5. Сочетания и бином

Сейчас мы сформулируем в общем виде определения и результаты, которые уже не раз встречались в предыдущих разделах.

Пусть n и k — целые числа, причём $0 \leqslant k \leqslant n$. *Числом сочетаний из n по k* называется число способов выбрать набор из k предметов (порядок не учитывается) из n данных нам предметов. (На более математическом языке: число k-элементных подмножеств n-элементного множества.)

По-русски число сочетаний из n по k обычно обозначают C_n^k, хотя в последнее время употребительно и принятое в английских текстах обозначение $\binom{n}{k}$. Запись C_n^k обычно читают «цэ из эн по ка» (буква C не от слова «сочетание», а от слова “combinations”). Например $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, поскольку из четырёх букв a, b, c, d можно выбрать две буквы (без учёта порядка) шестью способами: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}$.

5.1 Чему равны C_n^0, C_n^1, C_n^{n-1}, C_n^n? (Мы предполагаем, что $n \geqslant 0$, а для второго и третьего выражений $n \geqslant 1$.)

▷ Иногда удобно считать, что $C_n^k = 0$ при $k < 0$ и $k > n$ (но мы будем стараться оговаривать такие случаи явно). ◁

5.2 Докажите, что при $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

• Более симметричный способ записи этого тождества: $C_{k+l}^k = C_{k+l}^l$ при целых $k, l \geqslant 0$: выбрать k из $k+l$ элементов (и оставить l) всё равно что выбрать l и оставить k.

5.3 Докажите, что C_n^k (при $0 \leqslant k \leqslant n$) равно числу двоичных слов длины n, в которых ровно k единиц.

▷ Можно представить себе такую картину: мы просматриваем по очереди все двоичные слова длины n, и раскладываем их по ящикам с надписями $0, 1, 2, \ldots, n$ в зависимости от числа единиц (как сказали бы статистики, «строим гистограмму»). По окончанию работы в ящике k окажется C_n^k слов.

При бо́льших n подавляющее большинство слов окажется в ящиках, близких к среднему (при $k \approx n/2$); в теории вероятностей это называют «законом бо́льших чисел». ◁

5.4 Докажите, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

при любом $n \geqslant 0$.

5.5* Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$$

при любом $n \geqslant 0$. (Знаки чередуются, поэтому знак плюс или минус перед последним членом зависит от чётности n.)

5.6 Докажите формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• В числителе первой дроби стоит k сомножителей (как и в знаменателе)

• Чтобы эта формула имела смысл при всех $0 \leqslant k \leqslant n$, надо считать $0! = 1! = 1$ (что вообще логично, если мы хотим, чтоб равенство $n! = n \cdot (n-1)!$ выполнялось при $n = 2$ и при $n = 1$).

Более симметричная запись той же формулы: $C_{k+l}^k = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}$ при $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

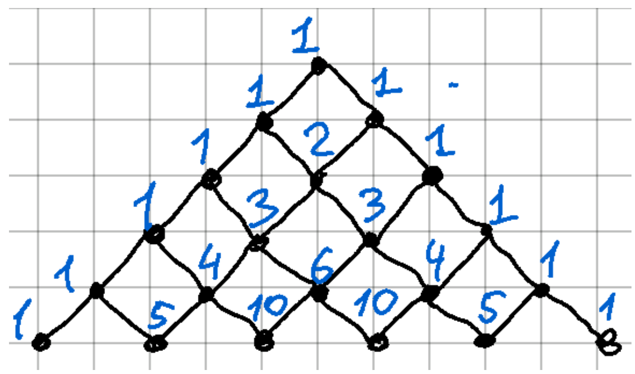
5.7* Докажите, что при любом $k \geqslant 2$ произведение любых последовательных k целых положительных чисел делится на $k!$. (Например, $n(n-1)$ всегда чётно, а $n(n-1)(n-2)$ всегда делится на 6.)

• Слово «положительные» в утверждении можно опустить: если числа все отрицательные, то можно изменить знак, а если есть нуль, то произведение равно нулю и делится на что угодно.

▷ Мы уже встречались (задача 4.12) с этим утверждением при $k = 2$: произведение $n(n-1)$ всегда чётно, так как одно из чисел n и $n-1$ чётно. Для произвольного k уже не так просто это доказать, не рассматривая число сочетаний (но можно: надо заметить, что кратные любого числа встречаюттся в произведении k подряд идущих чисел не меньше раз, чем в произведении чисел от 1 до k, потому что второе произведение начинается в самом невыгодном месте, и применить это утверждение к степеням простых чисел). ◁

5.8 Докажите, что число сочетаний C_{k+l}^k равно числу кратчайших путей из одного угла в другой для прямоугольного города $k \times l$, разрезанного улицами на квадратные кварталы 1×1.

Мы уже записывали число путей для прямоугольников разного размера (в каждой точке записано число путей из вершины сверху-вниз по дорогам):



Теперь мы знаем, что эти числа соответствуют числам сочетаний C_n^k при различных n и k. Например, число 10 в нижней строке соответствует C_5^2 (а другое число 10 в той же строке соответствует C_5^3).

$\boxed{\textbf{5.9}}$ Найдите на этой картинке число C_4^2: числу путей в каком прямоугольнике оно соответствует?

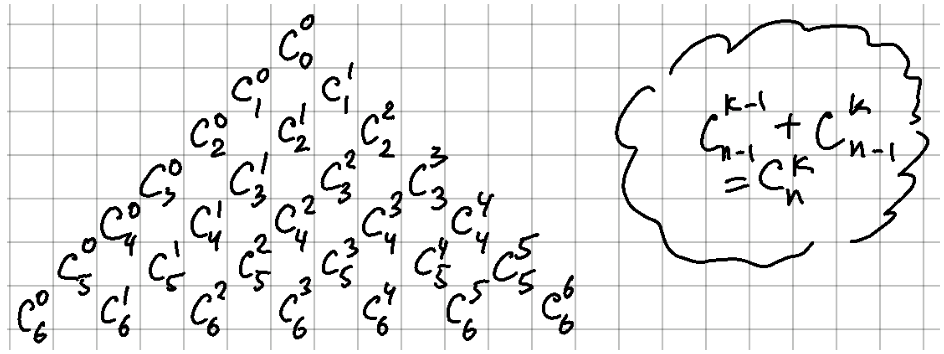
$\boxed{\textbf{5.10}}$ Докажите рекуррентную формулу

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

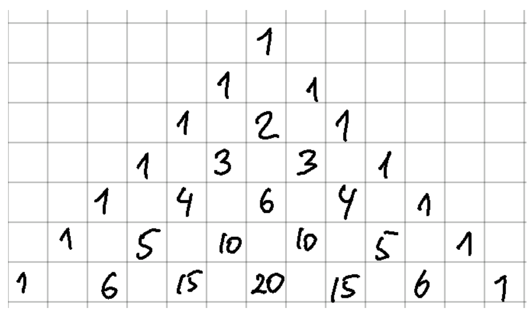
при $n \geqslant 1$ и $0 < k < n$.

• Можно понять, что это означает в терминах числа путей. Величина C_n^k соответствует прямоугольнику размера $k \times (n-k)$. Величины в правой части тогда соответствуют прямоугольникам размера $(k-1)\times(n-k)$ и $k \times (n-k-1)$. Если, как и раньше, обозначить $n-k$ за l, то наша формула утверждает, что число путей из угла в угол для прямоугольника $k \times l$ равно сумме таких чисел для прямоугольников $k\times(l-1)$ и $(k-1)\times l$ — мы как раз это и использовали, когда начинали считать число путей. Но мы изложим по существу то же рассуждение более комбинаторно.

Удобно записать числа сочетаний в треугольную таблицу (мы это уже делали, считая пути в разделе 3).



Тогда рекуррентную формулу предыдущей задачи можно сформулировать так: каждое число в этой таблице равно сумме чисел слева и справа от него в предыдущей строке. Зная, что на левом и правом краю этого *треугольника Паскаля* стоят единицы, его легко заполнять, переходя от строки к строке (достаточно уметь складывать):



▷ Из этой картинки видно, скажем, что $C_6^2 = 15$. Можно проверить это по формуле:

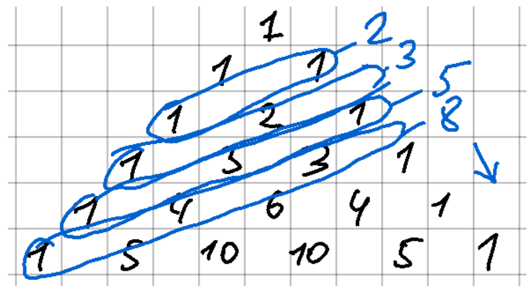
$$\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Если надо вычислить всю таблицу, то проще складывать верхних соседей, чем применять формулу с произведениями. (Даже если нужно вычислить только одно число, может быть проще заполнить таблицу до этого места, чем перемножать и делить большие числа.)

Для единиц с краю правило суммы не годится (потому что один сосед выходит за пределы треугольника). Таких исключений не будет, если договориться, что слева и справа от треугольника стоят одни нули. ◁

5.11* Докажите, используя правило заполнения треугольника Паскаля, что знакопеременная сумма чисел в любой его строке равна нулю ($1 - 2 + 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ и так далее).

$\boxed{\mathbf{5.12}^*}$ Покажите, что суммы чисел в треугольнике Паскаля по наклонным прямым являются числами Фибоначчи:



Теперь объясним, почему числа сочетаний называют ещё *биномиальными коэффициентами*. *Бино́м* — по-русски «двучле́н» — название для *полино́ма* (многочле́на), который содержит два *моно́ма* (одночле́на). Что будет, если возводить простейший бином $(a + b)$ в разные степени? Хорошо известна формула

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Чуть сложнее формула

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Что будет дальше, для четвёртой степени? Попробуем это себе представить, не выписывая всех членов. Мы раскрываем скобки в произведении четырёх скобок $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, сколько и какие члены получатся? Из каждой скобки нужно выбрать a или b, и все четыре буквы перемножить. Другими словами, нужно взять все четырёхбуквенные слова из букв a, b, считать их произведениями и сгруппировать одинаковые слагаемые (*приведение подобных*). В каждую группу подобных членов попадут слова с одинаковым числом букв a и b.

Скажем, a^4 будет в единственном числе (из всех скобок надо выбрать букву a), а a^3b встретится 4 раза (так как буква b может быть на любом из четырёх мест $baaa$, $abaa$, $aaba$, $aaab$). Дальше будет a^2b^2, и коэффициент будет равен числу слов длины 4 с двумя буквами a и двумя буквами b. Таких членов 6, а именно $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $babb$. При ab^3

будет тот же коэффициент 4, что при a^3b; наконец, b^4 встретится один раз. Получится

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Видно, что коэффициенты соответствуют строке треугольника Паскаля, и это не удивительно, потому что количество слов длины n, в которых k букв a, как раз равно C_n^k (надо выбрать из n позиций k мест для букв a). То же рассуждение показывает, что

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Можно было бы для единообразия вместо a^n и b^n написать $C_n^0 a^n b^0$ и $C_n^n a^0 b^n$. А можно, наоборот, вспомнить формулы для C_n^k и написать более явно

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Правую часть даже не надо обрывать специально, потому что коэффициент обратится в нуль — появится скобка $(n-n)$ и продолжать формулу дальше не надо (последний ненулевой будет как раз $n!/n! = 1 = C_n^n$).

5.13 Что получится, если в формулу для бинома (та, что выше в рамке) подставить $a = 1$, $b = 1$? А если подставить $a = 1$, $b = -1$?

▷ Используя традиционные обозначения для суммирования, наши равенства можно записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

◁

5.14* Подставляя $a = 1$, $b = 2$ в формулу для бинома, получаем тождество

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^k C_n^k + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Как доказать его комбинаторно, не используя формулы бинома?

▷ Забудем временно о том, что в формуле бинома n — целое число, и подставим, скажем $a = 1$, $b = x$ и $n = 1/2$. Получится формула

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots$$

с бесконечной суммой в правой части (потому что теперь уже коэффициенты не обращаются в нуль). Но удивительным образом эта формула имеет смысл, и даже несколько разных смыслов. При малых x (меньших 1 по модулю) её можно воспринимать как приближённую формулу: если брать больше членов в правой части, будет всё точнее и точнее. А можно формально вычислять квадрат правой части, то есть произведение

$$\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots\right)=$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)x^2+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)x^3+\ldots=$$
$$=1+x+0x^2+0x^3+\ldots$$

и наблюдать, что всё больше и больше коэффициентов оказываются равными нулю, и остаётся $1+x$, как и должно быть при возведении в квадрат $(1+x)^{1/2}$.

Формулу бинома с нецелыми показателями придумал Ньютон — в честь которого теперь говорят «бином Ньютона» (хотя для целых положительных показателей это было известно многим и до Ньютона). Кстати, и для отрицательных показателей это имеет смысл: подставив $n=-1$, мы получим $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$ (проверьте, что именно такие коэффициенты получаются), формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. $\triangleleft$

5.15* Аня придумала способ находить биномиальные коэффициенты на калькуляторе: $11^2=121$ (вторая строка треугольника Паскаля), $11^3=1331$, $11^4=14641$. Но с $11^5=161051$ вышло что-то не то, и Аня задумалась. «А-а-а, конечно, тут же двузначные коэффициенты... Но ничего страшного, я сейчас вычислю ⟨...⟩» — и всё получилось. Что сделала Аня и почему всё получилось?

Рассматривая треугольник Паскаля с разных сторон, можно обнаружить интересные закономерности. Приведём несколько примеров.

5.16* Докажите, что сумма *квадратов* всех чисел в строке треугольника Паскаля стоит в нём в середине строки с вдвое большим номером:

$$(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

(Например, $1^2+3^2+3^2+1^2=20=C_6^3$.)

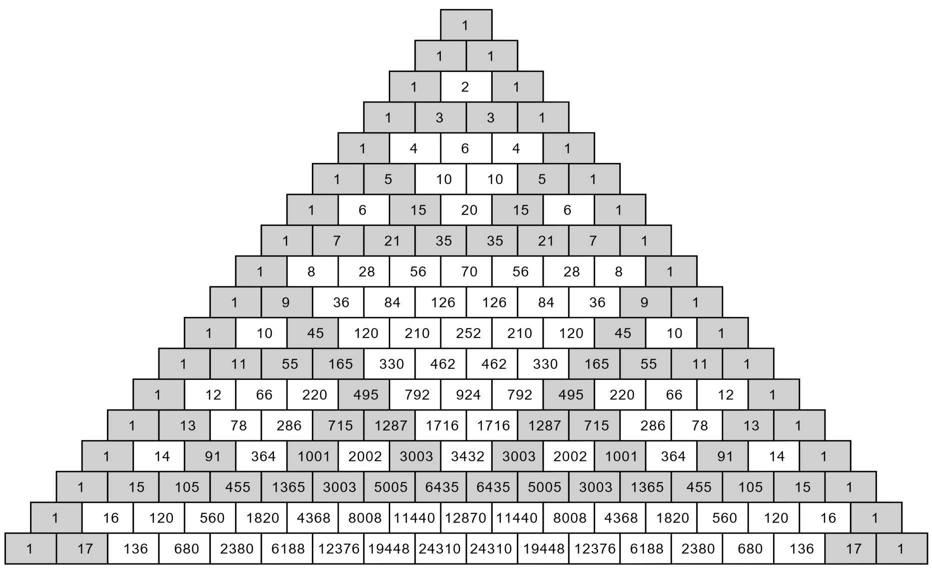
5.17* Докажите, что

$$C_{m+n}^k=C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+\ldots+C_m^kC_n^0.$$

(В правой части в некоторых биномиальных коэффициентах C_u^v может быть $v > u$, такие коэффициенты считаем равными нулю.)

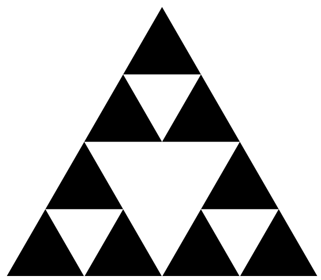
5.18* Докажите, что до середины числа в каждой строке треугольника Паскаля возрастают, а потом убывают (так что наибольшим является число в середине — или два одинаковых числа, в зависимости от чётности номера строки).

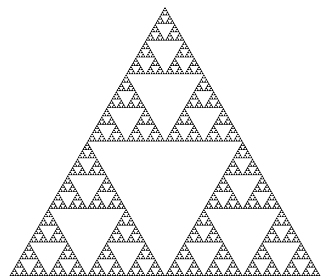
Рассматривая треугольник Паскаля, можно заметить, что там бывают строки, состоящие только из нечётных чисел, а также строки, в которых все числа (кроме крайних единиц) чётны. В википедии есть соответствующая картинка — числа там мелкие, но нечётные числа выделены цветом, и можно рассматривать соответствующий узор:



Хорошо видны и серые горизонтали, на которых стоят только нечётные числа, и серые треугольники с дырками, на них опирающиеся.

▷ Любители красивых картинок, вероятно, узнают тут «треугольник Серпинского». Он получается, если из треугольника выбросить середину (треугольник из средних линий), потом с каждым получившимся треугольником сделать то же самое (см. левый рисунок), и продолжать так до бесконечности (ещё несколько шагов показаны на правом рисунке, дальнейшее выбрасывание уже на рисунке не увидишь). Такие фигуры называются «самоподобными фрактáлами». Самоподобными — потому что фигура состоит из трех своих вдвое меньших копий, стянутых гомотетично к вершинам. Фракталами — потому что они имеют «размерность» между 1 и 2, что-то среднее между линиями и плоскими фигурами (со внутренностью). Мы не будем про это говорить подробно, ограничившись уже указанным выше свойством треугольника Паскаля.





◁

5.19* Докажите, что при $n = 1, 3, 7, 15, \ldots$ (числа, на единицу меньшие степеней двойки) все биномиальные коэффициенты C_n^k нечётны (при всех k от 0 до n).

Бином Ньютона указывает коэффициенты в разложении $(a+b)^n$. Можно задать себе аналогичный вопрос про $(a+b+c)^n$ — какие там коэффициенты? Скажем

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

что легко проверить (коэффициент 2 возникает, когда ab соединяется с ba и так далее). Чуть сложнее вычислить

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Но какая тут общая формула? Следующая задача отвечает на этот вопрос.

5.20* Докажите, что $(a+b+c)^n$ состоит из членов вида $a^p b^q c^r$, где $p, q, r \geqslant 0$, $p + q + r = n$, а коэффициент при $a^p b^q c^r$ равен

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

(*мультиномиальные коэффициенты*).

Аналогичная формула (по тем же причинам) есть для любого числа слагаемых: скажем, $(a+b+c+d)^n$ равно сумме одночленов $a^p b^q c^r d^s$ с $p+q+r+s = n$, а коэффициенты равны $n!/(p!q!r!s!)$.

В заключение приведём ещё одну ситуацию, где появляются биномиальные коэффициенты.

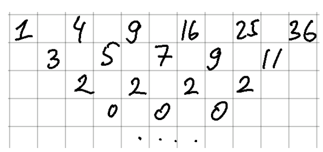
$\boxed{\textbf{5.21}^*}$ Докажите, что число решений уравнения $x+y+z=10$ в целых неотрицательных числах равно C_{12}^2. Чему равно число решений уравнения $x+y+z=13$ в целых положительных числах?

Решением уравнения $x+y+z=10$ считается тройка чисел (x, y, z), где все три числа целые и неотрицательные, и в сумме дают 10. Скажем, $(1,3,6)$ и $(3,1,6)$ — два решения этого уравнения, причём различные.

Общее утверждение: *количество решений уравнения* $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ *в целых неотрицательных числах* (*при* $k \geqslant 1, n \geqslant 0$) *равно* C_{n+k-1}^{k-1}.

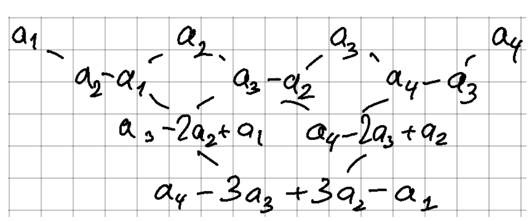
$\boxed{\textbf{5.22}^*}$ Найдите число решений неравенства $x+y \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах.

Выпишем подряд точные квадраты $(1,4,9,16,\ldots)$. Затем под каждыми двумя числами напишем разность, получим ряд из *первых разностей* $3,5,7,9\ldots$. Ещё раз сделаем то же, получится ряд из вторых разностей $2,2,2,\ldots$ (а третьи разности будут нулевыми).



Можно сделать аналогичный опыт с точными кубами, тогда понадобится на один шаг больше (четвёртые разности будут ненулевыми, но постоянными, а пятые нулевыми).

Если записать правила вычислений для третьей строки в общем виде, то там появятся знакочередующиеся биномиальные коэффициенты:



$\boxed{\mathbf{5.23}}^*$ (а) Покажите, что выражение для k-й разности содержит последовательные члены исходного ряда с знакочередующимися биномиальными коэффициентами $C_k^0, -C_k^1, C_k^2, \ldots$. (б) Покажите, что если исходная последовательность является значениями многочлена $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в целых точках, то все k-е разности равны $k!a_k$ (а все следующие — нулю). (в) Докажите, что для целого положительного s сумма

$$C_k^0 0^s - C_k^1 1^s + C_k^2 2^s - C_k^3 3^s + \ldots$$

равна $(-1)^k k!$ при $s = k$ и равна 0 при $s < k$.