1, c3, d7, e1, f5, g8, h6.

Заметим, что вертикалей восемь, ладей тоже восемь, и в одной вертикали двум ладьям стоять нельзя, значит, все вертикали должны быть использованы (семи не хватит для восьми ладей — это простое соображение часто называют *принципом Дирихле*, а по-английски pigeon-hole principle[11]) Поэтому можно, перечисляя ладьи слева направо, вертикали

[11]Английское название объясняется просто: если у нас больше голубей (pigeons), чем нор (holes), значит, в какой-то норе будет больше одного голубя. Французский математик Дирихле использовал это простое соображение, доказывая теорему о приближении иррациональных чисел рациональными, и отсюда произошло русское название — хотя по-хорошему Дирихле должен быть знаменит совсем не этим: скажем, он доказал, что в арифметической прогрессии с взаимно простым первым членом и разностью бесконечно много простых чисел.

не указывать, и написать сокращённо 41371586. Условие задачи требует, чтобы и в каждой горизонтали стояло не больше одной ладьи, поэтому в этой сокращённой записи каждая цифра от 1 до 8 должна встречаться по одному разу. (Не более одного раза — а поскольку цифр столько же, значит, ровно по одному разу.)

Теперь можно вспомнить, что таких перестановок цифр от 1 до 8 (последовательностей из восьми цифр, где каждая цифра $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ встречается по разу), будет $8!$. (Первую цифру можно выбрать 8 способами, для каждого из них вторую можно выбрать 7, чтобы не совпало с первой, и так далее до последней цифры, которая определяется однозначно. Поэтому расстановок ладей тоже будет $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$. ◁

Говоря научно, мы установили *взаимно однозначное соответствие* между расстановками ладей, удовлетворяющими условию, и перестановками 8 цифр, и заключили отсюда, что искомых расстановок столько же, сколько перестановок 8 цифр.

В общем виде: если между двумя (конечными) множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число элементов.[12]

▷ Этот приём часто иллюстрируют примерами «из жизни»: скажем, чтобы проверить, что в комнате столько же человек, сколько стульев, надо попросить их сесть на стулья. Взаимная однозначность соответствия при этом означает две вещи: что никакие два человека не сидят на одном стуле («отображение людей в стулья является инъекцией», сказали бы математики) и что ни один стул не пустой («это отображение является сюръекцией»).

Философы заметили бы, что сам процесс счёта предметов представляет собой установление взаимно однозначного соответствия между пересчитываемыми предметами и числами $1, 2, 3, \ldots, n$ (для какого-то n, которое и называется числом предметов). Дальше бы они спросили, почему это n оказывается тем же при повторном пересчёте, но это уже совсем философский вопрос… ◁

4.2 Беня решал задачу о ладьях, не бьющих друг друга, и расссуждал так. Первую ладью можно поставить на доску 64 способами. После этого

[12]Оговорка про конечные множества тут важна: про бесконечные множества не сразу ясно, что такое «число элементов в них». Ещё Галилей заметил, что все целые положительные числа $1, 2, 3, 4, \ldots$ можно поставить в соответствие с точными квадратами $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, при котором число n соответствует квадрату n^2 — хотя квадраты составляют лишь небольшую часть целых чисел. Этим занимается теория множеств; число элементов в бесконечном множестве называется там его *мощностью*.

одна вертикаль и одна горизонталь выбывают, для второй ладьи разрешены только 49 клеток (7 вертикалей по 7 клеток в каждой). Для третьей будут доступны 36 клеток и так далее до последней ладьи, которой останется единственная возможная клетка. Получаем ответ

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (8!)^2.$$

Почему у него получился другой (и гораздо больший) ответ?

▷ Природа явления станет понятной, если рассмотреть доску 2×2 и две ладьи. Их можно ставить по диагонали, и есть два способа, которые в нашей записи соответствуют `12` и `21`. Рассуждая как Беня, мы можем первую ладью поставить 4 способами, после чего положение второй определяется однозначно — получается четыре способа вместо двух.

Откуда берётся разница? потому что Беня считает расстановку `a1`, `b2` два раза — как первую ладью на `a1` и как первую ладью на `b2`. Его подсчёт был бы правильным, если бы ладьи имели бы каждая свою неповторимую индивидуальность (или просто пронумерованы) и мы бы различали эти конфигурации (с первой ладьёй на `a1` и с первой ладьёй на `b2`). ◁

• Для доски 8×8 ответ получается больше в 8! раз, потому что каждой расстановке одинаковых ладей соответствует 8! расстановок индивидуализированных ладей (ладьи можно пронумеровать 8! разными способами: сначала есть 8 вариантов для первой, потом 7 для второй, и так далее) — мы ещё увидим это рассуждение в дальнейшем.

▷ Мораль: решая комбинаторную задачу, важно чётко понимать, *что именно* мы считаем (какие ситуации допустимы, и какие мы считаем одинаковыми, а какие разными). ◁

4.3* Какое максимальное число ладей, не бьющих друг друга, можно поставить на половину доски (прямоугольник 4×8 — скажем, левую половину доски)? Сколькими способами можно это сделать?

▷ Теперь только четыре вертикали, поэтому можно поставить максимум четыре ладьи. Это сделать можно (горизонталей хватит с запасом). Сколькими способами? На первую вертикаль можно поставить 8 способами, после этого для ладьи на второй вертикали останется 7, потом 6, потом 5, всего $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. ◁

4.4 Аня хочет показать своей сестре фокус. Она пишет на листе бумаги

`НАУКА`

```
УМЕЕТ
МНОГО
ГИТИК
```

и предлагает сестре задумать одну из написанных букв и сказать, в каких строках эта буква есть (скажем, буква У есть в первой и второй строках, а буква И только в четвёртой). После чего она обязуется угадать задуманную букву. Сможет ли Аня гарантированно выполнить своё обещание? Получится ли этот фокус, если вместо УМЕЕТ во второй строке написать ИМЕЕТ (как герой повести Евгения Замятина «На куличках»)?

▷ Чтобы это понять, запишем про все буквы, в каких строках они есть:

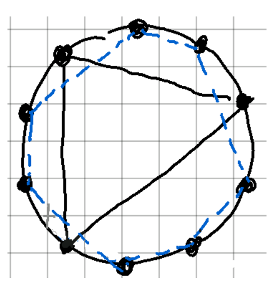
Н	А	У	К	М	Е	Т	О	Г	И
1, 3	1	1, 2	1, 4	2, 3	2	2, 4	3	3, 4	4

Видно, что все комбинации строк, соответствующие буквам, разные. Поэтому Аня сможет по такой комбинации восстановить букву. (Можно проверить также, что какую бы строку или две строки ни назвала сестра, Аня всегда подберёт подходящую букву: тут есть взаимно однозначное соответствие между буквами и вариантами для строк.)

А если написать ИМЕЕТ вместо УМЕЕТ, то буква И будет встречаться во второй и четвёртой строках и перепутается с буквой Т — однозначность нарушится. (А буква У будет встречаться только в первой строке и перепутается с буквой А.) ◁

$\boxed{\textbf{4.5}}$ На окружности отмечено 10 точек. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках или семиугольников с вершинами в этих точках?

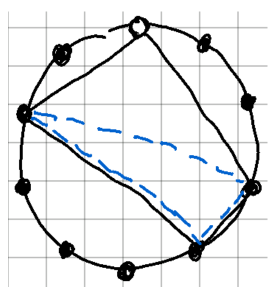
На рисунке показаны один такой треугольник и один такой семиугольник (мы считаем их непересекающимися, и вершины соединяются в порядке обхода по кругу).



▷ Треугольников и семиугольников с вершинами в данных точках поровну, потому что можно установить между ними взаимно однозначное соответствие. Намёк на это соответствие уже есть на картинке: треугольник включает три вершины, и остаётся семь. Если их соединить (это можно сделать единственным способом, иначе получатся самопересечения), будет семиугольник. С другой стороны, если взять семиугольник, то неиспользованные в нём три вершины образуют треугольник. ◁

• Мы решили задачу, установив соответствие и доказав тем самым, что треугольников и семиугольников одинаковое количество — но не указали этого количества. Мы увидим вскоре, что оно равно *числу сочетаний из* 10 *по* 7 (или *числу сочетаний из* 10 *по* 3).

$\boxed{\textbf{4.6}^*}$ На окружности отмечено 10 точек: девять чёрных и одна белая. Чего больше: многоугольников, у которых все вершины чёрные, или многоугольников, у которых есть и белая вершина (а остальные — чёрные)? Чего больше — треугольников с чёрными вершинами или четырёхугольников с одной белой и тремя чёрными вершинами?



Многоугольники в этой задаче — это треугольники, четырёхугольники и так далее (до десятиугольников, больше вершин нет). На рисунке показан один многоугольник (четырёхугольник) с белой вершиной и один (треугольник) без неё.

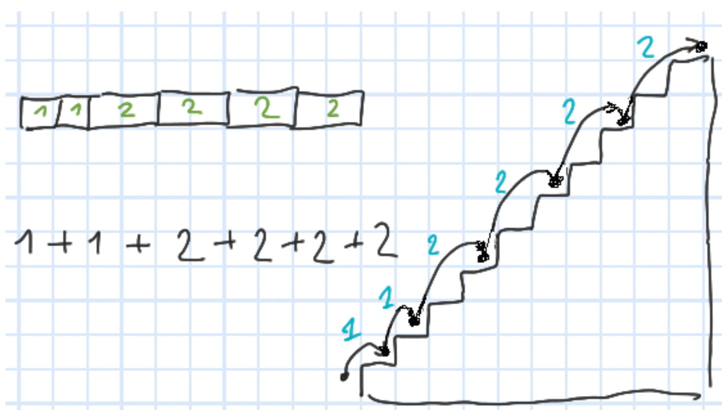
▷ Снова картинка подсказывает соответствие: для всякого многоугольника с чёрными вершинами можно добавить к нему белую вершину и получить многоугольник с белой вершиной. Будет ли это соответствие взаимно однозначным? Нет, потому что хотя разные многоугольники при добавлении белой вершины и остаются разными, но есть многоугольники с белой вершиной, которые никому не соответствуют. А именно, треугольники с белой вершиной — они получались бы из «чёрных двуугольников», но таких у нас нет.

Значит, многоугольников с белой вершиной больше. А вот треугольники с чёрными вершинами как раз соответствуют четырёхугольникам с белой вершиной, так что их поровну. ◁

4.7 Объясните, почему следующие три вопроса имеют один и тот же ответ:

- Сколькими способами можно замостить полоску 10×1, если разрешается использовать плитки 1×1 и 1×2?
- Сколькими способами можно представить 10 в виде суммы слагаемых, используя только 1 и 2 (и учитывая порядок слагаемых, скажем, варианты $1+1+2+2+2+2$ и $2+2+2+2+1+1$ считаются за разные)?
- Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек, делая шаги в одну или две ступеньки. Сколькими различными способами он может это сделать?

▷ Слагаемые в сумме можно понимать как длины шагов или как размеры плиток. Скажем, сумма $1+1+2+2+2+2$ соответствует тому, что Петя два раза поднялся по одной ступеньке, а потом четыре раза поднялся на две (перепрыгивая через ступеньку). С плитками:



слева направо плитка 1, потом ещё раз 1, потом четыре раза плитка 2×1.

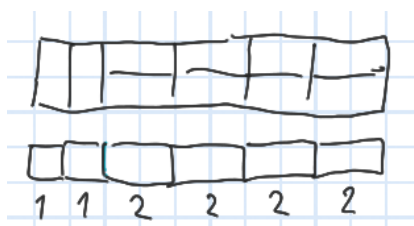
И наоборот, если, скажем, у нас полоска 10×1 выложена плитками шириной 1 и длиной 1 и 2, то длины плиток, читаемые с одного конца к другому, и будут слагаемыми (или размерами шагов). То же самое для способов подъёма: размеры шагов будут слагаемыми. ◁

$\boxed{4.8^*}$ Найдите количество способов в предыдущей задаче (как мы уже знаем, одно и то же для всех трёх вариантов).

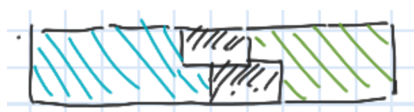
▷ Как мы уже делали, найдём рекуррентную формулу для полоски $n \times 1$, или числа способов разложения n на слагаемые 1 и 2, или числа способов подняться на n ступенек шагами по 1 и 2 ступеньки. Обозначим число способов за T_n. Например, $T_2 = 2$ (есть два разложения 2 и $1 + 1$), а $T_3 = 3$ (есть варианты $1 + 2$, $2 + 1$ и $1 + 1 + 1$).

Все они делятся на две категории — в зависимости от первого слагаемого (первого шага, первой плитки). Если первое слагаемое равно 1, то остаётся разложить $n - 1$ в сумму слагаемых, если первое слагаемое 2, то разложить $n - 2$, поэтому $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$. Значит, $T_4 = 2 + 3 = 5$, и получается последовательность 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, и нужный нам член 89. ◁

• То же рекуррентное соотношение — и тот же ответ — у нас был в задаче о разрезании полоски 2×10 на доминошки. И даже можно понять, почему: слагаемому 2 в сумме соответствует квадрат 2×2, разрезанный по горизонтали, а слагаемому 1 — вертикальная полоска.

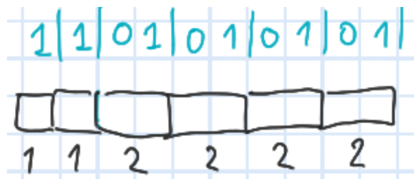


Тут, правда, возникает вопрос: а почему не бывает разрезаний, где две доминошки лежат со сдвигом (тогда это не соответствует никакой сумме слагаемых). На это можно ответить по-разному: во-первых, по индукции (отрезая левую вертикальную полоску или квадратик 2×2), во-вторых, можно заметить, что плитки со сдвигом разрезали бы полоску на две области с нечётным числом клеток, которые дальше не разрезать на целое число доминошек.



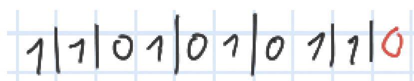
$\boxed{4.9^*}$ Решая предыдущую задачу, Беня вспомнил, что мы считали последовательности нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд, и разбивали последовательности на блоки 1 и 01 (слева направо, задача 3.8). Теперь мы разрезаем полоску длины 10 на квадраты 1×1, в которых можно написать 1, и доминошки 2×1, в которых можно написать

01. Значит, каждому разрезанию соответствует «хорошее» двоичное слово длины 10, в котором нет двух нулей подряд.



А хороших слов было 144, значит и разрезаний 144. Прав ли Беня?

▷ Нет — ведь ответ другой. А дело в том, что это соответствие не взаимно однозначно: например, хорошему слову 1101010110 не соответствует никакого разрезания



(последний нуль остаётся без следующей за ним единицы, и блока не получается). На самом деле можно заметить, что все слова, соответствующие разрезаниям, кончаются на 1 и наоборот, любое хорошее слово, кончающаеся на 1, получается из разрезания (эта единица может оказаться в процессе разрезания либо отдельным блоком, либо второй в 01). Поэтому надо искать число хороших слов длины 10, кончающихся на 1, то есть число хороших слов длины 9, и получается правильный ответ 89. ◁

4.10* Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы целых положительных слагаемых с учётом порядка? (Скажем, для числа 3 способы $1 + 2$ и $2 + 1$ считаются разными, а всего способов четыре: есть ещё 3 и $1 + 1 + 1$.)

▷ Такое представления соответствуют способам проехать 10 перегонов железной дороги, при желании делая остановки на промежуточных станциях. (Скажем, для разложения $3 = 1 + 2$ мы сначала проезжаем один перегон и выходим, а потом проезжаем два без остановки.) Тем самым надо решить, в каких из 9 промежуточных станций мы делаем остановку, а в каких нет. Это кодируется словом из 9 нулей и единиц, так что вариантов $2^9 = 512$. ◁

4.11* Мы уже знаем, что есть 2^{10} двоичных слов длины 10 (см. задачу 2.11). В некоторых из них чётное число единиц (скажем, в слове `0000000000` или в `1111111111`), а в некоторых нечётное (скажем, в слове `0101010101`). Каких слов больше — с чётным или с нечётным числом единиц?

▷ Объединим двоичные слова в пары, включив в одну пару слова, отличающиеся в последнем бите (девять первых одинаковые, а в десятом разница). Тогда в каждой паре числа единиц будут соседними, то есть ровно одно слово в паре имеет чётное число единиц и ровно одно нечётное. Поэтому тех и других одинаковое количество (и столько же пар). ◁

Иногда полезны и не взаимно однозначные соответствия: бывают случаи, когда каждый объект одного типа соответствует какому-то фиксированному числу k объектов другого типа. Скажем, если школьники в классе решали задачи из списка и каждый школьник решил две задачи, а каждую задачу решил ровно один школьник, то задач в списке вдвое больше, чем школьников в классе.

4.12 В классе n школьников, и на каникулах каждый отправил по одному письму каждому (кроме себя, естественно). Сколько всего писем было написано? После каникул они встретились, и каждый пожал руку каждому (по одному разу). Сколько было рукопожатий?

▷ Каждый школьник написал $n-1$ писем (кроме себя), а школьников n, поэтому всего было написано $n(n-1)$ писем.

Можно ли то же самое рассуждение применить к рукопожатиям? Скажем, если школьников трое, то каждый отправит по два письма (всего шесть писем). Между тем, рукопожатий только три (А–Б, А–В, Б–В, если школьников обозначить А, Б и В). Причина понятна: одно рукопожатие соответствует двум письмам (в обе стороны). Значит, рукопожатий вдвое меньше чем писем, то есть $n(n-1)/2$. ◁

▷ Можно было бы опасаться: вдруг $n(n-1)$ не разделится? Но, с одной стороны, мы доказали, что число писем вдвое больше числа рукопожатий, поэтому должно делиться. С другой стороны (если одного доказательства вам мало), одно из двух соседних чисел n и $n-1$ всегда чётно, поэтому произведение тоже чётно.

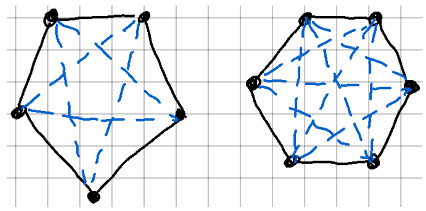
Ещё можно рассуждать так: если T_n — число рукопожатий для n школьников, то посмотрим на одного из них. Он сделает $n-1$ рукопожатий, и если их не учитывать, то получится задача с $n-1$ школьниками. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n &= (n-1) + T_{n-1} = (n-1) + (n-2) + T_{n-2} = \ldots \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + T_2 = \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n(n-1)/2 \end{aligned}$$

(последнее равенство мы уже имели случай обсуждать по другому поводу в задаче 1.11). ◁

4.13 Сколько диагоналей в (выпуклом) n-угольнике?

На картинке видно, что у пятиугольника пять диагоналей (образующих пятиконечную звезду), а у шестиугольника девять.



• Мы оговорили, что многоугольник выпуклый, чтобы не разбираться, учитывать ли диагонали, идущие снаружи многоугольника и т.п.

▷ Из каждой вершины n-угольника выходит $(n-3)$ диагонали (не считаем себя и двух соседей). Значит, всего $n(n-3)$ диагонали, если считать каждую по два раза (в обе стороны). А на самом деле вдвое меньше, получаем ответ $n(n-3)/2$. ◁

В следующей задаче мы по существу интересуемся количеством трёхэлементных подмножеств десятиэлементного множества. Но поскольку считается, что слова «множество» и «подмножество» пугают, скажем иначе.

4.14 Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать трёх, которые останутся сторожить вещи и разводить костёр, пока остальные семь пойдут на прогулку. Сколькими способами можно это сделать?

▷ Будем рассуждать как с рукопожатиями. Пусть сначала нужно выбрать не просто трёх человек, а, скажем, трёх ответственных: (1) за вещи, (2) за еду и (3) за костёр. Тогда получается $10 \cdot 9 \cdot 8$ вариантов: ответственного за вещи можно выбрать 10 способами, после этого есть 9 способов выбрать ответственного за еду (один уже занят вещами), а после этого 8 способов выбрать кострового (двое уже заняты вещами и едой).

Но так было бы при конкретном распределении обязанностей. Если же просто выбирать трёх человек (которые потом могут распределить обязанности как хотят), то вариантов будет меньше в 6 раз. Почему именно в 6? потому что есть ровно $6 = 3!$ вариантов распределения трёх людей по трём должностям (перестановка из трёх элементов: сначала выбор из 3, потом из 2, потом из 1). Так мы приходим к ответу: $(10 \cdot 9 \cdot 8)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$. ◁

$\boxed{\textbf{4.15}}$ Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать 7 человек, которые пойдут на прогулку, пока остальные сторожат вещи и разводят костёр. Сколькими способами можно это сделать?

▷ Если действовать так же, как в предыдущей задаче, то можно выбрать семь должностей для участников прогулки (скажем, направляющий, следующий, ..., замыкающий), тогда способов будет $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. А затем объединить варианты в группы, отличающиеся только распределением участников по должностям. Каждая группа состоит из 7! вариантов, так что надо поделить на 7!, чтобы найти число групп. Получится

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

(остальные множители сокращаются) — то есть тот же ответ, что в предыдущей задаче.

Что не удивительно, так как решить, кто пойдёт на прогулку — по сути то же самое, что решить, кто останется (между решениями того и другого вида есть взаимно однозначное соответствие: кто не пойдёт, тот и останется). Так что можно было просто заметить это и взять ответ из предыдущей задачи. ◁

$\boxed{\textbf{4.16}}$ Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно три единицы? Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно семь единиц?

▷ Это снова по существу та же самая задача. Составим список из десяти участников похода и будем против них ставить 1, если человек остаётся дежурить, и 0, если он идёт на прогулку. Тогда способы выбрать троих дежурных будут в точности соответствовать последовательностям из десяти нулей и единиц, в которых ровно три единицы.

Аналогично для семи. Можно также заметить, что между словами с тремя единицами (и семью нулями) и словами с семью единицами (и тремя нулями) можно установить взаимно однозначное соответствие: в слове все нули заменяются на единицы и наоборот. ◁

$\boxed{\textbf{4.17}}$ Сколько существует двоичных слов длины 5 с двумя единицами (и тремя нулями). Как объяснить, что их число равно числу кратчайших путей из одного угла прямоугольника 2×3 в другой (задача 3.3)?

▷ Количество таких слов мы уже умеем вычислять: это число способов выбрать два объекта из пяти, и оно равно $(5 \cdot 4)/(1 \cdot 2) = 10$. Тот же ответ был в задаче 3.3, и это не случайно: мы обсуждали тогда, что пути можно кодировать последовательностями из пяти букв П и В, в которых три буквы П (три шага вправо) и две буквы В (два шага вверх). ◁

Иногда полезно рассматривать и соответствия, в которых на каждый объект первого типа приходится m объектов второго типа, а на каждый объект второго типа приходится n объектов первого типа. Такая ситуация возникает в следующей задаче.

4.18 В классе 30 школьников, они решали задачи из некоторого списка, при этом вышло так, что каждый школьник решил по две задачи, а каждая задача из списка была решена (ровно) тремя школьниками. Сколько задач в списке?

▷ Пусть каждый школьник написал решения двух решённых им задач на двух отдельных листках из тетради и сдал эти листки на проверку. Всего будет сдано $30 \times 2 = 60$ листков. Рассортируем листки по задачам (что логично: удобно проверять решения одной и той же задачи подряд). Тогда на каждую задачу придётся три листка (от трёх решивших её школьников), так что задач всего $(30 \cdot 2)/3 = 20$. ◁

Этот приём позволяет решить следующую задачу почти что в уме.

4.19* Пусть A — число способов выбрать 10 предметов из 30, а B — число способов выбрать 11 предметов из 30. Кто больше — A или B — и во сколько раз?

▷ Для каждого способа выбрать 10 предметов можно получить 20 способов выбрать 11 предметов, добавляя к выбранным любой из 20 оставшихся предметов. При этом каждый способ выбрать 11 предметов получается таким способом из 11 разных способов выбрать 10 предметов (добавленным мог быть любой из 11 предметов). Получаем, что $20A = 11B$, то есть B в 20/11 раз больше A. ◁

Вот ещё одна задача с неожиданно простым решением, надо только правильно выбрать соответствие.

4.20* Сколько существует двоичных слов длины 12 с тремя единицами, в которых единицы не идут подряд (между любыми двумя единицами есть хотя бы один нуль)?

▷ Посмотрим на три единицы в таком слове. Между первой и второй сколько-то нулей (хотя бы один есть), между второй и третьей — тоже. Вычеркнем по нулю из этих двух промежутков. Получится слово длины 10 с тремя единицами (потому что мы вычеркнули два нуля и число единиц не изменилось).

Напротив, в любое слово длины 10 с тремя единицами можно добавить по нулю между первой и второй, а также между второй и третьей единицами. (Там одни нули, так что всё равно куда добавлять.) Эти две операции *обратны друг другу*, как сказали бы математики. (Сделав одну, а потом вторую, мы вернёмся к слову, с которого начали — можно начать и с добавления, и с удаления.) Поэтому мы получаем взаимно однозначное соответствие между интересующими нас словами и словами длины 10 с тремя единицами, которые мы уже считали. Их $(10 \cdot 9 \cdot 8)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$. ◁

В большинстве решённых нами задач мы так или иначе сталкивались с *числами сочетаний* (которые также называют *биномиальными коэффициентами*), то есть с числом способов выбрать k элементов из n элементов. В следующем разделе мы посмотрим на них более систематически (и узнаем, что это за «бином», у которого коэффициенты), но полезно привыкнуть к ним заранее в простых ситуациях.

4.21 Сколько различных слов (осмысленных или нет) можно получить, переставляя буквы в слове ПАРК? Тот же вопрос для слов ПАРА и ПАПА.

▷ Мы уже решали такую задачу для слова КОТ (2.5), и там было $3! = 6$ вариантов (выбор из трёх вариантов для первой буквы, потом из двух для второй, а третья определяется однозначно). Поэтому для четырёхбуквенного слова ПАРК ответ будет $4! = 24$.

Можно ли сказать то же самое про слово ПАРА? Нет, потому что в нём две одинаковые буквы. Сделаем временно их разными, скажем, одну сделаем строчной (маленькой) вместо прописной (большой). Тогда в слове ПАРа будет четыре разные буквы, и будут 24 варианта. Если теперь заменить строчную букву на прописную во всех этих 24 вариантах, то они соединятся в группы по 2 (та или другая буква А может быть строчной). Значит, без учёта этой разницы (как в исходной задаче) будет 12 вариантов.

В слове ПАПА ещё больше возможностей слияния вариантов, поскольку есть две пары одинаковых букв. Если бы их не было и было бы слово ПАпа, то было бы 24 варианта. Они склеиваются в группы по 4 (два способа выбрать маленькую а умножаются на два способа выбрать маленькую п), получается $24/4 = 6$ способов. ◁

4.22* (Продолжение) Тот же вопрос для слов ПАППА и МАТЕМАТИКА.

▷ В слове ПАППА три буквы П, и чтобы их различить, придётся взять три разных варианта $П_1, П_2, П_3$. Тогда (если учитывать только буквы П) из одного «неразмеченного варианта» получается шесть (3!) «размеченных», а с учётом двух вариантов для букв А — всего 12. Так что надо поделить $5! = 120$ (для размеченных буквы) на 12, получится 10.

Можно, впрочем, заметить, что эту задачу мы уже два раза решали, вычисляя число способов выбрать два предмета из пяти (0.17) и число путей в прямоугольнике 3×2 (3.3).

Для слова МАТЕМАТИКА: есть две буквы М, три буквы А, две буквы Т, остальные по одной, всего 10 букв. Поэтому аналогичное рассуждение даёт $10!/(2! \cdot 3! \cdot 2!)$. ◁

• Мы встретимся ещё раз с подобной задачей, рассматривая мультиномиальные коэффициенты.

4.23 Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны и различны? Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны, различны и идут в убывающем порядке? (Скажем, число 1573 подходит в первом случае, но не во втором, а число 9531 годится в обоих случаях.)

▷ Первый вопрос для нас уже совсем стандартен: для первой цифры есть 5 вариантов, для второй 4 и так далее, итого получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ вариантов. Если же мы теперь будем «сортировать» в каждом числе цифры в порядке убывания, то числа с разными цифрами склеятся в группы по $4! = 24$ (потому что из каждого числа с убывающими цифрами можно перестановками получить $4! = 24$ числа с различными цифрами), получится $5!/4! = 5$ вариантов.

Впрочем, это можно усмотреть и сразу: если мы хотим использовать четыре из пяти нечётных цифр, то неиспользованной останется только одна. И если мы решили, какая именно, то дальше выбора нет: оставшиеся четыре надо расположить в убывающем порядке. Соответственно получается 5 чисел

$$9753, 9751, 9731, 9531, 7531,$$

соответствующим пяти вариантам неиспользования. ◁