7. Что дальше?

В предыдущих разделах мы разобрали базовые понятия и методы перечислительной комбинаторики из категории «это должен знать каждый». В этом разделе мы немного расскажем о более сложных результатах, приведя примеры биективных доказательств и простейших рассуждений с производящими функциями, укажем на вероятностный смысл комбинаторных задач и приведём список книг разного уровня о комбинаторике на русском языке.

7.1. Биективные доказательства

7.1.1. Диаграммы Юнга

Как мы уже видели в разделе 4, иногда можно доказать, что в двух множествах поровну элементов, установив между ними взаимно однозначное соответствие («биекцию»). Иногда это соответствие совсем простое, но не всегда — бывает, что равенство сначала доказали каким-то другим способом, а соответствие построили только позже (или вообще пока не построили). Вот немного более сложный пример биективного рассуждения.

$\boxed{\mathbf{7.1}^{*}}$ Пусть n и k — целые положительные числа. Докажите, что количество разбиений числа n на целые положительные слагаемые, *не превосходящие* k, равно количеству разбиений числа n на *не более чем* k целых положительных слагаемых.

• Как и раньше, порядок слагаемых мы не учитываем. Скажем, для $n = 5$ и $k = 3$ можно перечислить разбиения 5 на не более чем 3 слагаемых:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

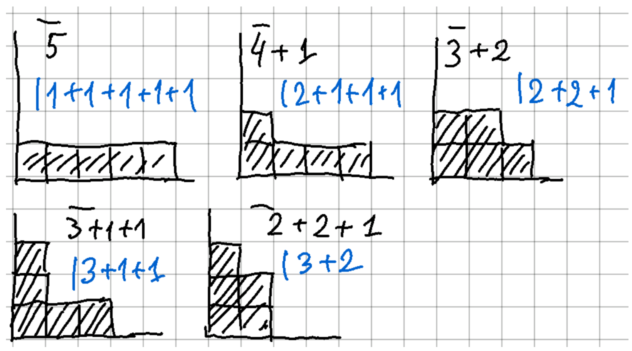
(пять вариантов, в первом единственное слагаемое, равное 5). Можно также перечислить разбиения 5 на слагаемые, не большие 3:

$$[5 =]\ 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Здесь 5 в скобках, потому что теперь оно уже не будет разбиением. Можно проверить, что мы ничего не пропустили (в обоих случаях слагаемые в разбиении указаны в убывающем порядке, а сами разбиения указаны в порядке убывания наибольшего слагаемого).

Видно, что и тех, и других разбиений поровну (5 при $n = 5$, $k = 3$). Требуется доказать, что их будет поровну и для всех других целых $n, k \geqslant 1$.

▷ Решение можно увидеть на таком рисунке:



Здесь изображены пять фигур из клеток, которые можно читать двумя способами: можно считать, что каждая строка представляет собой слагаемое, а можно считать, что каждый столбец представляет собой слагаемое. Скажем, средний рисунок в верхней строке по горизонтали читается как $4+1$, а по вертикали как $2+1+1+1$. Горизонтальные чтения дают всевозможные разбиения 5 на суммы из не более чем 3 слагаемых, а вертикальные — всевозможные разбиения 5 на суммы из слагаемых, не превосходящих 3.

Надо только объяснить, почему так будет получаться в общем случае. Это делается так. Фигуру из клеток (внутри прямого угла на клетчатой бумаге, как на рисунке) называют *диаграммой Юнга*, если она вместе с каждой клеткой содержит все клетки слева и снизу вплоть до границы угла («монотонна вниз и влево»). Отсюда следует, что каждая строка сплошная и начинается с левого края (монотонность влево), а также что длины строк неубывают, если брать строки снизу вверх (монотонность вниз). Наоборот, если у нас есть сумма из неубывающих слагаемых, то её можно изобразить фигурой из строк неубывающей длины.

Эти (очевидные) соображения показывают, что *разбиения числа n на слагаемые соответствуют диаграммам Юнга из n клеток*: у нас есть соответствие между разбиениями и диаграммами (описанное выше). Точнее, у нас есть два таких соответствия — по горизонталям и вертикалям.

Теперь рассмотрим диаграммы Юнга из 5 клеток *высоты не более* 3. Тогда при чтении их по горизонтали они соответствуют представлениям числа 5 в виде суммы не более чем 3 слагаемых, а при чтении по вертикали они соответствуют представлениям числа 5 в виде суммы любого числа слагаемых (ширина не ограничивается), не превосходящих 3. Поэтому тех и других представлений одинаковое число.

Это рассуждение годится для любых n и k. ◁

• Напомним, что мы считаем разбиения на слагаемые без учёта порядка слагаемых — чтобы избежать повторного счёта, мы предполагаем, что слагаемые идут в неубывающем порядке.

7.1.2. Числа Каталана

Много интересных биекций можно построить для разных определений чисел Каталана. Напомним, что мы рассматривали (задача 3.15) произведение n сомножителей, и считали, сколькими способами можно расставить в нём скобки, указывающие порядок действий (переставлять сомножители не разрешается). Это число способов, как мы уже упоминали, называется *числом Каталана* и обозначается C_{n-1} (так принято, так что C_4 — это число способов расставить скобки в произведении пяти сомножителей, а не четырёх).

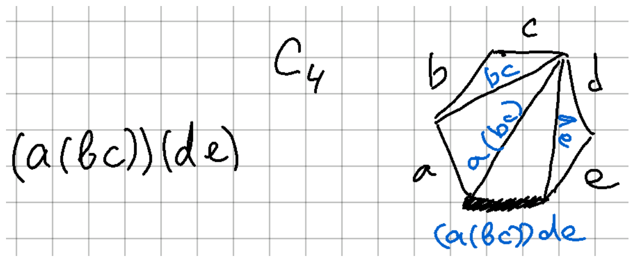
$\boxed{\mathbf{7.2}^*}$ Докажите, что C_4 равно числу способов разрезать выпуклый 6-угольник диагоналями на треугольники, и вообще C_n равно числу способов разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник диагоналями на треугольники.

• Скажем, четырёхугольник можно разрезать двумя способами (по одной диагонали и по другой) — и это соответствует C_2, или числу способов перемножить три множителя.

Важное уточнение: мы рассматриваем разрезания данного n-угольника, поворачивать его не разрешается (так что разрезания по разным диагоналям считаются разными разрезаниями).

▷ Можно также понять, сколько нужно диагоналей и сколько получится треугольников. Каждое разрезание увеличивает число частей на единицу, так что число треугольников на 1 больше числа диагоналей (вначале была одна часть). Если провести все диагонали из одной вершины, то будет $n-3$ диагоналей и $n-2$ треугольников. Но из подсчёта углов следует, что число треугольников не зависит от способа разрезания: сумма углов всех треугольников должна равняться сумме углов многоугольника, как ни разрезай. Так что при любом разрезании n-угольника будет столько же треугольников и диагоналей ($n-2$ и $n-1$ соответственно). ◁

▷ Выберем (произвольно) одну из сторон шестиугольника и объявим её «основанием», а на остальных сторонах напишем по часовой стрелке сомножители a, b, c, d, e. Тогда, отрезая треугольник, можно перемножать числа на его сторонах и писать произведение на третьей стороне. В конце концов на основании появится произведение всех чисел (с некоторым порядком действий, то есть с некоторой расстановкой скобок).



Наоборот, если есть какой-то порядок действий, то можно взять самое внешнее умножение, посмотреть, какие буквы слева и какие справа, и соединить основание с соответствущей точкой треугольником.

Аналогичное рассуждение годится для любого n: если сомножителей $n+1$, то сторон будет $n+2$ (стороны, на которых пишут сомножители, и основание). ◁

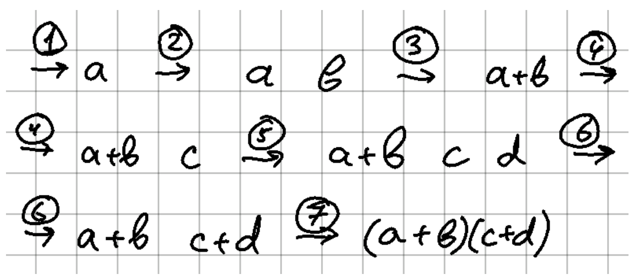
▷ Дотошные люди попросят тут доказать, что действительно возникает взаимно однозначное соответствие. Хотя это и выглядит очень правдоподобно после рассматривания рисунка и других примеров, строгое доказательство прежде всего потребовало бы формального определения понятий «расстановка скобок для указания порядка дейтсвий» и «разрезания многоугольника на треугольники», что совсем не так просто (не зря в школьном курсе про многоугольники говорят без точных определений), так что мы не будем этого делать. Аналогичным образом в следующей задаче мы тоже позволим себе описать соответствие неформально и декларировать его взаимную однозначность. ◁

$\boxed{\textbf{7.3}^*}$ Докажите, что C_n равно количеству двоичных слов длины $2n$ из n нулей и n единиц, в которых каждый начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.

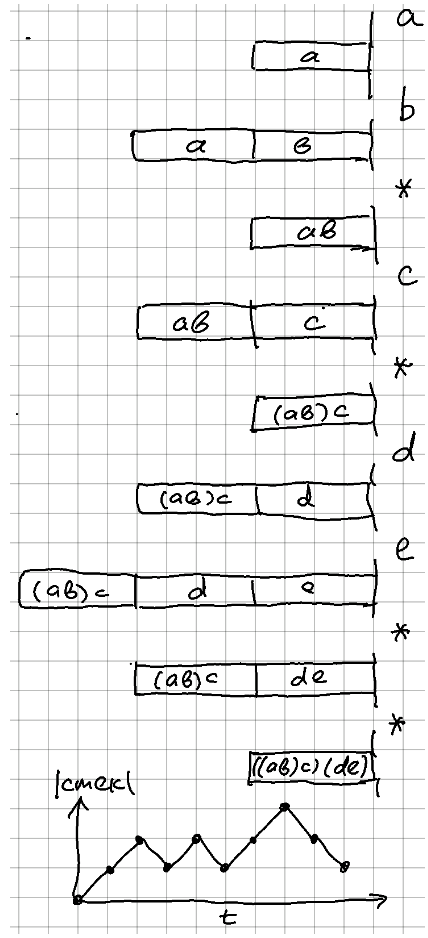
▷ Нужная для этого доказательства биекция устроена довольно хитро, и её скорее можно заметить саму по себе, чем придумать, решая эту задачу.

Мы начнём издалека. Когда-то выпускались «стековые калькуляторы», которые позволяли вычислять арифметические выражения в «обратной польской записи» (название объясняется тем, что такую запись рассматривал польский логик Лукасевич). В этой записи знаки арифметических действий пишутся не между выражениями, над которыми действие производится, а после них. Скажем, $a+b$ записывается как $ab+$, а $(a+b)\cdot(c+d)$ записывается как $ab+cd+*$ (звёздочка обозначает умножение). Со скобками это бы выглядело как $((ab+)(cd+)*)$, но скобки мы не пишем.

Замечательное свойство таких обозначений состоит в том, что в них для указания порядка действий скобки и не нужны. Такое выражение можно вычислять с помощью «стекового калькулятора», читая слева направо. (1) Видя число a, мы кладём на стол листок с этим числом. Затем, (2) видя b, мы кладём справа от a листок с числом b. (Можно было бы класть поверх, тогда бы это лучше соответствовало английскому слову *stack* (стопка), но для рисования удобнее слева направо). Затем, (3) видя операцию $+$, мы заменяем два правых листка одним, записывая на нём сумму (теперь стек имеет длину 1. Затем (4) мы кладём c справа, (5) d ещё правее, потом (6) выполняем операцию сложения с двумя правыми листками (c и d), заменяя их на один листок с $c + d$, и, наконец, (7) заменяем листки с $(a + b)$ и $(c + d)$ на один листок с $(a + b)(c + d)$, выполняя команду умножения.



А вот что получится для некоммутативного произведения:



Внизу нарисован график зависимости длины стека от времени.

К чему всё это? Рассматривая эти картинки и пробуя другие варианты, можно убедиться что *если записать выражение в обратной польской записи и потом понимать его как последовательность команд для стекового калькулятора, то калькулятор вычислит как раз такое выражение.*

Заметим, что в польской записи переменные идут в том же порядке, что и в обычной, поэтому если мы фиксировали порядок переменных, то можно не писать имена переменных, а вместо них писать p (от слова “push” — поместить новое число в стек). Таким образом, *всякому способу вычисления произведения соответствует последовательность символов p и $*$, где число букв p равно числу сомножителей, а число звёздочек на единицу меньше.* Каждое p увеличивает длину стека на 1, а каждая звёздочка уменьшает на 1, вначале длина равна нулю, потом всегда положительна, а в конце 1.

Последнее соображение показывает также, что *любой начальный отрезок* *последовательности содержит больше букв p, чем звёздочек.*

Наконец, решающее замечание: *всякой последовательности из m букв p и $m-1$ звёздочек, в котором любой начальный отрезок содержит больше букв, чем звёздочек, соответствует способ вычисления произведения m сомножителей*. В самом деле, если мы заменим m букв p на сомножители (в том порядке, в котором они идут), а затем будем понимать это как последовательность команд стекового калькулятора, то стек никогда не станет пустым, а перед звёздочкой в нём будет минимум два элемента (иначе вместе с этой звёздочкой было бы поровну букв и звёздочек), так что умножение выполнимо.

Осталось заметить, что наше условие про начала последовательности гарантирует, что сначала стоит буква p. Если её убрать, то остаток последовательности содержит $m-1$ букв p и $m-1$ звёздочек, и любой начальный отрезок содержит *не меньше* букв, чем звёздочек. Взяв $m = n+1$ и заменив буквы и звёздочки на единицы и нули, мы получим *взаимно однозначное соответствие между способами вычислить произведение $n+1$ сомножителей и последовательностями из n нулей и n единиц, в которых любой начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.*

Что и требовалось в задаче. ◁

• На графике длины стека (снизу на рисунке) единицы, они же буквы p, сооответствуют участкам подъёма (вектор $(1,1)$), а нули, они же звёздочки, соответствуют участкам спуска (вектор $(1,-1)$). Другими словами, число Каталана C_n равно числу ломаных такого вида (с наклоном ± 1, повороты в вершинах клеток), идущих из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$ и не доходящих до оси абсцисс.

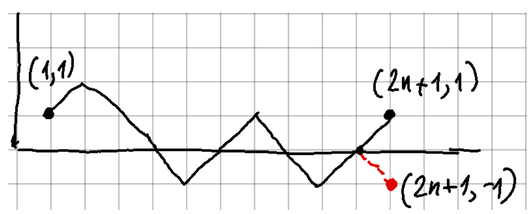
• Глядя на эти ломаные, можно доказать рекуррентную формулу для их числа — и убедиться, что эта та же формула, что и для чисел Каталана. Останется сравнить первые члены и заключить, что все члены совпадают (тем самым получив другое решение предыдущей задачи). Рекуррентную формулу можно получить так: посмотрим, в каком месте ломаная первый раз обращается в нуль (какое минимальное начало имеет поровну нулей и единиц), и разобьём ломаные на такие группы. Если это место фиксировано (скажем, после $2k$ членок последовательности — их чётное число, так как нулей и единиц поровну), то до и после этого места последовательность строится независимо. После него C_{n-k} вариантов (потому что это та же задача меньшего размера), а до него C_{k-1} (потому что участок до начинается с 1 и кончается 0, остаётся выбрать промежуток между ними).

7.1.3. Метод отражений и формула для чисел Каталана

Оказывается, можно построить ещё одно взаимно-однозначное соответствие и с его помощью найти явную формулу для чисел Каталана. Мы уже видели, что надо подсчитать число ломаных из $(1,1)$ до $(2n+1,1)$, *целиком идущих* (строго) *выше оси абсцисс*. Если отбросить это последнее условие, то число ломаных равнялось бы числу последовательностей из n нулей и n единиц, то есть C_{2n}^{n}. Теперь из этого числа надо вычесть ломаные, *доходящие* до оси абсцисс — и их число можно найти, построив взаимно однозначное соответствие. (Говоря о ломаных, мы всюду имеем в виду ломаные с наклоном ± 1, идущие по диагоналям клеток.)

$\boxed{\mathbf{7.4}^{*}}$ Постройте взаимно однозначное соответствие между ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$, доходящими до оси абсцисс (в том числе пересекающими её), и *всеми* ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$.

▷ Тут помогает зеркальное отражение относительно оси абсцисс.



Для каждой ломаной в $(2n+1,1)$ доходящей до оси абсцисс, возьмём последний момент времени, когда она на оси абсцисс, и участок справа от этого момента отразим зеркально. Новая ломаная будет вести в $(2n+1,-1)$.

Опишем обратное преобразование. Любая ломаная из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$ должна пройти через ось абсцисс (возможно, несколько раз). Возьмём самый правый из этих моментов времени, и отразим зеркально участок ломаной справа от него. Получим ломаную, ведущую в $(2n+1,1)$.

Почему эти преобразования взаимно обратны (применив одно и потом другое, мы получим исходную ломаную)? Это следует из того, что при обоих преобразования последняя точка ломаной на оси абсцисс не меняется, и потому симметрии подвергнется тот же участок ломаной, только в обратную сторону. Тем самым мы получаем искомое взаимно однозначное соответствие. ◁

• Можно было бы брать не самый правый момент времени, а, скажем, самый левый (или вообще выбирать по любому правилу из всех моментов пересечения какой-то один: моменты пересечения при отражении не меняются).

Теперь уже легко указать формулу для чисел Каталана.

$\boxed{\mathbf{7.5}^*}$ Докажите, что $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$

▷ Число ломаных из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$ равно числу последовательностей длины $2n$ с $(n-1)$ единицами и $(n+1)$ нулями, то есть C_{2n}^{n-1}. Остаётся выполнить вычитание:

$$C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!}\cdot\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{1}{n+1} = C_{2n}^n/(n+1)$$

и получить искомый ответ. ◁

Мы привели только несколько примеров, когда построение взаимно однозначного соответствия позволяет найти число элементов в интересующем нас множестве. Есть целый список таких задач (R. Stanley, `https://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf`) разной сложности, включая некоторые нерешённые. Но, пожалуй, даже более удивительно то, что иногда можно найти ответ совсем другими методами — и сейчас мы приведём несколько (самых простых) примеров такого рода.

7.2. Производящие функции

Перечислительная комбинаторика удивительным образом связана с другими разделами математики. Мы уже видели (в разделе 3), что числа сочетаний можно определить как коэффициенты многочлена $(1+x)^n$, и это сразу же позволяет получить разные следствия, скажем, найти сумму $\sum_{k=1}^n 2^k C_n^k$ (задача 5.13), или найти сумму квадратов всех C_n^k при данном n (задача 5.16). Если немного знать анализ и уметь дифференцировать многочлены, можно легко получить ещё несколько следствий.

$\boxed{\mathbf{7.6}^*}$ Какое тождество получится, если продифференцировать биномиальное разложение для $(1+x)^n$?

▷ Получится

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1},$$

потому что производная от x^k равна kx^{k-1}, а от $(1+x)^n$ равна $n(1+x)^{n-1}$ (сдвиг на 1 аргумента сдвигает и производную). ◁

Можно подставить $x = 1$ и получить тождество

$$n2^{n-1} = 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n,$$

но его и без этого легко понять. (Мы добавили для красоты и C_n^0 с нулевым коэффициентом.)

$\boxed{\mathbf{7.7}^*}$ Как доказать это равенство без дифференцирования?

▷ Поскольку треугольник Паскаля симметричен ($C_n^k = C_n^{n-k}$), то коэффициенты k и $n-k$ при равных числах сочетаний можно заменить на их среднее $n/2$, получится $(n/2) \cdot \sum_k C_n^k = (n/2)2^n = n2^{n-1}$. ◁

• Другие — не столь очевидные — тождества получатся, если подставить не $x = 1$, а, скажем, $x = -1$ или $x = -2$.

Дифференцирование можно применять и дальше.

$\boxed{\mathbf{7.8}^*}$ Найдите сумму

$$0^2 \cdot C_n^0 + 1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + n^2 \cdot C_n^n.$$

▷ Можно второй раз продифференцировать бином, но тогда в правой части получится сумма членов $k(k-1)C_n^k x^{k-2}$, и если подставить $x = 1$, то получится не совсем искомая сумма (вместо k^2 будет $k(k-1)$). Это не страшно, так как разницу мы уже знаем, но можно перед вторым дифференцированием умножить обе части на x:

$$nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \ldots + nC_n^n x^n,$$
$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)(1+x)^{n-2} = C_n^1 + 2^2 C_n^2 x + 3^2 C_n^3 x^2 + \ldots + n^2 C_n^n x^{n-1},$$

и теперь уже можно подставить 1 и получить ответ $n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$. ◁

• Повторяя тот же приём (умножение на x и дифференцирование), мы можем вычислить суммы вида $\sum_k k^3 C_n^k$, $\sum_k k^4 C_n^k$ и так далее. Удобно ввести операцию D на функциях, которая дифференцирует их и потом умножает на x, так что $D(x^n) = nx^n$, и применять её несколько раз. (Символически можно написать $D = x\frac{d}{dx}$.)

Говорят, что $(1 + x)^n$ является *производящей функцией* для биномиальных коэффициентов. Вообще производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

— бесконечный, если в последовательности бесконечно много ненулевых членов.

• Какой смысл имеют бесконечные ряды и какие действия по каким правилам с ними можно выполнять — вопрос сложный. Мы сейчас не будем в это вдаваться, и действовать с ними как если бы они были конечными (на самом деле наши действия можно оправдать, если разобраться).

Пусть p_n — число разбиений целого $n \geqslant 0$ на положительные целые слагаемые (без учёта порядка слагаемых). Мы полагаем $p_0 = 1$ (можно условно сказать, что число 0 можно единственным образом представить в виде суммы целых положительных слагаемых, взяв сумму из нуля слагаемых). Производящую функцию для p_n можно разложить в бесконечное произведение (мы это уже упоминали, говоря о пентагональной теореме Эйлера в разделе 3):

$\boxed{\textbf{7.9}^*}$ Докажите, что $p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n+\ldots$ можно представить как

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)\ldots$$

Здесь в k-й скобке стоит $1+x^k+x^{2k}+\ldots$, то есть использованы все степени, кратные k (начиная с нулевой).

▷ Прежде всего заметим, что если нас интересует коэффициент при каком-то x^n, то скобки далеко справа не нужны (умножение на такую скобку добавляет только бо́льшие степени и не влияет на этот коэффициент). Поэтому реально получается конечная сумма, смысл которой ясен и без дополнительных определений.

Чтобы получить в произведении множитель x^n, надо всевозможными способами выбрать из скобок члены, произведение которых равно x^n, то есть сумма степеней равна n. Это значит, что n надо представить в виде

$$\begin{aligned}&(\text{целое неотрицательное число})\,+\\+\,&(\text{целое неотрицательное число, кратное 2})\,+\\+\,&(\text{целое неотрицательное число, кратное 3})\,+\;\ldots\end{aligned}$$

Целое неотрицательное число, кратное k, однозначно разбивается на слагаемые, равные k, и мы получаем представление n в виде суммы целых положительных слагаемых. Каждое представление получается один раз, так как в нём можно однозначным образом сгруппировать слагаемые, равные 1, потом слагаемые, равные 2 (получив кратное 2) и так далее. ◁

• Другими словами, p_n есть количество решений уравнения $n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \ldots$ в целых неотрицательных числах (почти всех равных нулю).

$\boxed{\mathbf{7.10}^*}$ Что изменится, если оставить в каждой скобке по два члена и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots$$

— производящая функция какой последовательности задаётся таким произведением?

▷ Получится производящая функция для числа разбиений на *различные* целые положительные слагаемые. ◁

$\boxed{\mathbf{7.11}^*}$ Что изменится, если оставить в произведении предыдущей задачи только степени двойки и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^k})\ldots$$

▷ Получится

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

(производящая функция для последовательности из одних единиц). В самом деле, разложение в двоичной системе показывает, что всякое натуральное число можно однозначно представить в виде суммы различных степеней двойки. ◁

▷ Можно пойти дальше и «вычислить» сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

мы это упоминали, говоря о пентагональной теореме, но в данный момент это нам ни к чему. ◁

$\boxed{\mathbf{7.12}^*}$ Докажите, что *число разбиений на нечётные слагаемые равно числу разбиений на различные слагаемые.*

• Мы рассматриваем разбиения какого-то целого положительного числа в n сумму целых положительных слагаемых (без учёта порядка) с двумя видами ограничений: (а) все слагаемые нечётны; (б) все слагаемые различны. (Скажем, при $n = 6$ получаем разбиения $5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$ для нечётных слагаемых и 6, $5+1$, $4+2$, $3+2+1$ для различных слагаемых.)

▷ Всякое целое положительное число можно однозначно представить в виде произведения нечётного числа и степени двойки (вынося двойки, пока возможно). Будем (временно, в этой задаче) называть этот нечётный множитель «базой» исходного числа. Все целые положительные числа можно поделить на группы с данной базой:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \ldots), (3, 6, 12, 24, 48, \ldots), (5, 10, 20, 40, 80 \ldots), (7, 14, 28, 56, \ldots), \ldots$$

Таким же образом можно сгруппировать сомножители в бесконечном произведении

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots,$$

получится произведение бесконечных произведений

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^k})\ldots\\
&(1+x^3)(1+x^6)(1+x^{12})\ldots(1+x^{3\cdot 2^k})\ldots\\
&(1+x^5)(1+x^{10})(1+x^{15})\ldots(1+x^{5\cdot 2^k})\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Первое из этих произведений мы уже видели и знаем, что оно равно

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

Второе получается из первого заменой x на x^3 и потому равно

$$1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + \ldots,$$

третье равно

$$1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + \ldots,$$

и так далее. Получается часть бесконечного разложения для производящей функции произвольных разбиений, соответствующая разбиениям на нечётные слагаемые, что и требовалось. ◁

Это рассуждение выглядит удивительно (и требует обоснования законности наших действий), но его (в отличие от многих других рассуждений с производящими функциями) можно перевести на язык взаимно однозначных соответствий.

$\boxed{\textbf{7.13}^*}$ Пусть n — целое положительное число. Постройте взаимно однозначное соответствие между разложениями n на нечётные слагаемые и разложениями n на различные слагаемые.

▷ Возьмём разложение n на различные слагаемые. Каждое слагаемое заменим на много раз повторённую его базу (см. выше), получим разложение n на нечётные слагаемые. В другую сторону: если есть представление n как суммы нечётных слагаемых, сгруппируем равные слагаемые. Для каждого нечётного s получится некоторое кратное числа s, которое мы заменяем на сумму подходящих слагаемых среди $s, 2s, 4s, 8s, \ldots$ (разложив в двоичной системе множитель кратности), и получатся различные слагаемые. Несложно убедиться, что эти два преобразования взаимно обратны. ◁

7.14* Покажите, что производящая функция для чисел Фибоначчи

$$T(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$$

удовлетворяет соотношению

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1$$

(если перемножить формально и привести подобные члены в бесконечной сумме).

▷ Первые несколько членов в произведении можно просто вычислить, и там всё сократится, кроме 1. Закон построения чисел Фибоначчи гарантирует, что и дальше всё будет сокращаться: мы умножаем 1 на $F_n x^n$, и вычитаем произведения x на $F_{n-1}x^{n-1}$ и x^2 на $F_{n-2}x^{n-2}$. ◁

▷ Отсюда можно заключить (особенно если забыть о смысле и обоснованиях), что $T(x) = 1/(1-x-x^2)$. Дальше можно разложить $(1-x-x^2)$ на линейные множители и затем разложить дробь типа $1/(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, как говорят математики, *в сумму простейших*, то есть в сумму $a_1/(x-\alpha_1) + a_2/(x-\alpha_2)$. Для этого полезно временно заменить числитель на $(x-\alpha_1)-(x-\alpha_2)$. После этого можно вспомнить, что дроби вида $1/(x-a)$ разлагаются в ряд, и получится формула для чисел Фибоначчи с суммой двух геометрических прогрессий. ◁

7.15* Используя определение чисел Каталана с помощью рекуррентной формулы $C_0 = 1$,

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_kC_{n-1-k} + \ldots + C_nC_0,$$

напишите тождество для производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \ldots$$

(в него войдёт её квадрат).

▷ Возведя ряд в квадрат, мы увидим, что в $(C(x))^2$ будут те же коэффициенты, но со сдвигом: C_n будет коэффициентом при x^{n-1}. Поэтому

$$C(x) = 1 + x(C(x))^2.$$

(умножение на x компенсирует сдвиг коэффициентов). ◁

▷ Отсюда можно найти выражение с корнем для $C(x)$ по формуле квадратного уравнения. Если затем применить формулу бинома для этого квадратного корня (с полуцелым показателем), то можно получить формулу для чисел Каталана, которую мы доказали другим способом, с отражением ломаных. ◁

7.3. Комбинаторика и вероятности

Часто комбинаторные задачи формулируют в вероятностных терминах. Объясним на примере, как это делается.

Рассмотрим *вероятностный эксперимент*, состоящий в том, что мы трижды бросаем игральную кость и записываем, какое число (от 1 до 6) выпало. *Исходом* (результатом) такого эксперимента будет последовательность из трёх чисел от 1 до 6 (трёхбуквенное слово в шестибуквенном алфавите).

$\boxed{\textbf{7.16}^*}$ Считая все исходы равновероятными, определить вероятность событий «выпали три шестёрки», «выпала ровно одна шестёрка», «выпала хотя бы одна шестёрка».

• Другими словами, нужно найти отношения числа «благоприятных исходов» (подпадающих под описание события) к общему числу возможных исходов.

▷ Всего исходов $6^3 = 216$, «три шестёрки» — один из них, так что на первый вопрос ответ $1/216$.

Посчитаем исходы, где выпала ровно одна шестёрка. Они делятся на три группы — шестёрка на первом, втором и третьем месте. Если на первом месте шестёрка, а больше шестёрок нет, то для второго и третьего места есть 5^2 вариантов. Аналогично для всех других мест, в итоге получаем ответ $(3 \cdot 5^2)/216 = 75/216 \approx 34{,}7\%$

Наконец, надо подсчитать исходы, где есть хотя бы одна шестёрка. Тут проще посчитать дополнение — исходы, где нет ни одной шестёрки. Их $5^3 = 125$, остальных $216 - 125 = 91$, и искомая вероятность равна $91/216 \approx 42\%$. ◁

Можно проверить свою вероятностную интуицию, попытавшись сначала угадать ответ, а потом проверить.

$\boxed{\textbf{7.17}^*}$ Что вероятнее при шести бросаниях кубика — не выбросить ни одной шестёрки или выбросить хотя бы одну шестёрку?

▷ Вероятность не выбросить ни одной шестёрки равна $5^6/6^6 \approx 33\%$, поэтому выбросить хотя бы одну шестёрку почти вдвое вероятнее. ◁

▷ Вероятность 1/6 часто объясняется как «один из шести раз». Если бы действительно каждый шестой раз (через пять неудач) выпадала бы шестёрка, то при шести бросаниях она была бы наверняка. Но на деле вероятность совсем не близка к 1 (хоть и больше 50%). ◁

Примерно так же можно посчитать вероятность разных событий, связанных с лотереями и т.п. Скажем, во времена СССР была лотерея «Спортлото»[13], в которой играющий покупал карточку за 30 копеек (=0,3 рубля), на которой были написаны числа от 1 до 49. Он должен был зачеркнуть шесть из этих чисел, и отправить билет организаторам до определённого дня. После этого дня происходил «тираж», вероятностный эксперимент, где с помощью «лототрона» выбирались шесть (различных) выигрышных номеров от 1 до 49. Билет был выигрышным, если было хотя бы три общих номера (если больше, то выигрыш был больше).

7.18* Найдите вероятность выиграть в «Спортлото» ровно с тремя выигрышными номерами.

▷ Всего исходов C_{49}^6. Исходов, где ровно 3 выигрышных номера, из них $C_6^3 C_{43}^3$ (надо выбрать 3 цифры из шести включённых в билет, а также 3 цифры из 43 не включённых в билет). Поэтому ответ будет $C_6^3 C_{43}^3 / C_{49}^6 \approx 1{,}7\%$. ◁

Во многих случаях комбинаторную задачу можно представить в вероятностных терминах.

7.19* Сто человек хотят уплатить по рублю, при этом у половины из них по рублёвой монете (оплата без сдачи), а у половины по двухрублёвой монете. Они становятся в очередь в случайном порядке. Какова вероятность того, что всем удастся расплатиться, если у кассира перед открытием кассы никакой сдачи нет?

▷ В каком случае им не удастся расплатиться? Если в какой-то момент у кассира не будет сдачи для очередного покупателя, то есть в начальном отрезке очереди от этого покупателя включительно больше двухрублёвых монет (которым нужен рубль сдачи), чем этих самых рублей. Поэтому количество благоприятных исходов (когда удалось расплатиться) — это число Каталана C_{50}, количество последовательностей нулей и единиц, у которых в любом начальном отрезке не меньше единиц, чем нулей, и оно равно $C_{100}^{50}/51$ при общем числе исходов C_{100}^{50}. Получаем, что искомая вероятность равна 1/51. ◁

---

[13]«Если вы не отзовётесь, мы напишем в Спортлото», пел Высоцкий.

• В этом решении есть деликатный момент. Оно предполагает, что исходом вероятностного эксперимента является последовательность из 50 рублей и 50 двухрублёвок. Вместе с тем слова «становятся в очередь в случайном порядке» естественно понимать иначе: исходом является перестановка клиентов, и их 100!. Но на ответ это не влияет: все перестановки разбиваются на группы, в которых результирующая последовательность монет общая, и в каждой группе $50! \cdot 50!$ монет (рублёвые монеты можно переставлять, и двухрублёвые тоже).

7.20* У Маши есть кубик, шесть граней которого окрашены в шесть разных цветов. Миша, будучи в гостях у Маши, решил сделать себе такой же кубик, и запомнил эти цвета (но не запомнил, как они располагались на кубике). Придя домой, он взял такой же кубик и случайным образом раскрасил его грани в те же шесть цветов. Какова вероятность, что у него получится точная копия кубика Маши? (Это значит, что кубик Миши можно так повернуть, чтобы цвета были точно такие же, как у Маши.)

▷ Исходами тут являются $6! = 720$ раскрасок кубика Миши. Надо понять, сколько из них благоприятных, то есть сколько разных кубиков можно получить вращениями кубика Маши. Это можно вычислить так: выберем какую-то одну грань кубика Маши. При вращении она может принять 6 положений, соответствующих шести граням кубика Миши. После того как положение этой грани фиксировано, есть четыре варианта поворота (при которых грань остаётся на месте, только поворачиваясь). Получаем ответ $6 \cdot 4/6! = 1/30$. ◁

▷ Математическая теория вероятностей не сводится к комбинаторике. Можно рассматривать неравновероятные исходы, или эксперименты с бесконечным числом исходов (где, скажем, исходом может быть точка на плоскости: «бросаем случайную точку в квадрат»). Помимо событий и вероятностей, центральную роль в теории вероятностей играют *случайные величины* и их *математические ожидания*. Даже если ограничиваться событиями, то появляется важное понятие *условной вероятности* и *независимости событий*.

На практике нас могут интересовать не точные значения вероятностей, а какие-то приближения для них, или оценки сверху. Скажем, получив какую-то астрономически малую вероятность для неблагоприятного стечения обстоятельств, мы можем это стечение обстоятельств не учитывать при планировании.[14] Одна из базовых верхних оценок — *закон больших чисел*. В простейшей ситуации он означает, что в дальних строках треугольника Паскаля основная

[14] А если оно потом произойдёт, например, потому, что наши вероятностные модели были неправильными, что ж — значит, случился «чёрный лебедь», как теперь модно говорить.

масса сосредоточена около их центра. Скажем, если мы просуммируем 1% всех чисел строки, стоящих в интервале вокруг середины, то их сумма составит больше 99% суммы всех чисел строки (соответствующей степени двойки). Можно изучать, как ведут себя числа в треугольнике Паскаля около середины — оказывается, что их график при правильном масштабе близок к графику функции $e^{-x^2/2}$ (гауссово, или нормальное распределение). И многое другое — мы привели только два простых примера.

В общем, математическая теория вероятностей — отдельная интересная наука, но начинается она с базовых комбинаторных задач, так что разобранные нами задачи — хорошее начало для знакомства с ней. $\triangleleft$

7.4. Литература

Материалы для школьников, популярные изложения

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев, *Введение в комбинаторику (по материалам лекций академика И. М. Гельфанда). Методические разработки для учащихся ВЗМШ*. Москва, 1989, `https://archive.org/details/combinatorics1989`

Сборник задач (часть с решениями), рассылавшийся ученикам Всесоюзной Заочной Математической Школы (организованной в середине 1960-х И. М. Гельфандом и его сотрудниками). Рассчитан на школьников с минимальной предварительной подготовкой.

В. А. Успенский, *Треугольник Паскаля*, 2-е изд., Москва, Наука, 1979 (Популярные лекции по математике, выпуск 43), `https://math.ru/lib/plm/43`.

По материалам лекции для школьников (в предисловии написано, что «Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы» — хотя это всё же небольшое преувеличение.) Начиная с рекуррентного определения треугольника Паскаля, Успенский обсуждает комбинаторный смысл его элементов, бином Ньютона и соотношения между биномиальными коэффициентами. (Попутно там поучительное обсуждение того, что значит «решить комбинаторную задачу».)

Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, Наука, 1969.

Разбираются разные комбинаторные задачи, большинство сформулировано в житейских терминах с элементами «оживляжа», но несмотря на такую «занимательность», разобрано много разных интересных (и не таких простых) вещей.

Н. Я. Виленкин, *Популярная комбинаторика*, Москва, Наука, 1975, https://math.ru/lib/book/djvu/combinatorika.djvu

Частично пересекается с предыдущей книгой (и сохраняет её стиль), но есть много нового материала, выходящего за рамки *перечислительной* комбинаторики.

Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, ФИМА, МЦНМО, 2006.

Содержит материалы двух предыдущих книг. Подготовлена к печати уже после смерти Н.Я. его сыном и внуком.

Журнал «Квант», http://www.kvant.info/, http://kvant.mccme.ru/

В разные годы публиковал много материалов о комбинаторике

С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс, *Математический дивертисмент*, Москва, МЦНМО, 2011.

Сборник рассказов на разные математические темы (в том числе комбинаторные); часть из них написана на основе статей авторов в «Кванте»ю

Е Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы*, Москва, МЦНМО, 2014, https://users.mccme.ru/smirnoff/papers/dubna14.pdf

Записки лекций, прочитанных в летней школе для школьников и студентов-младшекурсников.

Учебники для студентов и не только

Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Москва, Мир, 1990.

Классический учебник по перечислительной комбинаторике (первый том, переведённый на русский язык). Информация о втором томе и другие материалы: https://math.mit.edu/~rstan/ec/.

М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, Мир, 1970.

Не только перечислительная комбинаторика, но и многое другое.

С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях, 3-е изд., Москва, МЦНМО, 2007,
https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf

По материалам лекций, читавшихся автором в Независимом Московском университете.

Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика. Основание информатики*. Перевод Б. Б. Походзея и А. Б. Ходулёва под редакцией А. Б. Ходулёва. Москва, Мир, 1998,
`https://archive.org/details/Konkretnaya-matematika-Osnovaniye-informatiki-Grehem-Knut-Patashnik-1998`

Биномиальные коэффициенты и тождества для них — глава 5, производящие функции — глава 7.