8. Пентагональная теорема Эйлера

8.1. Формулировка

Мы уже упоминали (с. 23) пентагональную теорему Эйлера, которая утверждает, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\ldots$$

В правой части удивительным образом коэффициенты равны ±1, знаки чередуются парами, а степени получаются по формулам $k(3k \mp 1)/2$.

$\boxed{\mathbf{8.1}^*}$ Почему бесконечное произведение в левой части имеет смысл (не придётся складывать бесконечно много подобных членов)?

$\boxed{\mathbf{8.2}^*}$ Формула утверждает, что в бесконечном произведении все коэффициенты — плюс-минус единицы. Убедитесь, что для конечных произведений это не всегда так (могут появиться и другие коэффициенты, которые потом полностью или частично сократятся).

$\boxed{\mathbf{8.3}^*}$ Проверьте, что ту же самую формулу Эйлера можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

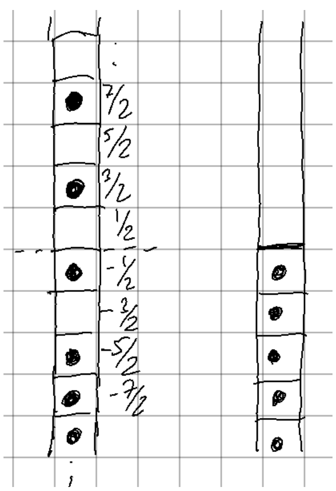
Одно из доказательств этой формулы использует комбинаторное соответствие, которое физики называют *бозонно-фермионным* — но его можно понять безо всякой физики (не считая терминологии).

8.2. Фермионы

Рассмотрим бесконечный вниз и вверх столб из коробок. Каждая коробка может быть пустой, или в ней может лежать шар (только один). При этом мы считаем, что все достаточно высокие коробки пусты, а все достаточно низкие (глубокие) заполнены. Будем называть такую конфигурацию (шаров в коробках) *состоянием*. Следуя физикам, будем называть коробки *уровнями*, а шары — *фермионами*. (Так называют частицы, которые не могут быть вместе на одном уровне, в отличие от *бозонов*, о которых ещё будет речь.)

Уровни можно нумеровать снизу вверх целыми числами, но нам будет удобно нумеровать их *полуцелыми* числами, и называть эти числа *энергией* фермиона на соответствующем уровне: у нас есть уровни с энергией $\ldots, -7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$. На рисунке слева показано состояние, где на положительных уровнях есть два фермиона с энергиями 3/2 и 7/2, а отрицательные уровни заполнены все, кроме одной дырки с энергией $-3/2$. На рисунке справа показано *основное состояние*, где все отрицательные уровни энергии заполнены, а все положительные — нет.

Из одного состояния можно получить другое, добавив шар, забрав шар или переложив шар с одного места на другое. Так можно перейти в любое другое состояние после конечного числа действий (напомним, что мы требуем, чтобы все достаточно высокие состояния были пусты, а все достаточно низкие заполнены).



$\boxed{\textbf{8.4}^*}$ Нельзя говорить об общем количестве фермионов в состоянии или об их общей энергии, потому что получаются бесконечные суммы. Но можно определить *разницу* в количестве фермионов или энергии для двух состояний. Какова эта разница для двух состояний на рисунке? Как её определить в общем случае?

$\boxed{\textbf{8.5}^*}$ Покажите, что разницы в предыдущей задаче (0.4) определены корректно в следующем смысле: если есть три состояния A, B, C, то разница между состояниями C и A равна сумме разниц между C и B и между B и A.

$\boxed{\textbf{8.6}^*}$ У какого состояния энергия минимальна?

Для удобства мы будем говорить о *количестве* фермионов или об *энергии*, приняв за точку отсчёта основное состояние, то есть в основном состоянии будем считать оба параметра равными нулю.

В отличие от энергии, количество фермионов (по сравнению с основным состоянием) может быть и отрицательным (возможно любое целое число).

Перекладывание шара (перемещение фермиона) с одного уровня на другой не меняет их количество, но меняет энергию (на некоторое целое число, разницы энергий между уровнями целые), добавление или удаление шара меняет и количество (на единицу), и энергию (на некоторое полуцелое число).

Разделяя положительные и отрицательные уровни, можно сказать, что число фермионов равно разнице между числом фермионов на положительных уровнях и числом дырок на отрицательных уровнях.

$\boxed{\textbf{8.7}^*}$ Как изменится число фермионов в состоянии, если всю конфигурацию сдвинуть (как единое целое) вверх на один уровень? (Заметим, что при этом она останется корректной в смысле хвостов.)

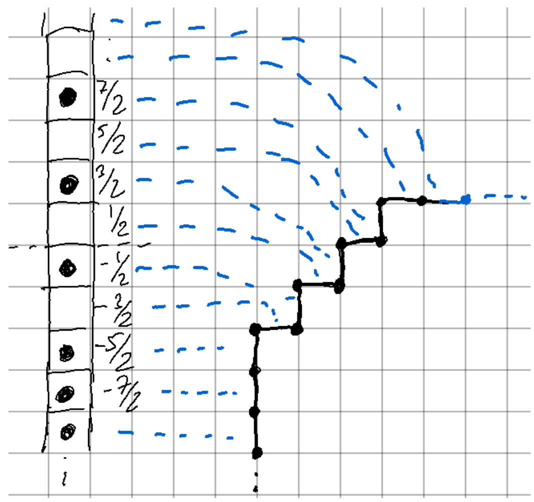
$\boxed{\textbf{8.8}^*}$ Как изменится энергия основного состояния после сдвига на N уровней вверх? Покажите, что то же самое изменение будет и для любого состояния с нулевым числом фермионов.

Всё сказанное даёт такую картину: если разбить состояния на классы, отличающиеся сдвигами, то в каждом классе есть одно «сбалансированное» состояние с нулевым числом фермионов, из которого все остальные получаются сдвигами: сдвиг на N вверх даёт состояние с N фермионами (поэтому состояния внутри класса можно однозначно задавать числом фермионов). Что касается энергий, то среди всех состояний класса минимальную энергию имеет состояние с нулевым числом фермионов, если сдвинуть его на N в любую сторону, то энергия возрастёт на $N^2/2$.

Классы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с диаграммами Юнга, и сейчас мы увидим, как это сделать.

8.3. Бозонно-фермионное соответствие

Пусть дано некоторое состояние, то есть способ заполнения уровней фермионами. Просматривая состояние снизу вверх, нарисуем ломаную на клетчатой бумаге: заполненный уровень соответствует шагу вверх, а пустой уровень соответствует шаг вправо.

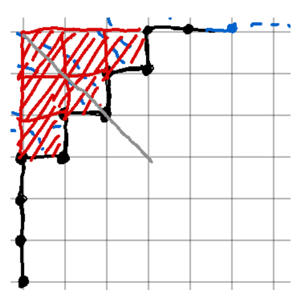


На картинке пунктиром показано, какой уровень какому звену ломаной соответствует.

Наше условие на состояния (что снизу с какого-то места всё заполнено, а сверху пусто) означает, что ломаная приходит вертикально снизу вверх, а уходит горизонтально вправо.

Наоборот, каждая такая ломаная из шагов вверх и вправо (приходящая вертикально снизу и уходящая горизонтально вправо) соответствует состоянию — вернее, состоянию с точностью до сдвига, потому что на ломаной не написано, где какие энергии. Чтобы задать состояние полностью, нужно ещё отметить, в каком месте ломаная переходит из зоны отрицательных энергий в зону положительных.

Глядя на такую картинку, хочется заделать откушенный угол, добавив недостающее:



Эта недостающая часть представляет собой диаграмму Юнга (мы говорили о них в разделе 7.1.1). Таким образом, каждому классу состояний (с точностью до сдвига) соответствует диаграмма Юнга, и это соответствие взаимно однозначно, как показывает следующая задача.

8.9* Как по диаграмме Юнга восстановить состояние (с точностью до сдвига)?

8.10* Какая диаграмма соответствует основному состоянию?

Несложно понять, где нужно поставить на ломаной точку перехода от отрицательных энергий к положительным, чтобы получить сбалансированное состояние (где фермионов сверху столько же, сколько дырок снизу) — ответ даёт следующая задача.

8.11* Докажите, что для сбалансированного состояния граница между отрицательными и положительными энергиями проходит на пересечении ломаной с биссектрисой прямого угла (которую мы заранее нарисовали).

- Такое пересечение единственно: каждый шаг вверх или вправо приближает нас к биссектрисе, пока мы её не достигнем, а потом отдаляет от неё.

Оказывается, что и энергия имеет ясный смысл в терминах диаграмм.

8.12* Докажите, что энергия сбалансированного состояния равна числу клеток в соответствующей диаграмме.

8.4. Производящие функции и тройное тождество

После этой подготовки можно начать двигаться в сторону тождеств и пентагональной теоремы. Заметим, что каждому состоянию s (размещению фермионов по уровням) соответствуют два числа: число фермионов $N(s)$ и энергия $E(s)$ — обе величины берутся в сравнении с основным состоянием. Число $E(s)$ — целое, а $N(s)$ — полуцелое. Бывает, что для каких-то двух разных состояний значения E и N совпадают, так что все состояния делятся на группы. Нас интересует, сколько состояний будет в каждой группе.

В терминах производящих функций можно сказать так. Рассмотрим бесконечную сумму

$$\sum_{s} q^{E(s)} z^{N(s)}, \tag{$*$}$$

в которой суммирование происходит по всем состояниям s, и приведём в ней подобные члены.

$\boxed{\textbf{8.13}^*}$ Чему будет равен коэффициент при $q^e z^n$ в получившейся формальной (двумерной) сумме?

$\boxed{\textbf{8.14}^*}$ Докажите, что бесконечная сумма ($*$) равна произведению

$$(1+q^{1/2}z)\cdot(1+q^{3/2}z)\cdot(1+q^{5/2}z)\cdot\ldots\cdot(1+q^{1/2}z^{-1})(1+q^{3/2}z^{-1})(1+q^{5/2}z^{-1})\cdot\ldots$$

• Это произведение состоит из двух бесконечных групп скобок. Его можно понимать так: мы «раскрываем скобки», то есть всевозможными способами выбираем в каждой скобке одно из слагаемых, причём неединицу можно выбрать только конечное число раз, и такие произведения складываем и приводим подобные члены. Заметим, что каждый неединичный множитель увеличивает степень q по крайней мере на $1/2$, так что подобных членов будет только конечное число.

В более компактной форме это бесконечное произведение можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)$$

Теперь вспомним о бозонно-фермионном соответствии и заметим, что в исходной сумме по всем состояниям можно сгруппировать состояния, отличающиеся сдвигом. Если мы знаем число частиц и энергию для сбалансированного состояния в этой группе, то после сдвига на N число частиц увеличится на N, а энергия увеличится на $N^2/2$. (Здесь N может быть любым целым числом; если оно отрицательно, то число частиц уменьшается, а энергия всё равно увеличивается.) Из одного слагаемого в сумме, соответствующего сбалансированному состоянию, получится двусторонний ряд слагаемых, получающихся из исходного умножением на

$$F=\sum_{N=-\infty}^{\infty} z^N q^{N^2/2}$$

Поэтому достаточно вычислить сумму для всех сбалансированных состояний, а потом результат умножить на F. А сбалансированные состояния в точности соответствуют диаграммам Юнга, у них число фермионов равно 0 (и переменную z в нулевой степени можно опустить), а энергия равна площади, так что сумма по сбалансированным состояниям равна

$$\sum_y q^{E(y)},$$

где сумма берётся по всем диаграммам Юнга, а $E(y)$ — число клеток (площадь) диаграммы y. В этой сумме коэффициент при q^e равен числу диаграмм Юнга из e клеток. Диаграммы Юнга из e клеток соответствуют разбиениям числа e на положительные слагаемые (как мы обсуждали в разделе 7.1.1), так что получается производящая функция для числа разбиений (задача 7.9), равная

$$(1+q+q^2+q^3+\ldots)(1+q^2+q^4+q^6+\ldots)(1+q^3+q^6+q^9+\ldots)\ldots$$

Суммируя бесконечные геометрические прогрессии, можно было бы записать последнее произведение как

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\ldots$$

но удобнее не выходить за пределы формальных рядов (избегая деления), так что можно умножить на обратное произведение

$$(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot(1-q^3)\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

чтобы оно сократилось с производящей функцией для числа разбиений. Собирая всё сказанное вместе, мы видим, что два различных способа вычисления суммы $(*)$ — непосредственный и с переходом к диаграммам Юнга — дают равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}z^N q^{N^2/2}$$

Это тождество для рядов объединяет в себе бесконечное число тождеств, соответствующих равенству коэффициентов левой и правой частей при $z^n q^e$ для всех пар (n,e), и называется «тройным тождеством Якоби».

▷ Это тождество было доказано Карлом Густавом Якобом Якоби (1804–1851) в 1829 году. Приведённое нами доказательство придумали ????? ◁

8.5. Доказательство пентагональной теоремы

Из тройного тождества легко вывести пентагональную теорему, надо только сделать несколько подстановок.

8.15* Что получится, если подставить в это тождество $z = -q^{-1/6}$?

Видно, что после такой подстановки в левой части есть три серии показателей степеней: целые положительные, они же минус 1/3 и они же минус 2/3.

8.16* Замените в этой формуле q на q^3, объедините эти три серии в одну и получите пентагональную теорему Эйлера.

• В этих рассуждениях мы свободно обращались с бесконечными суммами и произведениями, как если бы к ним были применимы обычные правила алгебры и не заботясь об обосновании этих действий. Но вообще-то тут недалеко и до абсурда. Скажем, если перемножать геометрические прогрессии и написать

$$\left(1+z+z^2+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{z}{1-(2z-z^2)},$$

затем в правой части воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии в обратную сторону, написав

$$-\frac{z}{1-(2z-z^2)}=-z(1+(2z-z^2)+(2z-z^2)^2+\ldots)=-z-2z^2-3z^3-\ldots,$$

а затем сравнить коэффициенты при разных степенях z в левой и правой части, то получится, что бесконечная сумма из единиц равна одновременно 0, −1, −2 и т. д. По-хорошему, конечно, надо внимательно следить, что все наши выражения имеют смысл (то есть что не получается бесконечного числа подобных членов) и что наши преобразования законны (скажем, что можно перемножать сомножители в любом порядке). Для нашего случая тут никаких принципиальных сложностей нет, но мы этого делать не будем.

После всего сказанного уже несложно понять, как связана пентагональная теорема с рекуррентным соотношением для чисел разбиений.

8.17* Выведите из пентагональной теоремы рекуррентное соотношение для количества T_n разбиений n на слагаемые

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

▷ Пентагональную теорему мы доказали, но кто такие бозоны? *Фермионы* для нас — шары, которые можно класть в коробки (уровни) с полуцелыми номерами (энергиями на соответствующих уровнях), причём в одну коробку помещается не больше одного шара (два фермиона не могут иметь одну энергию). Рассмотрим теперь столб из коробок, бесконечный только вверх (уровни 1, 2, 3, ...) и при этом разрешим в каждый ящик класть сколько угодно шаров. Шары нового типа будем называть *бозонами*. Легко понять, что размещения бозонов с общей энергией E соответствуют разбиениям числа E: каждый бозон на уровне k соответствует слагаемому, равному k (и таких слагаемых может быть несколько, как бозонов в одном ящике — или может не быть вообще). А такие разбиения соответствуют диаграммам Юнга. На этом языке основной шаг доказательства можно изложить так: *каждому размещению фермионов с точностью до сдвига взаимно однозначно соответствует размещение бозонов* с энергией, равной минимальной энергии размещений фермионов среди всех сдвигов.

Как рассказывают физики, все элементарные (на самом деле — не только элементарные) частицы делятся на *бозоны* и *фермионы*. Согласно их теориям, бозоны — частицы с целым *спином* — переносчики взаимодействий. Важнейшим из бозонов для нас является *фотон* (квант света). Бозоны могут занимать одно и то же состояние, например один и тот же уровень энергии, даже если этот уровень *невырожден* (одномерен). А фермионы — частицы материи — имеют полуцелый спин. Например таковы *электроны*, и они не могут занимать один и тот же уровень энергии.

Как уточняют математики, состояния и бозонов, и фермионов описываются элементами *векторных пространств*. Но состояние со многими бозонами одной природы описывается элементом *симметрической алгебры* бозонного векторного пространства, тогда как состояние со многими фермионами — элементом *внешней алгебры* фермионного.

Идея, что частицы делятся на два класса (бозоны и фермионы) принадлежит основоположникам квантовой механики — Вольфгангу Паули, Альберту Эйнштейну, Полю Дираку, Энрико Ферми и Шатьендранату Бозе. Дирак, предложив своё уравнение для частиц с полуцелым спином, столкнулся с проблемой: согласно этому уравнению, энергия электрона не ограничена снизу. Это противоречит интуиции, так как роняя электрон на достаточно глубокий уровень, можно было бы получать сколько угодно энергии. Дирак предположил, что все уровни с отрицательной энергией — кроме, быть может, конечного числа — уже заняты. Такая конфигурация называется *морем Дирака*. Отсутствие частицы на отрицательном уровне может быть также интерпретировано, как наличие (анти)частицы с положительной энергией, так как для создания такого состояния необходимо эту энергию потратить. Так Дирак предсказал существование *позитрона* (1929) — а к 1932 году эти самые позитроны уже были обнаружены, за что Карл Дэвид Андерсон получил нобелевскую премию 1936 года (Дирак получил свою в 1933 году).

А что сделали вы? ◁