# 7. Что дальше?

В предыдущих разделах мы разобрали базовые понятия и методы перечислительной комбинаторики из категории «это должен знать каждый». В этом разделе мы немного расскажем о более сложных результатах, приведя примеры биективных доказательств и простейших рассуждений с производящими функциями, укажем на вероятностный смысл комбинаторных задач и приведём список книг разного уровня о комбинаторике на русском языке.

## 7.1. Биективные доказательства

### 7.1.1. Диаграммы Юнга

Как мы уже видели в разделе 4, иногда можно доказать, что в двух множествах поровну элементов, установив между ними взаимно однозначное соответствие («биекцию»). Иногда это соответствие совсем простое, но не всегда — бывает, что равенство сначала доказали каким-то другим способом, а соответствие построили только позже (или вообще пока не построили). Вот немного более сложный пример биективного рассуждения.

**7.1*** Пусть $n$ и $k$ — целые положительные числа. Докажите, что количество разбиений числа $n$ на целые положительные слагаемые, *не превосходящие* $k$, равно количеству разбиений числа $n$ на *не более чем* $k$ целых положительных слагаемых.

• Как и раньше, порядок слагаемых мы не учитываем. Скажем, для $n = 5$ и $k = 3$ можно перечислить разбиения 5 на не более чем 3 слагаемых:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

(пять вариантов, в первом единственное слагаемое, равное 5). Можно также перечислить разбиения 5 на слагаемые, не большие 3:

$$[5 =]\ 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Здесь 5 в скобках, потому что теперь оно уже не будет разбиением. Можно проверить, что мы ничего не пропустили (в обоих случаях слагаемые в разбиении указаны в убывающем порядке, а сами разбиения указаны в порядке убывания наибольшего слагаемого).

Видно, что и тех, и других разбиений поровну (5 при $n = 5$, $k = 3$). Требуется доказать, что их будет поровну и для всех других целых $n, k \geqslant 1$.

### 7.1.2. Числа Каталана

Много интересных биекций можно построить для разных определений чисел Каталана. Напомним, что мы рассматривали (задача 3.15) произведение $n$ сомножителей, и считали, сколькими способами можно расставить в нём скобки, указывающие порядок действий (переставлять сомножители не разрешается). Это число способов, как мы уже упоминали, называется *числом Каталана* и обозначается $C_{n-1}$ (так принято, так что $C_4$ — это число способов расставить скобки в произведении пяти сомножителей, а не четырёх).

$\boxed{\mathbf{7.2}^*}$ Докажите, что $C_4$ равно числу способов разрезать выпуклый 6-угольник диагоналями на треугольники, и вообще $C_n$ равно числу способов разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник диагоналями на треугольники.

• Скажем, четырёхугольник можно разрезать двумя способами (по одной диагонали и по другой) — и это соответствует $C_2$, или числу способов перемножить три множителя.

Важное уточнение: мы рассматриваем разрезания данного $n$-угольника, поворачивать его не разрешается (так что разрезания по разным диагоналям считаются разными разрезаниями).

▷ Можно также понять, сколько нужно диагоналей и сколько получится треугольников. Каждое разрезание увеличивает число частей на единицу, так что число треугольников на 1 больше числа диагоналей (вначале была одна часть). Если провести все диагонали из одной вершины, то будет $n-3$ диагоналей и $n-2$ треугольников. Но из подсчёта углов следует, что число треугольников не зависит от способа разрезания: сумма углов всех треугольников должна равняться сумме углов многоугольника, как ни разрезай. Так что при любом разрезании $n$-угольника будет столько же треугольников и диагоналей ($n-2$ и $n-1$ соответственно). ◁

▷ Дотошные люди попросят тут доказать, что действительно возникает взаимно однозначное соответствие. Хотя это и выглядит очень правдоподобно после рассматривания рисунка и других примеров, строгое доказательство прежде всего потребовало бы формального определения понятий «расстановка скобок для указания порядка дейтсвий» и «разрезания многоугольника на треугольники», что совсем не так просто (не зря в школьном курсе про многоугольники говорят без точных определений), так что мы не будем этого делать.

Аналогичным образом в следующей задаче мы тоже позволим себе описать соответствие неформально и декларировать его взаимную однозначность. ◁

**7.3*** Докажите, что $C_n$ равно количеству двоичных слов длины $2n$ из $n$ нулей и $n$ единиц, в которых каждый начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.

• На графике длины стека (снизу на рисунке) единицы, они же буквы $p$, сооответствуют участкам подъёма (вектор $(1, 1)$), а нули, они же звёздочки, соответствуют участкам спуска (вектор $(1, -1)$). Другими словами, число Каталана $C_n$ равно числу ломаных такого вида (с наклоном $\pm 1$, повороты в вершинах клеток), идущих из $(1, 1)$ в $(2n + 1, 1)$ и не доходящих до оси абсцисс.

• Глядя на эти ломаные, можно доказать рекуррентную формулу для их числа — и убедиться, что эта та же формула, что и для чисел Каталана. Останется сравнить первые члены и заключить, что все члены совпадают (тем самым получив другое решение предыдущей задачи). Рекуррентную формулу можно получить так: посмотрим, в каком месте ломаная первый раз обращается в нуль (какое минимальное начало имеет поровну нулей и единиц), и разобьём ломаные на такие группы. Если это место фиксировано (скажем, после $2k$ членок последовательности — их чётное число, так как нулей и единиц поровну), то до и после этого места последовательность строится независимо. После него $C_{n-k}$ вариантов (потому что это та же задача меньшего размера), а до него $C_{k-1}$ (потому что участок до начинается с 1 и кончается 0, остаётся выбрать промежуток между ними).

### 7.1.3. Метод отражений и формула для чисел Каталана

Оказывается, можно построить ещё одно взаимно-однозначное соответствие и с его помощью найти явную формулу для чисел Каталана. Мы уже видели, что надо подсчитать число ломаных из $(1, 1)$ до $(2n+1, 1)$, *целиком идущих* (строго) *выше оси абсцисс*. Если отбросить это последнее условие, то число ломаных равнялось бы числу последовательностей из $n$ нулей и $n$ единиц, то есть $C_{2n}^n$. Теперь из этого числа надо вычесть ломаные, *доходящие* до оси абсцисс — и их число можно найти, построив взаимно однозначное соответствие. (Говоря о ломаных, мы всюду имеем в виду ломаные с наклоном $\pm 1$, идущие по диагоналям клеток.)

**7.4*** Постройте взаимно однозначное соответствие между ломаными из $(1, 1)$ в $(2n + 1, 1)$, доходящими до оси абсцисс (в том числе пересекающими её), и *всеми* ломаными из $(1, 1)$ в $(2n + 1, -1)$.

Теперь уже легко указать формулу для чисел Каталана.

**7.5*** Докажите, что $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$

Мы привели только несколько примеров, когда построение взаимно однозначного соответствия позволяет найти число элементов в интересующем нас множестве. Есть целый список таких задач (R. Stanley, `https://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf`) разной сложности, включая некоторые нерешённые. Но, пожалуй, даже более удивительно то, что иногда можно найти ответ совсем другими методами — и сейчас мы приведём несколько (самых простых) примеров такого рода.

## 7.2. Производящие функции

Перечислительная комбинаторика удивительным образом связана с другими разделами математики. Мы уже видели (в разделе 3), что числа сочетаний можно определить как коэффициенты многочлена $(1+x)^n$, и это сразу же позволяет получить разные следствия, скажем, найти сумму $\sum_{k=1}^n 2^k C_n^k$ (задача 5.13), или найти сумму квадратов всех $C_n^k$ при данном $n$ (задача 5.16). Если немного знать анализ и уметь дифференцировать многочлены, можно легко получить ещё несколько следствий.

**7.6*** Какое тождество получится, если продифференцировать биномиальное разложение для $(1+x)^n$?

Можно подставить $x = 1$ и получить тождество

$$n2^{n-1} = 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n,$$

но его и без этого легко понять. (Мы добавили для красоты и $C_n^0$ с нулевым коэффициентом.)

**7.7*** Как доказать это равенство без дифференцирования?

• Другие — не столь очевидные — тождества получатся, если подставить не $x = 1$, а, скажем, $x = -1$ или $x = -2$.

Дифференцирование можно применять и дальше.

**7.8*** Найдите сумму

$$0^2 \cdot C_n^0 + 1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + n^2 \cdot C_n^n.$$

Говорят, что $(1 + x)^n$ является *производящей функцией* для биномиальных коэффициентов. Вообще производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

— бесконечный, если в последовательности бесконечно много ненулевых членов.

• Какой смысл имеют бесконечные ряды и какие действия по каким правилам с ними можно выполнять — вопрос сложный. Мы сейчас не будем в это вдаваться, и действовать с ними как если бы они были конечными (на самом деле наши действия можно оправдать, если разобраться).

Пусть $p_n$ — число разбиений целого $n \geqslant 0$ на положительные целые слагаемые (без учёта порядка слагаемых). Мы полагаем $p_0 = 1$ (можно условно сказать, что число 0 можно единственным образом представить в виде суммы целых положительных слагаемых, взяв сумму из нуля слагаемых). Производящую функцию для $p_n$ можно разложить в бесконечное произведение (мы это уже упоминали, говоря о пентагональной теореме Эйлера в разделе 3):

**7.9*** Докажите, что $p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n + \ldots$ можно представить как

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)\ldots$$

Здесь в $k$-й скобке стоит $1+x^k+x^{2k}+\ldots$, то есть использованы все степени, кратные $k$ (начиная с нулевой).

**7.10*** Что изменится, если оставить в каждой скобке по два члена и написать

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\ldots(1 + x^k)\ldots$$

— производящая функция какой последовательности задаётся таким произведением?

**7.11*** Что изменится, если оставить в произведении предыдущей задачи только степени двойки и написать

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)\ldots(1 + x^{2^k})\ldots$$

▷ Можно пойти дальше и «вычислить» сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

мы это упоминали, говоря о пентагональной теореме, но в данный момент это нам ни к чему. ◁

**7.12*** Докажите, что *число разбиений на нечётные слагаемые равно числу разбиений на различные слагаемые.*

• Мы рассматриваем разбиения какого-то целого положительного числа $n$ в сумму целых положительных слагаемых (без учёта порядка) с двумя видами ограничений: (а) все слагаемые нечётны; (б) все слагаемые различны. (Скажем, при $n = 6$ получаем разбиения $5 + 1$, $3 + 3$, $3 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ для нечётных слагаемых и $6$, $5 + 1$, $4 + 2$, $3 + 2 + 1$ для различных слагаемых.)

Это рассуждение выглядит удивительно (и требует обоснования законности наших действий), но его (в отличие от многих других рассуждений с производящими функциями) можно перевести на язык взаимно однозначных соответствий.

**7.13*** Пусть $n$ — целое положительное число. Постройте взаимно однозначное соответствие между разложениями $n$ на нечётные слагаемые и разложениями $n$ на различные слагаемые.

**7.14*** Покажите, что производящая функция для чисел Фибоначчи

$$T(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$$

удовлетворяет соотношению

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1$$

(если перемножить формально и привести подобные члены в бесконечной сумме).

▷ Отсюда можно заключить (особенно если забыть о смысле и обоснованиях), что $T(x) = 1/(1-x-x^2)$. Дальше можно разложить $(1-x-x^2)$ на линейные множители и затем разложить дробь типа $1/(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, как говорят математики, *в сумму простейших*, то есть в сумму $a_1/(x-\alpha_1) + a_2/(x-\alpha_2)$. Для этого полезно временно заменить числитель на $(x-\alpha_1)-(x-\alpha_2)$. После этого можно вспомнить, что дроби вида $1/(x-a)$ разлагаются в ряд, и получится формула для чисел Фибоначчи с суммой двух геометрических прогрессий. ◁

**7.15*** Используя определение чисел Каталана с помощью рекуррентной формулы $C_0 = 1$,

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_kC_{n-1-k} + \ldots + C_nC_0,$$

напишите тождество для производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \ldots$$

(в него войдёт её квадрат).

▷ Отсюда можно найти выражение с корнем для $C(x)$ по формуле квадратного уравнения. Если затем применить формулу бинома для этого квадратного корня (с полуцелым показателем), то можно получить формулу для чисел Каталана, которую мы доказали другим способом, с отражением ломаных. ◁

## 7.3. Комбинаторика и вероятности

Часто комбинаторные задачи формулируют в вероятностных терминах. Объясним на примере, как это делается.

Рассмотрим *вероятностный эксперимент*, состоящий в том, что мы трижды бросаем игральную кость и записываем, какое число (от 1 до 6) выпало. *Исходом* (результатом) такого эксперимента будет последовательность из трёх чисел от 1 до 6 (трёхбуквенное слово в шестибуквенном алфавите).

**7.16*** Считая все исходы равновероятными, определить вероятность событий «выпали три шестёрки», «выпала ровно одна шестёрка», «выпала хотя бы одна шестёрка».

• Другими словами, нужно найти отношения числа «благоприятных исходов» (подпадающих под описание события) к общему числу возможных исходов.

Можно проверить свою вероятностную интуицию, попытавшись сначала угадать ответ, а потом проверить.

**7.17*** Что вероятнее при шести бросаниях кубика — не выбросить ни одной шестёрки или выбросить хотя бы одну шестёрку?

▷ Вероятность 1/6 часто объясняется как «один из шести раз». Если бы действительно каждый шестой раз (через пять неудач) выпадала бы шестёрка, то при шести бросаниях она была бы наверняка. Но на деле вероятность совсем не близка к 1 (хоть и больше 50%). ◁

Примерно так же можно посчитать вероятность разных событий, связанных с лотереями и т.п. Скажем, во времена СССР была лотерея «Спортлото»[12], в которой играющий покупал карточку за 30 копеек (=0,3 рубля), на которой были написаны числа от 1 до 49. Он должен был зачеркнуть шесть из этих чисел, и отправить билет организаторам до определённого дня. После этого дня происходил «тираж», вероятностный эксперимент, где с помощью «лототрона» выбирались шесть (различных) выигрышных номеров от 1 до 49. Билет был выигрышным, если было хотя бы три общих номера (если больше, то выигрыш был больше).

**7.18*** Найдите вероятность выиграть в «Спортлото» ровно с тремя выигрышными номерами.

Во многих случаях комбинаторную задачу можно представить в вероятностных терминах.

**7.19*** Сто человек хотят уплатить по рублю, при этом у половины из них по рублёвой монете (оплата без сдачи), а у половины по двухрублёвой монете. Они становятся в очередь в случайном порядке. Какова вероятность того, что всем удастся расплатиться, если у кассира перед открытием кассы никакой сдачи нет?

**7.20*** У Маши есть кубик, шесть граней которого окрашены в шесть разных цветов. Миша, будучи в гостях у Маши, решил сделать себе такой же кубик, и запомнил эти цвета (но не запомнил, как они располагались на кубике). Придя домой, он взял такой же кубик и случайным образом раскрасил его грани в те же шесть цветов. Какова вероятность, что у него получится точная копия кубика Маши? (Это значит, что кубик Миши можно так повернуть, чтобы цвета были точно такие же, как у Маши.)

▷ Математическая теория вероятностей не сводится к комбинаторике. Можно рассматривать неравновероятные исходы, или эксперименты с бесконечным числом исходов (где, скажем, исходом может быть точка на плоскости: «бросаем случайную точку в квадрат»). Помимо событий и вероятностей, центральную роль в теории вероятностей играют *случайные величины* и их *математические ожидания*. Даже если ограничиваться событиями, то появляется важное понятие *условной вероятности* и *независимости событий*.

[12] «Если вы не отзовётесь, мы напишем в Спортлото», пел Высоцкий.

На практике нас могут интересовать не точные значения вероятностей, а какие-то приближения для них, или оценки сверху. Скажем, получив какую-то астрономически малую вероятность для неблагоприятного стечения обстоятельств, мы можем это стечение обстоятельств не учитывать при планировании.[13] Одна из базовых верхних оценок — *закон больших чисел*. В простейшей ситуации он означает, что в дальних строках треугольника Паскаля основная масса сосредоточена около их центра. Скажем, если мы просуммируем 1% всех чисел строки, стоящих в интервале вокруг середины, то их сумма составит больше 99% суммы всех чисел строки (соответствующей степени двойки). Можно изучать, как ведут себя числа в треугольнике Паскаля около середины — оказывается, что их график при правильном масштабе близок к графику функции $e^{-x^2/2}$ (гауссово, или нормальное распределение). И многое другое — мы привели только два простых примера.

В общем, математическая теория вероятностей — отдельная интересная наука, но начинается она с базовых комбинаторных задач, так что разобранные нами задачи — хорошее начало для знакомства с ней. $\lhd$

## 7.4. Литература

### Материалы для школьников, популярные изложения

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев, *Введение в комбинаторику (по материалам лекций академика И. М. Гельфанда). Методические разработки для учащихся ВЗМШ*. Москва, 1989, `https://archive.org/details/combinatorics1989`

Сборник задач (часть с решениями), рассылавшийся ученикам Всесоюзной Заочной Математической Школы (организованной в середине 1960-х И. М. Гельфандом и его сотрудниками). Рассчитан на школьников с минимальной предварительной подготовкой.

В. А. Успенский, *Треугольник Паскаля*, 2-е изд., Москва, Наука, 1979 (Популярные лекции по математике, выпуск 43), `https://math.ru/lib/plm/43`.

По материалам лекции для школьников (в предисловии написано, что «Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы» — хотя это всё

[13] А если оно потом произойдёт, например, потому, что наши вероятностные модели были неправильными, что ж — значит, случился «чёрный лебедь», как теперь модно говорить.

же небольшое преувеличение.) Начиная с рекуррентного определения треугольника Паскаля, Успенский обсуждает комбинаторный смысл его элементов, бином Ньютона и соотношения между биномиальными коэффициентами. (Попутно там поучительное обсуждение того, что значит «решить комбинаторную задачу».)

Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, Наука, 1969.

Разбираются разные комбинаторные задачи, большинство сформулировано в житейских терминах с элементами «оживляжа», но несмотря на такую «занимательность», разобрано много разных интересных (и не таких простых) вещей.

Н. Я. Виленкин, *Популярная комбинаторика*, Москва, Наука, 1975, `https://math.ru/lib/book/djvu/combinatorika.djvu`

Частично пересекается с предыдущей книгой (и сохраняет её стиль), но есть много нового материала, выходящего за рамки *перечислительной* комбинаторики.

Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, ФИМА, МЦНМО, 2006.

Содержит материалы двух предыдущих книг. Подготовлена к печати уже после смерти Н.Я. его сыном и внуком.

Журнал «Квант», `http://www.kvant.info/`, `http://kvant.mccme.ru/`

В разные годы публиковал много материалов о комбинаторике

С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс, *Математический дивертисмент*, Москва, МЦНМО, 2011.

Сборник рассказов на разные математические темы (в том числе комбинаторные); часть из них написана на основе статей авторов в «Кванте»ю

Е Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы*, Москва, МЦНМО, 2014, `https://users.mccme.ru/smirnoff/papers/dubna14.pdf`

Записки лекций, прочитанных в летней школе для школьников и студентов-младшекурсников.

**Учебники для студентов и не только**

Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Москва, Мир, 1990.

Классический учебник по перечислительной комбинаторике (первый том, переведённый на русский язык). Информация о втором томе и другие материалы: `https://math.mit.edu/~rstan/ec/`.

М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, Мир, 1970.

Не только перечислительная комбинаторика, но и многое другое.

С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях, 3-е изд., Москва, МЦНМО, 2007,
`https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf`

По материалам лекций, читавшихся автором в Независимом Московском университете.

Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика. Основание информатики.* Перевод Б. Б. Походзея и А. Б. Ходулёва под редакцией А. Б. Ходулёва. Москва, Мир, 1998,
`https://archive.org/details/Konkretnaya-matematika-Osnovaniye-informatiki-Grehem-Knut-Patashnik-1998`

Биномиальные коэффициенты и тождества для них — глава 5, производящие функции — глава 7.