Содержание

0. Предисловие

Идеалом, конечно, являются просто открытые для всех занятия по интересам, где отбор осуществляется просто тем, что более ленивые сами разбегутся.

А. Н. Колмогоров
о преподавании школьникам,
(из письма В. П. Эфроимсону,
опубликовал Оскар Шейнин)

Мы старались собрать задачи, которые традиционно решаются в «математических классах» (или, более официально, в «классах с углублённым изучением математики»). Сначала они довольно простые, но со временем доля сложных увеличивается. Некоторые более сложные (или не вполне по теме) задачи помечены звёздочками.

Мы советуем сначала попробовать решить задачу, не глядя в решение. Если получится — сравнить с решением (там могут быть и дополнительные комментарии). Если долго не получается, тоже можно подглядеть в решение и попытаться понять его идею и довести до конца (ну или прочитать полностью и разобраться).

В этом выпуске разбираются «задачи по комбинаторике»; в 2023–2024 годах эти задачи выкладывались (порциями) в социальных сетях по частям; были выложены также и видеоразборы большинства задач (см. таблицу в конце предисловия) — в качестве образцов «живой математической речи», со всеми оговорками, ошибками, повторами и т. п. (как обычно бывает, устный язык заметно отличается от письменного).

В подготовке текстов и видео участвовали: Руслан Ишкуватов, Татьяна Михайлова, Владимир Фок, Александр Шаповал, Александр Шень, Иван Яковлев.

* * *

Задачи, в которых требуется кого-то (или что-то) пересчитать, в школе называют «задачами по комбинаторике».[1] Конечно, если нужно по-

[1]Более подробное название — «перечислительная комбинаторика» (enumerative combinatorics).

считать буквы в русском алфавите[2] или картофелины в мешке, математика не поможет — надо взять и посчитать, ничего не поделаешь.

Но если нужно посчитать, сколько есть четырёхзначных чисел, цифры которых разные и идут в убывающем порядке (3210, 4210, 4310,..., 9876), уже не обязательно их все выписывать и пересчитывать. То же самое — если мы хотим узнать, сколько можно составить «слов» (не обязательно осмысленных) из пяти букв, имея три кубика с буквой А и два кубика с буквой Б и по-разному их располагая[3].

Мы разберём задачи подобного рода и способы их решения — по большей части несложные[4] — и начнём с совсем простых вопросов.

---

[2]На сегодняшний день (2023) в русском алфавите принято числить 33 буквы — хотя дело это не такое простое, как заметил Владимир Андреевич Успенский. Он обнаружил, что в одном и том же четвертом томе словаря русского языка в четырёх томах, выпущенного Институтом русского языка Академии наук СССР в 1984 году, буква «У» названа двадцатой буквой русского алфавита (с. 441), а буква «Э» — тридцать первой (с. 745). Понятно, в чём тут проблема и откуда она возникла? (В первом томе того же словаря приведён русский алфавит: «..., у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э,...».)

[3]Кстати, раз уж речь зашла о этих задачах: понятно ли, какое следующее число будет идти в этом списке за 4310 (в порядке возрастания) и какое число будет перед 9876? Или ещё: можете ли вы сказать, все ли варианты слов из пяти букв указаны в списке «БАБАА, АБААБ, АААББ, ББААА, БАААБ, ААББА, АББАА, БАБАА, БААБА»?

[4]Несмотря на свою репутацию: Лев Толстой в «Юности» писал «На экзамен математики я пришёл раньше обыкновенного. Я знал предмет порядочно, но было два вопроса из алгебры, которые я как-то утаил от учителя и которые мне были совершенно неизвестны. Это были, как теперь помню: теория сочетаний и бином Ньютона.» Это как раз два вопроса из гимназического курса алгебры, относящиеся к комбинаторике. В «Мастере и Маргарите» Булгакова Коровьев тоже говорит «Подумаешь, бином Ньютона!» — вероятно, имея в виду, что бином Ньютона дело сложное.

1. Начальные задачи	https://youtu.be/5Jf0g0nNl4U
дополнительные	https://youtu.be/Ajxb_ov7Kl0
2. Сложение и умножение	https://youtu.be/4TodqREEz2Q
дополнительные	https://youtu.be/CF4RmHkBFJ4
3. Рекуррентные формулы	https://youtu.be/GsOjciQ3cdc
дополнительные	https://youtu.be/WuyWr5t9vuw
4. Соответствия	https://youtu.be/OBQym5l-Bwg
дополнительные	https://youtu.be/HRIA9GL4JRE
5. Сочетания и бином Ньютона	https://youtu.be/rhHkVmKrIAY
дополнительные	https://youtu.be/hnp8vkTgIpM
6. Включения и исключения	https://youtu.be/fYYzBLn-uz8
7. Что дальше? (начало)	https://youtu.be/0ovJPofPUpI
(часть 2)	https://youtu.be/512d71kmhuY
Пентагональная теорема	https://youtu.be/8YlXeo9Bz9g

1. Начальные задачи

$\boxed{1.1}$ Напишем числа от 1 до 9, то есть $1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9$. Сколько их будет? Тот же вопрос для чисел от 1 до 99.

$\boxed{1.2}$ Напишем все двузначные числа от 10 до 99, то есть 10, 11, 12,…, 98, 99. Сколько их будет?

$\boxed{1.3}$ Сколько трёхзначных чисел (от 100 до 999)?

$\boxed{1.4}$ На термометре есть деления от -50 до $+50$ градусов (через один градус: -50, -49,…, -2, -1, 0, 1, 2,…, 49, 50). Сколько всего там делений?

$\boxed{1.5}$ Сколько чисел в ряду 17, 18, 19,…, 122, 123? Сколько чисел в ряду -17, -16,…, -1, 0, 1,…, 122, 123. Какая будет общая формула для количества чисел от m до n? (Сами m и n тоже включаются в этот ряд $m \ldots n$; мы считаем, что $m \leqslant n$.)

• Поначалу хочется сказать, что от m до n будет $n-m$ чисел — подобно тому, как от пятого километрового столба до двенадцатого будет $12 - 5 = 7$ километров, а между пятым и двенадцатым днём рождения пройдёт 7 лет. Но это не так — и эта ошибка даже имеет специальное название в программировании: “off-by-one error” (ошибка на единицу). Примерно ту же ошибку допустили те, кто считали, что третье тысячелетие началось в 2000 году: если считать, что первый год первого тысячелетия имел номер 1, то последний год второго тысячелетия имел номер 2000, а первый год третьего — 2001.

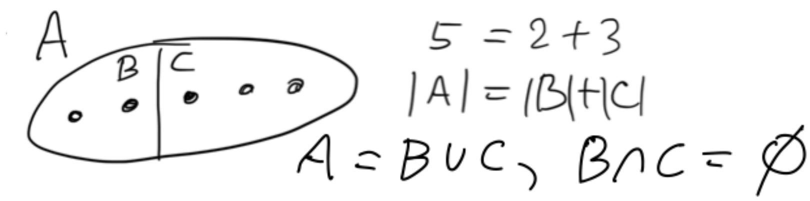
$\boxed{1.6}$ Человек поднимается с первого этажа на пятый за минуту. Сколько ему понадобится времени, чтобы с той же скоростью подняться с первого на десятый этаж?

• В этих подсчётах мы используем сложение и вычитание. Если в мешке есть красные и зелёные яблоки (и только), можно подсчитать отдельно число тех и других, а потом сложить эти числа и получить общее число яблок. Наоборот, если мы знаем общее число яблок в мешке, а также число красных яблок, то можно получить число зелёных яблок вычитанием. То же самое и в наших примерах: мы делили числа $1, \ldots, 99$ на две части: однозначные[5] от 1 до 9 и двузначные от 10 до 99. В первой группе 9 чисел, а всего чисел 99, так что во второй группе $99 - 9 = 90$ чисел.

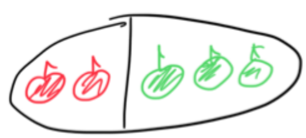
---

[5]Считать ли нуль (0) однозначным числом? Тут есть разные мнения: иногда говорят, что нуль однозначное число, потому что только одна цифра 0. Иногда однозначные числа начинают с 1 (и в этом тоже есть своя логика, потому что в других числах цифра нуль в начале не пишется). Мы будем это всегда оговаривать, чтобы не было путаницы.

▷ Математики говорят, что *множество* всех чисел $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ является *объединением* двух *непересекающихся подмножеств* $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ и $\{10, 11, \dots, 99\}$ и потому число элементов в нём равно сумме чисел элементов в этих подмножествах, и что это — определение сложения. Вообще, если конечное множество A есть объединение двух непересекающихся множеств B и C, то число элементов в A равно сумме числа элементов в B и C. На картинке можно это изобразить так:



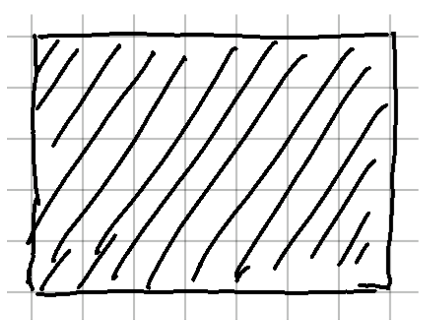
Здесь через $|A|$ обозначается число элементов в множестве A, через $B \cup C$ обозначается *объединение* множеств B и C (в которое входят те элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств B и C, через $B \cap C$ обозначается *пересечение* множеств B и C (те элементы, которые входят и в B, и в C), а $\varnothing$ — *пустое множество* (в котором нет элементов), так что $B \cap C = \varnothing$ означает, что в B и C нет общих элементов.



Впрочем, за всеми этими терминами скрываются те же самые красные и зелёные яблоки в мешке. ◁

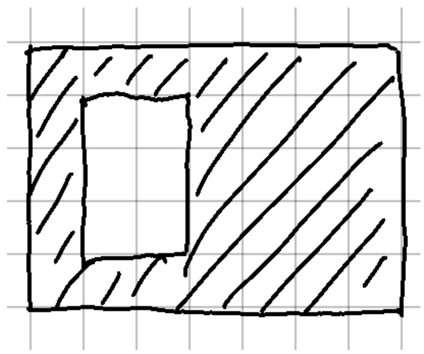
Иногда полезно не складывать, а умножать.

$\boxed{\textbf{1.7}}$ Сколько клеток попало в прямоугольник на рисунке?

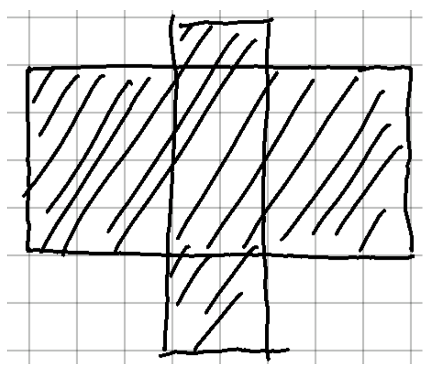


▷ Отсюда видно, что перестановка множителей не меняет произведения — как говорят математики, умножение *коммутативно* ($ab = ba$), равно как и сложение ($a + b = b + a$). ◁

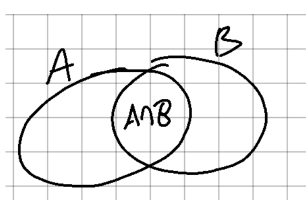
$\boxed{\textbf{1.8}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



$\boxed{\textbf{1.9}}$ Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



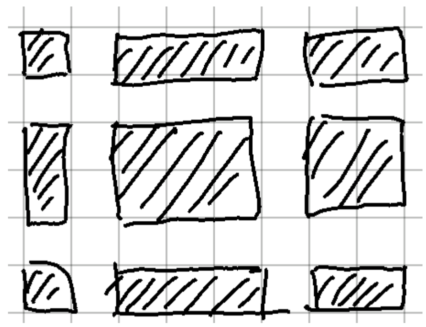
▷ Математики называют этот способ подсчёта *формулой включения и исключения*: чтобы подсчитать общее число элементов в в двух пересекающихся множествах, можно сложить числа элементов и вычесть элементы, посчитанные дважды.



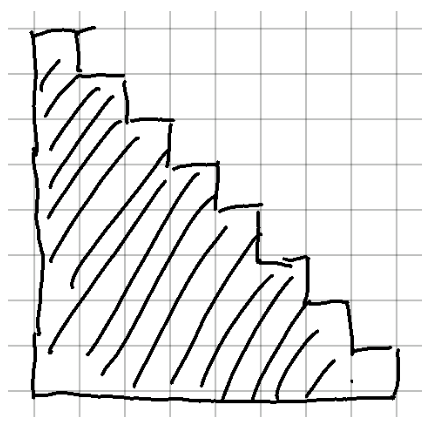
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Мы ещё вернёмся к этой формуле (и к её вариантам для большего числа множеств) в разделе 6. ◁

1.10* Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



1.11* Сколько клеток попало в заштрихованную часть на рисунке?



1.12 Числа от 1 до 100 поделили на нечётные $(1, 3, 5, 7, \ldots, 99)$ и чётные $(2, 4, 6, \ldots, 100)$. Сколько получилось чётных чисел?

▷ Математики говорят, что группировка нечётных и чётных чисел в пары задаёт *взаимно однозначное соответствие* между чётными и нечётными числами (среди $1 \ldots 100$). А если между множествами есть взаимно однозначное соответствие, то в них поровну элементов. ◁

Мы разобрали некоторые приёмы решения задач, к которым ещё вернёмся более подробно. А сейчас несколько более сложных задач — если они поначалу покажутся трудными, то ничего страшного.

$\boxed{\textbf{1.13}^*}$ Сколько есть двузначных чисел, в записи которых не используется цифра 0? Сколько есть двухзначных чисел, в записи которых используются только нечётные цифры (1, 3, 5, 7, 9)?

$\boxed{\textbf{1.14}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько цифр 7 при этом будет использовано? (Другими словами, сколько раз нам понадобится нажать на клавишу 7, набирая все эти числа на компьютере?)

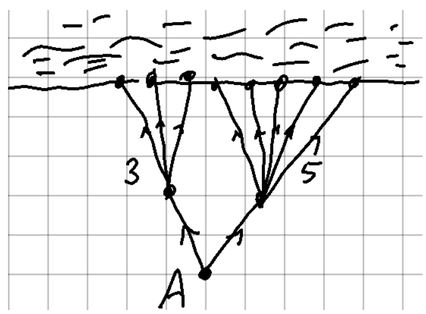
$\boxed{\textbf{1.15}^*}$ Выпишем все числа от 1 до 100. Сколько из них используют цифру 7 в своей записи? (Понятно, чем эта задача отличается от предыдущей?)

$\boxed{\textbf{1.16}^*}$ Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 3 нацело? (Это каждое третье число: 3, 6, 9, 12 и так далее.)

2. Сложение и умножение

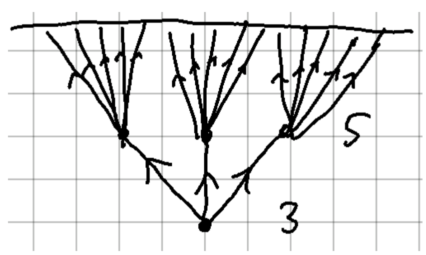
Мы уже видели, что при подсчётах количеств полезно складывать и умножать. Вот ещё несколько задач такого рода.

2.1 Из точки A к берегу ведут две дороги. Первая разветвляется на три, а вторая на пять. Сколькими способами можно пройти из A к берегу? (Идти обратно, удаляясь от берега, нельзя.)

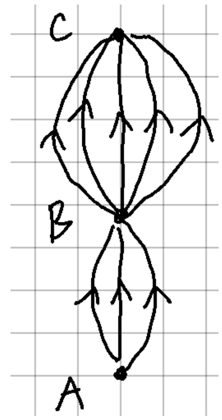


• Мы привели эту (очевидную) задачу, чтобы сравнить её со следующей.

2.2 Из точки A к берегу ведут три дороги. Каждая из них разветвляется на 5 (и дальше дороги доходят до берега, не пересекаясь). Сколькими способами можно пройти из A к берегу?

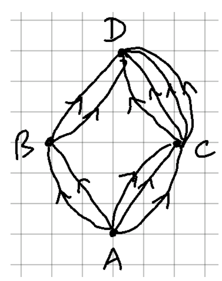


2.3 Из точки A в точку B ведут три дороги, а из точки B в точку C ведут пять дорог. Сколько есть способов добраться из A в C через B? (Возвращаться обратно нельзя.)



В некоторых задачах полезно и складывать, и умножать.

2.4 Сколькими способами можно пройти из A в D? Можно идти и через B, и через C, но возращаться нельзя (дороги односторонние, как показано стрелками).



• Представление разных вариантов в виде «путей» может быть полезно и в задачах, где изначально речи о путях нет.

2.5 Сколько «слов» (осмысленных и бессмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове `КОТ`?

• Можно представить себе, что буквы `К`, `О` и `Т` написаны на трёх кубиках, из которых мы составляем трёхбуквенное слово. Скажем, можно составить слова `ТОК` или `КТО`. Спрашивается, сколько разных слов (включая исходное слово `КОТ`) можно составить таким образом.

▷ Можно перебирать варианты иначе, рассуждая так: буква `К` может стоять на любой из трёх возможных позиций, так что все слова делятся на три типа `К**`, `*К*`, `**К` (звёздочками показаны ещё не определившиеся буквы). Для каждого типа букву `О` можно поставить вместо любой из двух звёздочек (два варианта), и после этого положение буквы T уже определяется однозначно. Получается такое же дерево (с ветвлением 3 в корне, 2 и 1 на следующих уровнях) и тот же ответ, но группы из двух слов другие: теперь, скажем, слова TKO и OKT попали в одну группу (где K на втором месте), а раньше они были в разных (начинающиеся на T и начинающиеся на O). ◁

2.6 Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны? Сколько трёхзначных чисел, у которых все цифры чётны?

▷ Было бы проще, если бы мы рассматривали все числа от 000 до 999, записывая их тремя цифрами, тогда бы нуль ничем не отличался от остальных цифр. Но что есть, то есть: под трёхзначными числами понимают числа 100, … , 999. ◁

2.7* Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть и чётные, и нечётные цифры?

2.8 Пусть в какой-то стране автомобильные номера состоят из двух латинских букв, за которыми идут 4 цифры. Сколько различных номеров может быть в такой стране? (Считаем, что в латинском алфавите 26 букв.[6])

Мы уже несколько раз использовали одни и те же рассуждения, которые можно сформулировать теперь в общем виде.

- Пусть мы хотим составить список из k позиций, на каждую из которых можно поместить любой из n элементов (без ограничений). Тогда это можно сделать n^k способами. То же самое иначе: если в алфавите n букв, то «слов» (осмысленных или нет) длины k будет n^k.

- Если мы дополнительно потребуем, чтобы все элементы списка были разными (один и тот же элемент не может быть использован повторно в другой позиции), то число таких списков будет

  $$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

  Вариант: столько будет слов длины k в алфавите из n букв, в которые никакая буква не входит дважды.

- Частный случай предыдущего при $n = k$: если каждую из n букв требуется использовать в слове (длины n) ровно один раз, то таких слов будет $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

[6]Это не всегда было так: когда-то в латинских текстах не использовали буквы J, U и W.

У этих ситуаций в русских учебниках есть традиционные названия. Вторая из них называется *размещения из n по k*, потому что мы размещаем какие-то из данных нам n элементов на k местах (первом, втором,..., k-м). Первая называется (немного странно) *размещениями с повторениями*. А последняя называется *перестановками n элементов*: мы переставляем алфавит из n букв в каком-то порядке.

Почему количества именно такие? В первом случае у нас k последовательных выборов, в каждом n вариантов, поэтому получается $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (k раз), то есть n^k. Во втором случае для первой буквы есть n вариантов, для второй $n-1$ (потому что первой буквы уже нет), для третьей надо выбирать из $n-2$ букв (кроме уже выбранной первой и второй), для четвёртой из $n-3$ и так далее до k-й буквы, где надо выбирать из $n-k+1$ (обратите внимание, что надо вычитать не номер буквы, а на единицу меньше: для четвёртой, скажем, было $n-3$ варианта, а не $n-4$). Всего получается $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

В случае перестановок мы доходим в произведении $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots$ до конца (до множителя 1 — последняя буква без вариантов). Это произведение называют *факториалом числа n* и обозначают

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

$\triangleright$ Математики в первом случае говорит о числе *отображений из k-элементного множества в n-элементное*, во втором — о числе *инъективных отображений из k-элементного множества в n-элементное*, в третьем — о числе *биективных отображений n-элементного множества в себя*. Смысл этих учёных терминов такой: отображение из k-элементного множества в n-элементное — это когда каждая из k позиций в списке отображается в занимающий её элемент, инъективность означает, что разные элементы отображаются в разные, а биективность — что имеется взаимно однозначное соответствие между позициями и элементами (все элементы разные и каждый элемент использован). $\triangleleft$

$\boxed{\textbf{2.9}}$ Пусть, говоря о перестановках, мы вместо «ровно один раз» сказали «каждая буква используется не более одного раза». Изменится ли от этого количество перестановок? А если мы сказали «каждая буква используется не менее одного раза»?

В задачах по комбинаторике, особенно школьных, часто вопросы о количестве объектов формулируются в бытовых терминах («оживляж»), и нужно вникнуть в формулировку (что именно мы подсчитываем? какие объекты считаются одинаковыми, а какие разными), чтобы узнать одну из описанных ситуаций. (Или констатировать, что задача более сложная и не сводится так сразу к готовым формулам.) Вот несколько простых примеров.

2.10 Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные и разные?

2.11 Компьютерная память хранит *двоичные слова длины* 64 — последовательности из 64 битов.[7] (Бит — это нуль или единица). Сколько разных двоичных слов бывает?

• Если знать про двоичную систему счисления, можно сказать, что каждое двоичное слово изображает целое число от 000 … 000 (нуль) до 111 … 111 ($2^{64}-1$), и таких чисел как раз 2^{64}.

2.12 В классе проведено три контрольные работы, при этом каждый ученик получил за каждую из работ одну из оценок $3, 4, 5$. Какое максимальное число учеников может быть в классе, если известно, что нет двух учеников с одинаковым набором оценок?

2.13 Кодовый замок имеет девять кнопок. Известно, что для открытия двери нужно набрать код из трёх различных кнопок в определённом порядке. Сколько разных вариантов такого кода может быть? Тот же вопрос, если кнопки в коде не обязаны быть разными.

2.14* (Продолжение) Тот же вопрос, если для открытия замка нужно нажать на три кодовые кнопки одновременно.

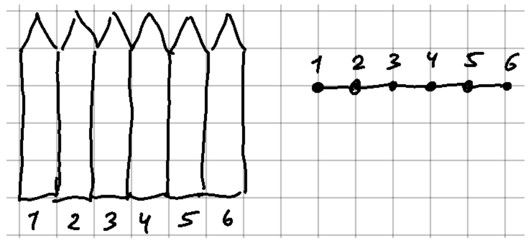
2.15* Сколько есть трёхзначных чисел, у которых все цифры нечётные, разные и идут в убывающем порядке. (Скажем, 751 годится, а 752, 775 или 375 — нет.)

2.16 Забор из 6 досок раскрашивают в 3 цвета, каждую доску в какой-то цвет, причём соседние доски должны иметь разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?

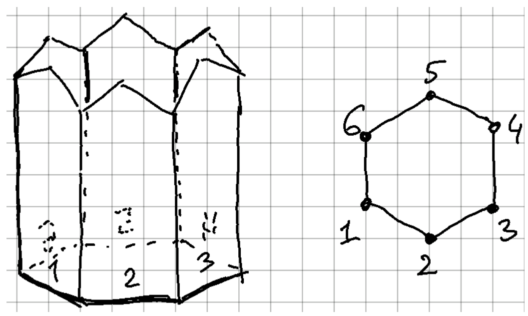
• На рисунке справа от забора нарисована схема задачи: каждая точка из шести точек изображает доску, а линии соединяют соседей, то есть доски, которые по условию должны быть покрашены в разные цвета. (Математики сказали бы, что надо покрасить вершины графа в три цвета, причём концы любого ребра должны иметь разные цвета.)

---

[7]Это типичный размер для 2023 года — раньше часто было 32 или 16. Биты часто разбивают на группы по 8, называемые *байтами*, так что каждое слово состоит из восьми байтов.



• Более сложная задача возникает для кольцевого забора (для шести досок он больше напоминает шестигранную беседку, но тем не менее).



2.17* Сколькими способами можно раскрасить кольцевой забор из шести досок, если есть три краски и соседние доски должны быть покрашены в разные цвета?

• Задачу о правильных раскрасках можно поставить для любого *графа*, как сказали бы математики: надо нарисовать точки (*вершины*), которые красят в k цветов, и соединить линиями (*рёбрами*) те точки, которые нельзя красить одинаково. После этого можно спросить, сколько правильных раскрасок есть у такого графа.

▷ Для графа, где вершины соединены рёбрами по кругу (цикла) мы научились решать задачу сравнительно просто: хотя у нас и нет готовой формулы, но можно последовательно вычислять ответ для цикла из n вершин, используя ответ для предыдущего цикла. При некотором терпении даже без компьютера можно получить ответ для графов с десятками вершин (а уж с помощью компьютеров и десятки тысяч вершин не будут проблемой). Но это нам повезло: для произвольных графов найти число раскрасок в 3 цвета (или хотя бы просто узнать, равно ли это число нулю, то есть существуют ли такие раскраски) — вычислительно сложная задача, и математики подозревают (хотя и не могут доказать), что любой такой алгоритм требует «экспоненциального перебора» (если не всех раскрасок, то какого-то другого большого множества), и для графов из тысяч вершин это (пока?) недостижимо сложная задача.

Можно ещё спросить, есть ли явная формула для S_n в нашей задаче. Попробуйте её угадать; для начала можно поделить все числа на два, получатся числа $3, 9, 15, 33 \ldots$ — они получаются из степеней двойки прибавлением или вычитанием единицы, и это не случайно: наше рассуждение позволяет доказать (по индукции), что $S_n = 2 \cdot (2^{n-1} + (-1)^n)$.

Можно фиксировать граф и рассматривать число правильных раскрасок в k цветов при разных k (как функцию от k). Эта функция всегда будет многочленом от k. Это можно доказать нашим способом, сведя граф к двум меньшим (надо выбрать ребро и рассмотреть два графа: в одном оно удалено, в другом стянуто в точку). Многочлен этот математики называют *хроматическим многочленом* графа. Приведённая выше формула для S_n обобщается на любое число цветов (k): хроматический многочлен равен $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$; при каждом n получаем многочлен от k степени n. ◁

2.18* В выражении

$$(a + b - c)(d + e - f)(g + h - i)(j + k - l)$$

раскрыли все скобки, получили сумму произведений групп из четырёх букв. Сколько слагаемых в этой сумме? Перед сколькими из ними стоит знак «минус»?

Иногда перемножение количеств вариантов при независимом выборе полезно, даже если мы не знаем числа вариантов.

2.19* Пусть n — максимальное количество слонов, которое можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Покажите, что n чётно и что число способов расстановки n слонов, не бьющих друг друга, есть точный квадрат.

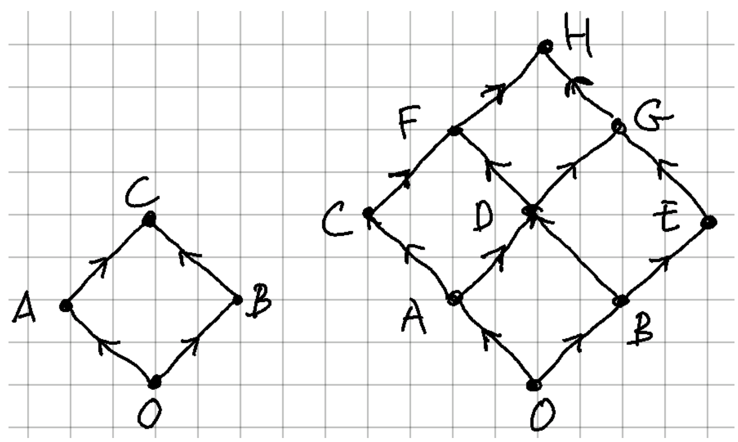
• Каждый слон атакует все поля на двух диагоналях, в пересечении которых он стоит.

3. Рекуррентные формулы

Не всегда ответ в комбинаторной задаче можно посчитать по какой-то формуле — но даже если нет, часто можно обойтись без перебора всех вариантов. Один из способов — свести задачу к другим задачам меньшего размера, которые предварительно решить.

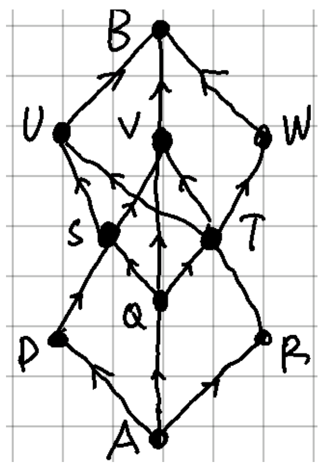
Начнём с задачи, которая у нас уже была (и даже в более сложном варианте).

3.1 Найдите число различных путей из вершины O в вершины A, B и C (левый рисунок). Тот же вопрос для всех вершин (A, B, C, D, E, F) правого рисунка.



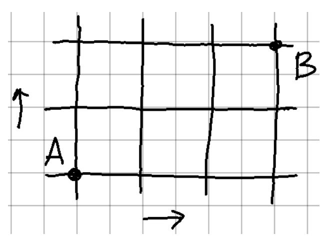
Тот же приём работает и для более сложных схем дорог:

3.2* Найти число различных путей из вершины A в вершину B по дорогам на рисунке. (Стрелки указывают направление движения: дороги односторонние и ведут снизу вверх.)

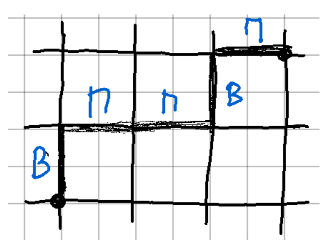


Следующая задача продолжает уже решённую нами (только схема дорог тут чуть больше и она повёрнута так, что дороги горизонтальны и вертикальны).

$\boxed{\textbf{3.3}}$ Город разбит сеткой горизонтальных и вертикальных улиц на квадратные кварталы со стороной 1. Мы хотим пройти из точки A в точку B одним из кратчайших путей (то есть идя только вправо и вверх). Сколько таких путей существует?



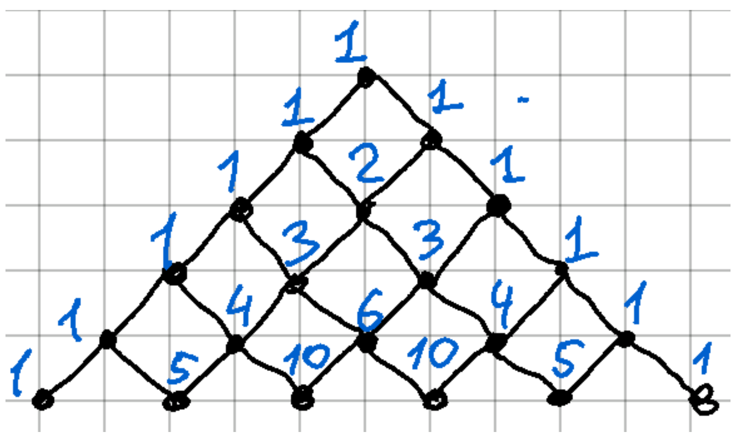
$\boxed{\textbf{3.4}}$ Перечислите эти 10 кратчайших путей из A в B, записывая каждый путь как последовательность шагов направо (П) и вверх (В).



Например, путь на картинке запишется как ВППВП. Пути удобно перечислять как в словаре («в лексикографическом порядке»): если два пути расходятся в каком-то месте, то раньше указывается путь, который идёт вверх (потому что «В» раньше «П» в алфавите). Первым в списке будет путь ВВППП.

3.5* Мы перечисляем пути из точки A в точку B, которая на 7 кварталов правее и на 5 выше. Какой путь будет идти (в лексикографическом порядке) вслед за ВППВПВПППВВ?

Вернёмся к рисунку с количеством путей в разные перекрёстки. Для красоты его поворачивают так, чтобы вершина A была сверху и дороги вели вниз-влево и вниз-вправо:



Каждое число равно сумме двух стоящих над ним (а по левой и правой сторонам идущего вниз треугольника стоят единицы).

Заполненный таким образом числовой треугольник называют *треугольником Паскаля*[8] (хотя раньше его упоминал, скажем, знаменитый поэт Омар Хайям и другие), а его элементы — *биномиальными коэффициентами* или *числами сочетаний*. Немного позже мы объясним, откуда берутся эти названия.

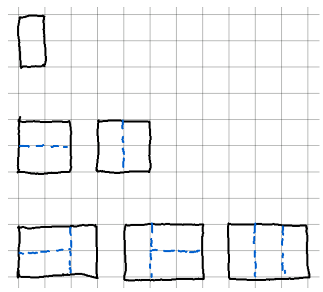
Задачу о числе путей можно переформулировать так: «шахматная пешка идёт с поля a1 на поле d3, при этом она может идти направо и вверх (на одну клетку); сколькими способами она может это сделать?».

[8]Блез Паскаль — французский математик и религиозный философ XVII века, один из основателей теории вероятностей.

$\boxed{\textbf{3.6}}$ Как изменится ответ в этой задаче, если разрешить пешке ещё ходить вправо-вверх (в соседнюю клетку по диагонали)?

$\boxed{\textbf{3.7}}$ На клетчатой бумаге нарисована прямоугольная полоска 2×10. Мы хотим разрезать её на «доминошки» 1×2 (вертикальные и горизонтальные). Сколькими способами можно это сделать?

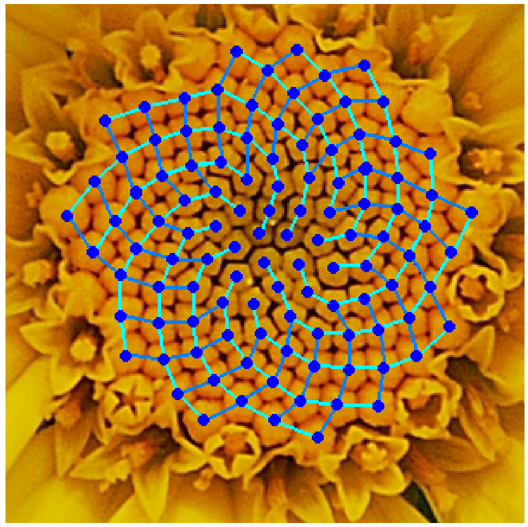
На рисунке показаны возможные способы разрезания для полосок 2×1, 2×2 и 2×3 (один, два и три способа соответственно).



Глядя на этот рисунок, можно предположить, что число способов для полоски $2 \times n$ равно n, но это не так — уже для $n = 4$ эта закономерность нарушается.

▷ Последовательность 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … (где и дальше каждый член равен сумме двух предыдущих) называют *последовальностью Фибоначчи* (обычно к ней добавляют ещё единицу вначале, а часто и два члена 0, 1, не нарушая закона построения). [9] Фибоначчи странным образом связывал эту последовательность с размножением кроликов (которые знать о ней не знают), но она и впрямь встречается в биологических объектах: если посчитать число спиралей в ананасах (или в шишках) в двух направлениях, часто можно увидеть соседние числа Фибоначчи.

[9] Про историю названия (довольно запутанную) можно прочесть, скажем, в википедии.



У цветка Cota tinctoria (жёлтая ромашка) тоже можно увидеть 21 спираль в одном направлении и 13 в другом (фотография с дорисованными линиями спиралей взята из статьи в википедии о числах Фибоначчи). ◁

Мы уже обсуждали (задача 2.11), почему последовательностей нулей и единиц (двоичных слов) длины 10 есть $2^{10} = 1024$ штуки. Если наложить дополнительные ограничения, то некоторые последовательности отпадут и их станет меньше.

3.8 Сколько последовательностей длины 10 из нулей и единиц, в которых никакие два нуля не идут подряд?

• Например, из восьми последовательностей длины 3 исключаются последовательности `000`, `001` и `100` (проверьте, что остальные подходят), и остаётся пять.

3.9* Сколько троичных слов (то есть последовательностей из цифр $0, 1, 2$) длины 10 без двух нулей подряд?

3.10* Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых нет подряд идущих *трёх* нулей?

▷ Видно, что хороших слов (без трёх нулей) длины 10 чуть меньше половины от всех (504 из 1024). Если посчитать ещё несколько членов последовательности, мы увидим, что эта доля уменьшается с ростом n. Специалисты по теории вероятностей бы сказали, что *вероятность того, что при n бросаниях честной монеты не встретятся три орла подряд, убывает и стремится к нулю с ростом n.* ◁

Во всех предыдущих задачах мы находили нужное нам число способов, сведя задачу к меньшим — это часто бывает полезно (особенно если не удаётся сразу использовать какие-то известные формулы). В качестве иллюстрации вернёмся к задаче о положительных и отрицательных членах в произведении, которую мы уже разбирали (2.18).

3.11* Рассмотрим произведение скобок

$$(a+b-c)(d+e-f)(g+h-i)\ldots,$$

где переменные в скобках не повторяются и в каждой скобке два плюса и один минус. Сколько членов и перед сколькими стоит знак минус, если в произведении n скобок?

В заключение раздела приведём ещё несколько задач, где похожие соображения (сведение к задачам меньшего размера или более простым) позволяют получить ответ, не перебирая всех вариантов.

3.12* Сколькими способами можно заплатить 37 рублей, если есть только монеты в 1, 2 и 5 рублей? (Способы, отличающиеся только порядком монет, считаем одинаковыми.)

- Например, для 7 рублей есть пять способов

$$5+2, 5+1+1, 2+1+1+1+1+1, 2+2+1+1+1, 2+2+2+1$$

(мы не различаем, скажем, $5+2$ и $2+5$, потому что они отличаются только порядком уплаты).

▷ Математики могли бы заметить, что нам нужно вычислить коэффициент при x^{37} в произведении

$$(1+x+x^2+x+3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots),$$

но с точки зрения вычислений это мало что даёт, даже если просуммировать бесконечные ряды и записать это произведение как

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}=\frac{1}{1-x-x^2+x^3-x^5+x^6+x^7-x^8},$$

откуда можно получить рекуррентное соотношение

$$T_n-T_{n-1}-T_{n-2}+T_{n-3}-T_{n-5}+T_{n-6}+T_{n-7}-T_{n-8}=0.$$

Но с точки зрения вычислений это соотношение, пожалуй, даже менее удобно, потому что надо вычислять все T_n подряд[10]. Зато, если уметь пользоваться какой-нибудь компьютерной системой символьных вычислений, можно получить ответ почти сразу (на рисунке часть вывода системы `wolframalpha`, обведён нужный коэффициент).

series	$\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$	point	$x = 0$

Series expansion at x = 0

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 7x^8 + 8x^9 + 10x^{10} + 11x^{11} + 13x^{12} + 14x^{13} + 16x^{14} + 18x^{15} + 20x^{16} + 22x^{17} + 24x^{18} + 26x^{19} + 29x^{20} + 31x^{21} + 34x^{22} + 36x^{23} + 39x^{24} + 42x^{25} + 45x^{26} + 48x^{27} + 51x^{28} + 54x^{29} + 58x^{30} + 61x^{31} + 65x^{32} + 68x^{33} + 72x^{34} + 76x^{35} + 80x^{36} + 84x^{37} + 88x^{38} + 92x^{39} + 97x^{40} + 101x^{41} + 106x^{42} + 110x^{43} + 115x^{44} + 120x^{45} + 125x^{46} + 130x^{47} + 135x^{48} + 140x^{49} + 146x^{50} + 151x^{51} + 157x^{52} + 162x^{53} + 168x^{54} + 174x^{55} + 180x^{56} + O(x^{57})$$

◁

3.13* Найдите число решений уравнения $x + 2y + 5z = 37$ в целых неотрицательных числах.

В следующей задаче мы считаем способы разбиения целого положительного числа на любые целые положительные слагаемые (можно сказать, что теперь есть монеты любого целого достоинства). Скажем, для числа 5 есть такие разбиения:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1,$$

всего 7 вариантов.

3.14* Как объяснить, что в этом перечислении мы не пропустили ни одного варианта? Найдите число разбиений для $n = 10$.

▷ Можно также написать коротную программу на каком-нибудь знакомом вам языке программирования (здесь использован питон)

[10]Если только n не очень велико и мы не вычисляем степень матрицы повторным возведением в квадрат.

```
N=10
T = [[0 for x in range(N+1)] for y in range(N+1)]
T[0][0]=1
for n in range(1,N+1):
  T[n][0]=0
  for k in range (1,n+1):
    T[n][k]= sum([(0 if n-i<0 else \
    (T[n-i][i] if i<=n-i else T[n-i][n-i]))\
    for i in range(1,k+1)] )
print ([T[i][i] for i in range(0,N+1)])
```

```
[1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42]
```

Есть и другое рекуррентное соотношение для количества $T_n (= T_{n,n})$ разбиений n на слагаемые, открытое Эйлером:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

Здесь знаки идут парами (два плюса, два минуса, потом снова два плюса и так далее), а вычитаемые из n числа получаются по формулам $k(3k-1)/2$ для первого члена пары и $k(3k+1)/2$ для второго члена пары ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Мы считаем, что $T_0 = 1$ и $T_i = 0$ при $i < 0$. Это соотношение связано с *пентагональной теоремой Эйлера*, говорящей, что в бесконечном произведении

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \ldots$$

удивительным образом все ненулевые коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по указанным выше формулам. Название «пентагональная» связана с “pentagonal numbers” — пятиугольными числами, которые равны числу точек в составленных определённым образом пятиугольниках ($1, 5, 12, 22, 35, \ldots$); мы не будем рисовать эту картинку (её можно посмотреть в википедии). Они появляются как степени в группах из двух членов одного знака. $\triangleleft$

В последней задаче нужно найти, сколькими способами можно вычислить произведение n сомножителей, еесли сомножители нельзя переставлять, а можно только по-разному группировать. Скажем, для трёх сомножителей a, b, c есть два способа $(ab)c$ и $a(bc)$, а для четырёх есть пять способов $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ и $a(b(cd))$.

$\boxed{\textbf{3.15}^*}$ Найдите количество способов для 7 сомножителей.

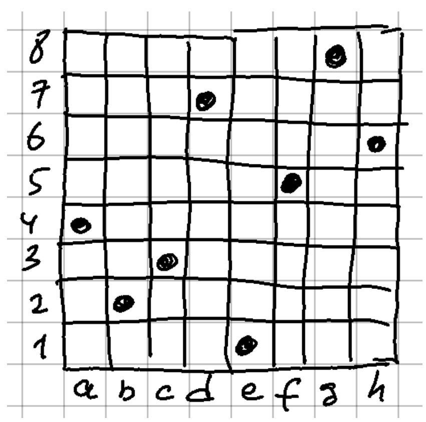
$\triangleright$ Эти числа $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots)$ появляются во многих других задачах и называются *числами Каталана*. Обычно нумерацию сдвигают и считают n-м числом Каталана количество способов вычислить произведение из $n+1$ сомножителей, так что в стандартных обозначениях наш ответ 132 будет C_6, а не C_7. Для чисел Каталана есть формула с факториалами $(2n)!/(n!(n+1)!$, при $n = 6$ будет как раз $12!/(6!7!) = 132$. Мы ещё встретимся с числами Каталана в следующих разделах. $\triangleleft$

4. Соответствия

Мы разберём несколько задач, в которых полезно сравнивать размеры разных множеств, устанавливая между ними соответствия (что это значит, будет видно из примеров).

4.1 На шахматную доску 8×8 ставят 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. (Это значит, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали должно быть не больше одной ладьи.) Сколькими способами это можно сделать?

На рисунке показана одна из таких расстановок.



Говоря научно, мы установили *взаимно однозначное соответствие* между расстановками ладей, удовлетворяющими условию, и перестановками 8 цифр, и заключили отсюда, что искомых расстановок столько же, сколько перестановок 8 цифр.

В общем виде: если между двумя (конечными) множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число элементов.[11]

▷ Этот приём часто иллюстрируют примерами «из жизни»: скажем, чтобы проверить, что в комнате столько же человек, сколько стульев, надо попросить

[11]Оговорка про конечные множества тут важна: про бесконечные множества не сразу ясно, что такое «число элементов в них». Ещё Галилей заметил, что все целые положительные числа $1, 2, 3, 4, \ldots$ можно поставить в соответствие с точными квадратами $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$, при котором число n соответствует квадрату n^2 — хотя квадраты составляют лишь небольшую часть целых чисел. Этим занимается теория множеств; число элементов в бесконечном множестве называется там его *мощностью*.

их сесть на стулья. Взаимная однозначность соответствия при этом означает две вещи: что никакие два человека не сидят на одном стуле («отображение людей в стулья является инъекцией», сказали бы математики) и что ни один стул не пустой («это отображение является сюръекцией»).

Философы заметили бы, что сам процесс счёта предметов представляет собой установление взаимно однозначного соответствия между пересчитываемыми предметами и числами $1, 2, 3, \ldots, n$ (для какого-то n, которое и называется числом предметов). Дальше бы они спросили, почему это n оказывается тем же при повторном пересчёте, но это уже совсем философский вопрос… ◁

4.2 Беня решал задачу о ладьях, не бьющих друг друга, и расссуждал так. Первую ладью можно поставить на доску 64 способами. После этого одна вертикаль и одна горизонталь выбывают, для второй ладьи разрешены только 49 клеток (7 вертикалей по 7 клеток в каждой). Для третьей будут доступны 36 клеток и так далее до последней ладьи, которой останется единственная возможная клетка. Получаем ответ

$$64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = (8!)^2.$$

Почему у него получился другой (и гораздо больший) ответ?

▷ Мораль: решая комбинаторную задачу, важно чётко понимать, *что именно* мы считаем (какие ситуации допустимы, и какие мы считаем одинаковыми, а какие разными). ◁

4.3* Какое максимальное число ладей, не бьющих друг друга, можно поставить на половину доски (прямоугольник 4×8 — скажем, левую половину доски)? Сколькими способами можно это сделать?

4.4 Аня хочет показать своей сестре фокус. Она пишет на листе бумаги

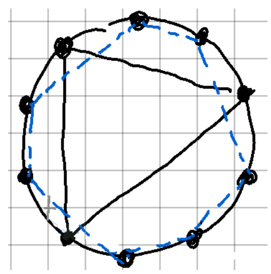
```
НАУКА
УМЕЕТ
МНОГО
ГИТИК
```

и предлагает сестре задумать одну из написанных букв и сказать, в каких строках эта буква есть (скажем, буква У есть в первой и второй строках, а буква И только в четвёртой). После чего она обязуется угадать задуманную букву. Сможет ли Аня гарантированно выполнить своё обещание?

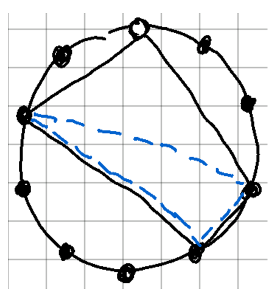
Получится ли этот фокус, если вместо `УМЕЕТ` во второй строке написать `ИМЕЕТ` (как герой повести Евгения Замятина «На куличках»)?

4.5 На окружности отмечено 10 точек. Чего больше: треугольников с вершинами в этих точках или семиугольников с вершинами в этих точках?

На рисунке показаны один такой треугольник и один такой семиугольник (мы считаем их непересекающимися, и вершины соединяются в порядке обхода по кругу).



4.6* На окружности отмечено 10 точек: девять чёрных и одна белая. Чего больше: многоугольников, у которых все вершины чёрные, или многоугольников, у которых есть и белая вершина (а остальные — чёрные)? Чего больше — треугольников с чёрными вершинами или четырёхугольников с одной белой и тремя чёрными вершинами?



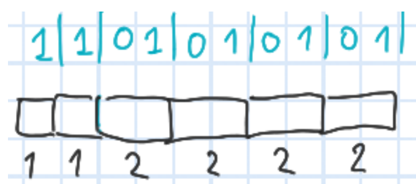
Многоугольники в этой задаче — это треугольники, четырёхугольники и так далее (до десятиугольников, больше вершин нет). На рисунке показан один многоугольник (четырёхугольник) с белой вершиной и один (треугольник) без неё.

4.7 Объясните, почему следующие три вопроса имеют один и тот же ответ:

- Сколькими способами можно замостить полоску 10×1, если разрешается использовать плитки 1×1 и 1×2?
- Сколькими способами можно представить 10 в виде суммы слагаемых, используя только 1 и 2 (и учитывая порядок слагаемых, скажем, варианты $1+1+2+2+2+2$ и $2+2+2+2+1+1$ считаются за разные)?
- Петя поднимается по лестнице из 10 ступенек, делая шаги в одну или две ступеньки. Сколькими различными способами он может это сделать?

4.8* Найдите количество способов в предыдущей задаче (как мы уже знаем, одно и то же для всех трёх вариантов).

4.9* Решая предыдущую задачу, Беня вспомнил, что мы считали последовательности нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд, и разбивали последовательности на блоки 1 и 01 (слева направо, задача 3.8). Теперь мы разрезаем полоску длины 10 на квадраты 1×1, в которых можно написать 1, и доминошки 2×1, в которых можно написать 01. Значит, каждому разрезанию соответствует «хорошее» двоичное слово длины 10, в котором нет двух нулей подряд.



А хороших слов было 144, значит и разрезаний 144. Прав ли Беня?

4.10* Сколькими способами можно представить число 10 в виде суммы целых положительных слагаемых с учётом порядка? (Скажем, для числа 3 способы $1+2$ и $2+1$ считаются разными, а всего способов четыре: есть ещё 3 и $1+1+1$.)

4.11* Мы уже знаем, что есть 2^{10} двоичных слов длины 10 (см. задачу 2.11). В некоторых из них чётное число единиц (скажем, в слове `0000000000` или в `1111111111`), а в некоторых нечётное (скажем, в слове `0101010101`). Каких слов больше — с чётным или с нечётным числом единиц?

Иногда полезны и не взаимно однозначные соответствия: бывают случаи, когда каждый объект одного типа соответствует какому-то фиксированному числу k объектов другого типа. Скажем, если школьники в классе решали задачи из списка и каждый школьник решил две задачи, а каждую задачу решил ровно один школьник, то задач в списке вдвое больше, чем школьников в классе.

4.12 В классе n школьников, и на каникулах каждый отправил по одному письму каждому (кроме себя, естественно). Сколько всего писем было написано? После каникул они встретились, и каждый пожал руку каждому (по одному разу). Сколько было рукопожатий?

▷ Можно было бы опасаться: вдруг $n(n-1)$ не разделится? Но, с одной стороны, мы доказали, что число писем вдвое больше числа рукопожатий, поэтому должно делиться. С другой стороны (если одного доказательства вам мало), одно из двух соседних чисел n и $n-1$ всегда чётно, поэтому произведение тоже чётно.

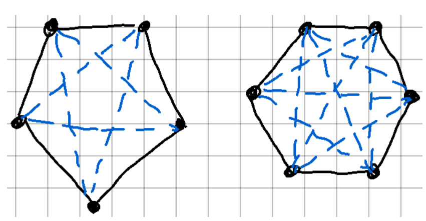
Ещё можно рассуждать так: если T_n — число рукопожатий для n школьников, то посмотрим на одного из них. Он сделает $n-1$ рукопожатий, и если их не учитывать, то получится задача с $n-1$ школьниками. Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n &= (n-1) + T_{n-1} = (n-1) + (n-2) + T_{n-2} = \ldots \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + T_2 = \\ &= (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n(n-1)/2 \end{aligned}$$

(последнее равенство мы уже имели случай обсуждать по другому поводу в задаче 1.11). ◁

4.13 Сколько диагоналей в (выпуклом) n-угольнике?

На картинке видно, что у пятиугольника пять диагоналей (образующих пятиконечную звезду), а у шестиугольника девять.



• Мы оговорили, что многоугольник выпуклый, чтобы не разбираться, учитывать ли диагонали, идущие снаружи многоугольника и т.п.

В следующей задаче мы по существу интересуемся количеством трёхэлементных подмножеств десятиэлементного множества. Но поскольку считается, что слова «множество» и «подмножество» пугают, скажем иначе.

$\boxed{4.14}$ Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать трёх, которые останутся сторожить вещи и разводить костёр, пока остальные семь пойдут на прогулку. Сколькими способами можно это сделать?

$\boxed{4.15}$ Туристическая группа из 10 человек хочет выбрать 7 человек, которые пойдут на прогулку, пока остальные сторожат вещи и разводят костёр. Сколькими способами можно это сделать?

$\boxed{4.16}$ Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно три единицы? Сколько существует двоичных слов длины 10, в которых ровно семь единиц?

$\boxed{4.17}$ Сколько существует двоичных слов длины 5 с двумя единицами (и тремя нулями). Как объяснить, что их число равно числу кратчайших путей из одного угла прямоугольника 2×3 в другой (задача 3.3)?

Иногда полезно рассматривать и соответствия, в которых на каждый объект первого типа приходится m объектов второго типа, а на каждый объект второго типа приходится n объектов первого типа. Такая ситуация возникает в следующей задаче.

$\boxed{4.18}$ В классе 30 школьников, они решали задачи из некоторого списка, при этом вышло так, что каждый школьник решил по две задачи, а каждая задача из списка была решена (ровно) тремя школьниками. Сколько задач в списке?

Этот приём позволяет решить следующую задачу почти что в уме.

$\boxed{4.19^*}$ Пусть A — число способов выбрать 10 предметов из 30, а B — число способов выбрать 11 предметов из 30. Кто больше — A или B — и во сколько раз?

Вот ещё одна задача с неожиданно простым решением, надо только правильно выбрать соответствие.

$\boxed{4.20^*}$ Сколько существует двоичных слов длины 12 с тремя единицами, в которых единицы не идут подряд (между любыми двумя единицами есть хотя бы один нуль)?

В большинстве решённых нами задач мы так или иначе сталкивались с *числами сочетаний* (которые также называют *биномиальными коэффициентами*), то есть с числом способов выбрать k элементов из n элементов. В следующем разделе мы посмотрим на них более систематически (и узнаем, что это за «бином», у которого коэффициенты), но полезно привыкнуть к ним заранее в простых ситуациях.

4.21 Сколько различных слов (осмысленных или нет) можно получить, переставляя буквы в слове ПАРК? Тот же вопрос для слов ПАРА и ПАПА.

4.22* (Продолжение) Тот же вопрос для слов ПАППА и МАТЕМАТИКА.

• Мы встретимся ещё раз с подобной задачей, рассматривая мультиномиальные коэффициенты.

4.23 Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны и различны? Сколько четырёхзначных чисел, у которых все цифры нечётны, различны и идут в убывающем порядке? (Скажем, число 1573 подходит в первом случае, но не во втором, а число 9531 годится в обоих случаях.)

5. Сочетания и бином

Сейчас мы сформулируем в общем виде определения и результаты, которые уже не раз встречались в предыдущих разделах.

Пусть n и k — целые числа, причём $0 \leqslant k \leqslant n$. *Числом сочетаний из n по k* называется число способов выбрать набор из k предметов (порядок не учитывается) из n данных нам предметов. (На более математическом языке: число k-элементных подмножеств n-элементного множества.)

По-русски число сочетаний из n по k обычно обозначают C_n^k, хотя в последнее время употребительно и принятое в английских текстах обозначение $\binom{n}{k}$. Запись C_n^k обычно читают «цэ из эн по ка» (буква C не от слова «сочетание», а от слова “combinations”). Например $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$, поскольку из четырёх букв a, b, c, d можно выбрать две буквы (без учёта порядка) шестью способами: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

5.1 Чему равны C_n^0, C_n^1, C_n^{n-1}, C_n^n? (Мы предполагаем, что $n \geqslant 0$, а для второго и третьего выражений $n \geqslant 1$.)

▷ Иногда удобно считать, что $C_n^k = 0$ при $k < 0$ и $k > n$ (но мы будем стараться оговаривать такие случаи явно). ◁

5.2 Докажите, что при $0 \leqslant k \leqslant n$ выполнено равенство

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

• Более симметричный способ записи этого тождества: $C_{k+l}^k = C_{k+l}^l$ при целых $k, l \geqslant 0$: выбрать k из $k+l$ элементов (и оставить l) всё равно что выбрать l и оставить k.

5.3 Докажите, что C_n^k (при $0 \leqslant k \leqslant n$) равно числу двоичных слов длины n, в которых ровно k единиц.

▷ Можно представить себе такую картину: мы просматриваем по очереди все двоичные слова длины n, и раскладываем их по ящикам с надписями $0, 1, 2, \ldots, n$ в зависимости от числа единиц (как сказали бы статистики, «строим гистограмму»). По окончанию работы в ящике k окажется C_n^k слов.

При бо́льших n подавляющее большинство слов окажется в ящиках, близких к среднему (при $k \approx n/2$); в теории вероятностей это называют «законом бо́льших чисел». ◁

$\boxed{\textbf{5.4}}$ Докажите, что

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

при любом $n \geqslant 0$.

$\boxed{\textbf{5.5}^*}$ Докажите, что

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$$

при любом $n \geqslant 0$. (Знаки чередуются, поэтому знак плюс или минус перед последним членом зависит от чётности n.)

$\boxed{\textbf{5.6}}$ Докажите формулу для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

• В числителе первой дроби стоит k сомножителей (как и в знаменателе)

• Чтобы эта формула имела смысл при всех $0 \leqslant k \leqslant n$, надо считать $0! = 1! = 1$ (что вообще логично, если мы хотим, чтоб равенство $n! = n \cdot (n-1)!$ выполнялось при $n = 2$ и при $n = 1$).

Более симметричная запись той же формулы: $C_{k+l}^k = \frac{(k+l)!}{k! \cdot l!}$ при $k \geqslant 0$, $l \geqslant 0$.

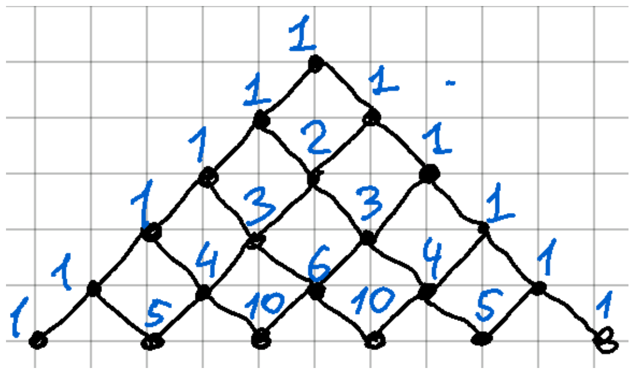
$\boxed{\textbf{5.7}^*}$ Докажите, что при любом $k \geqslant 2$ произведение любых последовательных k целых положительных чисел делится на $k!$. (Например, $n(n-1)$ всегда чётно, а $n(n-1)(n-2)$ всегда делится на 6.)

• Слово «положительные» в утверждении можно опустить: если числа все отрицательные, то можно изменить знак, а если есть нуль, то произведение равно нулю и делится на что угодно.

▷ Мы уже встречались (задача 4.12) с этим утверждением при $k = 2$: произведение $n(n-1)$ всегда чётно, так как одно из чисел n и $n-1$ чётно. Для произвольного k уже не так просто это доказать, не рассматривая число сочетаний (но можно: надо заметить, что кратные любого числа встречаются в произведении k подряд идущих чисел не меньше раз, чем в произведении чисел от 1 до k, потому что второе произведение начинается в самом невыгодном месте, и применить это утверждение к степеням простых чисел). ◁

$\boxed{\textbf{5.8}}$ Докажите, что число сочетаний C_{k+l}^k равно числу кратчайших путей из одного угла в другой для прямоугольного города $k \times l$, разрезанного улицами на квадратные кварталы 1×1.

Мы уже записывали число путей для прямоугольников разного размера (в каждой точке записано число путей из вершины сверху-вниз по дорогам):



Теперь мы знаем, что эти числа соответствуют числам сочетаний C_n^k при различных n и k. Например, число 10 в нижней строке соответствует C_5^2 (а другое число 10 в той же строке соответствует C_5^3).

5.9 Найдите на этой картинке число C_4^2: числу путей в каком прямоугольнике оно соответствует?

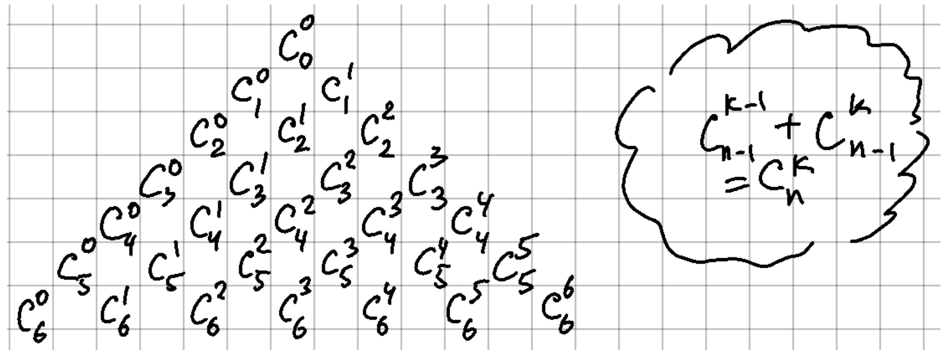
5.10 Докажите рекуррентную формулу

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

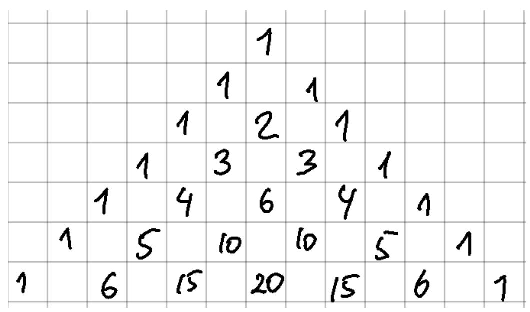
при $n \geqslant 1$ и $0 < k < n$.

• Можно понять, что это означает в терминах числа путей. Величина C_n^k соответствует прямоугольнику размера $k \times (n-k)$. Величины в правой части тогда соответствуют прямоугольникам размера $(k-1)\times(n-k)$ и $k\times(n-k-1)$. Если, как и раньше, обозначить $n-k$ за l, то наша формула утверждает, что число путей из угла в угол для прямоугольника $k \times l$ равно сумме таких чисел для прямоугольников $k\times(l-1)$ и $(k-1)\times l$ — мы как раз это и использовали, когда начинали считать число путей. Но мы изложим по существу то же рассуждение более комбинаторно.

Удобно записать числа сочетаний в треугольную таблицу (мы это уже делали, считая пути в разделе 3).



Тогда рекуррентную формулу предыдущей задачи можно сформулировать так: каждое число в этой таблице равно сумме чисел слева и справа от него в предыдущей строке. Зная, что на левом и правом краю этого *треугольника Паскаля* стоят единицы, его легко заполнять, переходя от строки к строке (достаточно уметь складывать):



▷ Из этой картинки видно, скажем, что $C_6^2 = 15$. Можно проверить это по формуле:

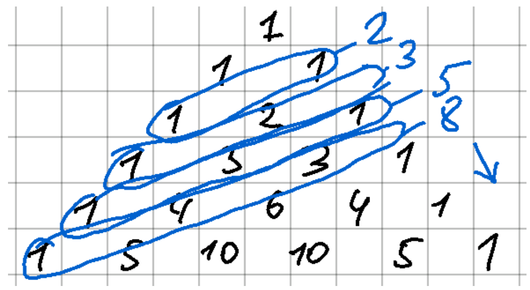
$$\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15.$$

Если надо вычислить всю таблицу, то проще складывать верхних соседей, чем применять формулу с произведениями. (Даже если нужно вычислить только одно число, может быть проще заполнить таблицу до этого места, чем перемножать и делить большие числа.)

Для единиц с краю правило суммы не годится (потому что один сосед выходит за пределы треугольника). Таких исключений не будет, если договориться, что слева и справа от треугольника стоят одни нули. ◁

5.11* Докажите, используя правило заполнения треугольника Паскаля, что знакопеременная сумма чисел в любой его строке равна нулю ($1-2+1 = 1-3+3-1 = 1-4+6-4+1 = 0$ и так далее).

5.12* Покажите, что суммы чисел в треугольнике Паскаля по наклонным прямым являются числами Фибоначчи:



Теперь объясним, почему числа сочетаний называют ещё *биномиальными коэффициентами*. *Бинóм* — по-русски «двучлéн» — название для *полинóма* (многочлéна), который содержит два *монóма* (одночлéна). Что будет, если возводить простейший бином $(a + b)$ в разные степени? Хорошо известна формула

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2.$$

Чуть сложнее формула

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Что будет дальше, для четвёртой степени? Попробуем это себе представить, не выписывая всех членов. Мы раскрываем скобки в произведении четырёх скобок $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, сколько и какие члены получатся? Из каждой скобки нужно выбрать a или b, и все четыре буквы перемножить. Другими словами, нужно взять все четырёхбуквенные слова из букв a, b, считать их произведениями и сгруппировать одинаковые слагаемые (*приведение подобных*). В каждую группу подобных членов попадут слова с одинаковым числом букв a и b.

Скажем, a^4 будет в единственном числе (из всех скобок надо выбрать букву a), а a^3b встретится 4 раза (так как буква b может быть на любом из четырёх мест $baaa$, $abaa$, $aaba$, $aaab$). Дальше будет a^2b^2, и коэффициент будет равен числу слов длины 4 с двумя буквами a и двумя буквами b. Таких членов 6, а именно $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $babb$. При ab^3

будет тот же коэффициент 4, что при a^3b; наконец, b^4 встретится один раз. Получится

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Видно, что коэффициенты соответствуют строке треугольника Паскаля, и это не удивительно, потому что количество слов длины n, в которых k букв a, как раз равно C_n^k (надо выбрать из n позиций k мест для букв a). То же рассуждение показывает, что

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Можно было бы для единообразия вместо a^n и b^n написать $C_n^0 a^n b^0$ и $C_n^n a^0 b^n$. А можно, наоборот, вспомнить формулы для C_n^k и написать более явно

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Правую часть даже не надо обрывать специально, потому что коэффициент обратится в нуль — появится скобка $(n-n)$ и продолжать формулу дальше не надо (последний ненулевой будет как раз $n!/n! = 1 = C_n^n$).

5.13 Что получится, если в формулу для бинома (та, что выше в рамке) подставить $a=1$, $b=1$? А если подставить $a=1$, $b=-1$?

▷ Используя традиционные обозначения для суммирования, наши равенства можно записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0.$$

◁

5.14* Подставляя $a=1$, $b=2$ в формулу для бинома, получаем тождество

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^k C_n^k + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Как доказать его комбинаторно, не используя формулы бинома?

▷ Забудем временно о том, что в формуле бинома n — целое число, и подставим, скажем $a=1$, $b=x$ и $n=1/2$. Получится формула

$$(1+x)^{1/2} = 1+\tfrac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots = 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\ldots$$

с бесконечной суммой в правой части (потому что теперь уже коэффициенты не обращаются в нуль). Но удивительным образом эта формула имеет смысл, и даже несколько разных смыслов. При малых x (меньших 1 по модулю) её можно воспринимать как приближённую формулу: если брать больше членов в правой части, будет всё точнее и точнее. А можно формально вычислять квадрат правой части, то есть произведение

$$\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\ldots\right)\cdot\left(1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{1}{16}x^3+\ldots\right)=$$
$$=1+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)x+\left(-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\right)x^2+\left(\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}\right)x^3+\ldots=$$
$$=1+x+0x^2+0x^3+\ldots$$

и наблюдать, что всё больше и больше коэффициентов оказываются равными нулю, и остаётся $1+x$, как и должно быть при возведении в квадрат $(1+x)^{1/2}$.

Формулу бинома с нецелыми показателями придумал Ньютон — в честь которого теперь говорят «бином Ньютона» (хотя для целых положительных показателей это было известно многим и до Ньютона). Кстати, и для отрицательных показателей это имеет смысл: подставив $n=-1$, мы получим $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$ (проверьте, что именно такие коэффициенты получаются), формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. ◁

5.15* Аня придумала способ находить биномиальные коэффициенты на калькуляторе: $11^2=121$ (вторая строка треугольника Паскаля), $11^3=1331$, $11^4=14641$. Но с $11^5=161051$ вышло что-то не то, и Аня задумалась. «А-а-а, конечно, тут же двузначные коэффициенты… Но ничего страшного, я сейчас вычислю ⟨…⟩» — и всё получилось. Что сделала Аня и почему всё получилось?

Рассматривая треугольник Паскаля с разных сторон, можно обнаружить интересные закономерности. Приведём несколько примеров.

5.16* Докажите, что сумма *квадратов* всех чисел в строке треугольника Паскаля стоит в нём в середине строки с вдвое большим номером:

$$(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

(Например, $1^2+3^2+3^2+1^2=20=C_6^3$.)

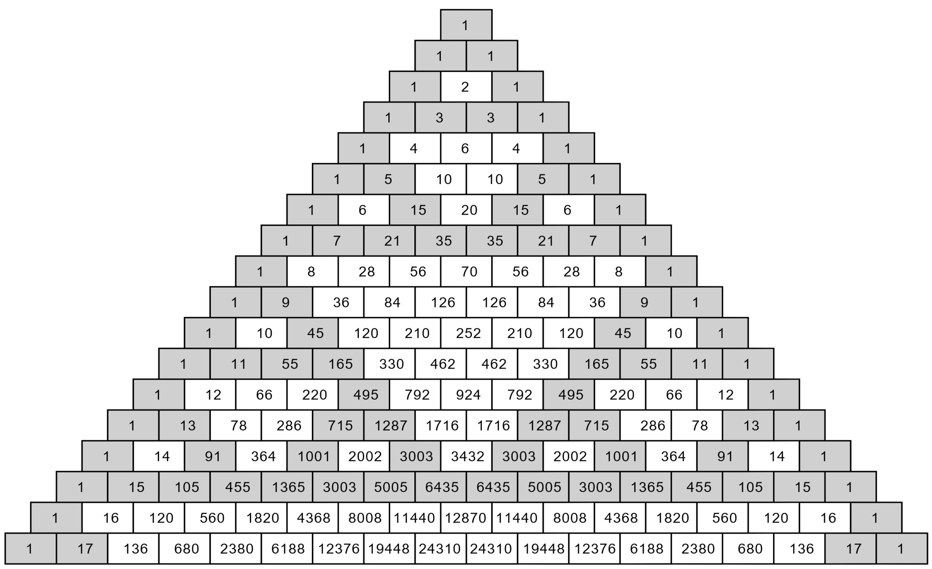
5.17* Докажите, что

$$C_{m+n}^k=C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+\ldots+C_m^kC_n^0.$$

(В правой части в некоторых биномиальных коэффициентах C_u^v может быть $v > u$, такие коэффициенты считаем равными нулю.)

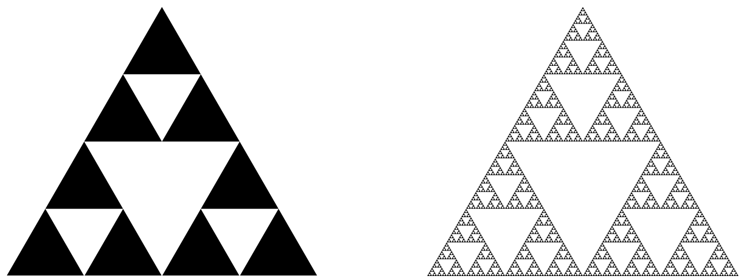
5.18* Докажите, что до середины числа в каждой строке треугольника Паскаля возрастают, а потом убывают (так что наибольшим является число в середине — или два одинаковых числа, в зависимости от чётности номера строки).

Рассматривая треугольник Паскаля, можно заметить, что там бывают строки, состоящие только из нечётных чисел, а также строки, в которых все числа (кроме крайних единиц) чётны. В википедии есть соответствующая картинка — числа там мелкие, но нечётные числа выделены цветом, и можно рассматривать соответствующий узор:



Хорошо видны и серые горизонтали, на которых стоят только нечётные числа, и серые треугольники с дырками, на них опирающиеся.

▷ Любители красивых картинок, вероятно, узнают тут «треугольник Серпинского». Он получается, если из треугольника выбросить середину (треугольник из средних линий), потом с каждым получившимся треугольником сделать то же самое (см. левый рисунок), и продолжать так до бесконечности (ещё несколько шагов показаны на правом рисунке, дальнейшее выбрасывание уже на рисунке не увидишь). Такие фигуры называются «самоподобными фракта́лами». Самоподобными — потому что фигура состоит из трех своих вдвое меньших копий, стянутых гомотетично к вершинам. Фракталами — потому что они имеют «размерность» между 1 и 2, что-то среднее между линиями и плоскими фигурами (со внутренностью). Мы не будем про это говорить подробно, ограничившись уже указанным выше свойством треугольника Паскаля.



◁

5.19* Докажите, что при $n = 1, 3, 7, 15, \ldots$ (числа, на единицу меньшие степеней двойки) все биномиальные коэффициенты C_n^k нечётны (при всех k от 0 до n).

Бином Ньютона указывает коэффициенты в разложении $(a + b)^n$. Можно задать себе аналогичный вопрос про $(a + b + c)^n$ — какие там коэффициенты? Скажем

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

что легко проверить (коэффициент 2 возникает, когда ab соединяется с ba и так далее). Чуть сложнее вычислить

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc.$$

Но какая тут общая формула? Следующая задача отвечает на этот вопрос.

5.20* Докажите, что $(a + b + c)^n$ состоит из членов вида $a^pb^qc^r$, где $p, q, r \geqslant 0$, $p + q + r = n$, а коэффициент при $a^pb^qc^r$ равен

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

(*мультиномиальные коэффициенты*).

Аналогичная формула (по тем же причинам) есть для любого числа слагаемых: скажем, $(a + b + c + d)^n$ равно сумме одночленов $a^pb^qc^rd^s$ с $p + q + r + s = n$, а коэффициенты равны $n!/(p!q!r!s!)$.

В заключение приведём ещё одну ситуацию, где появляются биномиальные коэффициенты.

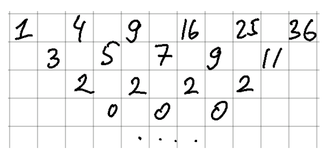
5.21* Докажите, что число решений уравнения $x+y+z=10$ в целых неотрицательных числах равно C_{12}^2. Чему равно число решений уравнения $x+y+z=13$ в целых положительных числах?

Решением уравнения $x+y+z=10$ считается тройка чисел (x, y, z), где все три числа целые и неотрицательные, и в сумме дают 10. Скажем, $(1,3,6)$ и $(3,1,6)$ — два решения этого уравнения, причём различные.

Общее утверждение: *количество решений уравнения* $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ *в целых неотрицательных числах* (*при* $k \geqslant 1, n \geqslant 0$) *равно* C_{n+k-1}^{k-1}.

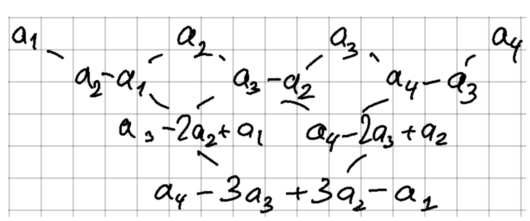
5.22* Найдите число решений неравенства $x+y \leqslant 10$ в целых неотрицательных числах.

Выпишем подряд точные квадраты $(1, 4, 9, 16, \ldots)$. Затем под каждыми двумя числами напишем разность, получим ряд из *первых разностей* $3, 5, 7, 9 \ldots$. Ещё раз сделаем то же, получится ряд из вторых разностей $2, 2, 2, \ldots$ (а третьи разности будут нулевыми).



Можно сделать аналогичный опыт с точными кубами, тогда понадобится на один шаг больше (четвёртые разности будут ненулевыми, но постоянными, а пятые нулевыми).

Если записать правила вычислений для третьей строки в общем виде, то там появятся знакочередующиеся биномиальные коэффициенты:



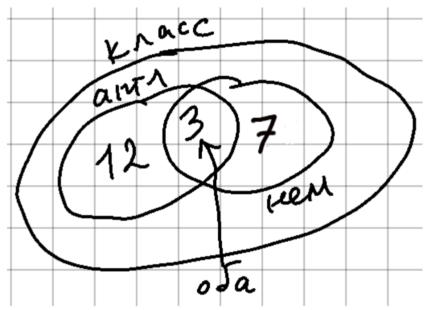
$\boxed{\mathbf{5.23}}^*$ (а) Покажите, что выражение для k-й разности содержит последовательные члены исходного ряда с знакочередующимися биномиальными коэффициентами $C_k^0, -C_k^1, C_k^2, \ldots$. (б) Покажите, что если исходная последовательность является значениями многочлена $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ в целых точках, то все k-е разности равны $k!a_k$ (а все следующие — нулю). (в) Докажите, что для целого положительного s сумма

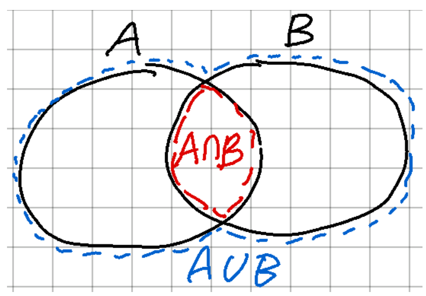
$$C_k^0 0^s - C_k^1 1^s + C_k^2 2^s - C_k^3 3^s + \ldots$$

равна $(-1)^k k!$ при $s = k$ и равна 0 при $s < k$.

6. Включения и исключения

$\boxed{6.1}$ В классе 10 учеников знают немецкий, 15 знают английский, и среди них есть трое, которые знают оба языка (они входят в 10 и 15, о которых шла речь). Сколько учеников знает хотя бы один из этих двух языков?





На более математическом языке (мы уже упоминали это в разделе 1) говорят так. Есть два конечных множества A и B (тех, кто знает немецкий, и тех, кто знает английский). Тогда можно рассмотреть их *пересечение* $A \cap B$ (тех, кто знает оба языка) и *объединение* $A \cup B$ (тех, кто знает хотя бы один язык). Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

где через $|X|$ обозначено число элементов в (конечном) множестве X. В нашем примере было $22 = 15 + 10 - 3$.

• Аналогичное утверждение можно сформулировать для площадей: площадь объединения фигур A и B на рисунке равна сумме площадей фигур минус площадь их пересечения.

Можно задать такой же вопрос для большего числа множеств — известны размеры множеств и размеры всех пересечений, надо найти размер объединения. Можно было бы задать такой вопрос про английский, немецкий и французский, но чтобы не запутывать дело, будем сразу говорить о множествах.

6.2 Докажите, что

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

для любых трёх конечных множеств A, B, C.

Словами: чтобы найти число людей, знающий хотя бы один язык из трёх, надо сложить числа людей, знающих немецкий, знающих французский и знающих английский, затем вычесть числа людей, знающих одновременно английский и немецкий, английский и французский, немецкий и французский, и, наконец, прибавить число людей, знающих все три языка.

6.3 Как изменятся слагаемые в правой части, если из множества A удалить элемент, который не входил ни в B, ни в C? Если удалить элемент, который входил в A и B, но не входил в C? Если удалить элемент, который входил во все три множества?

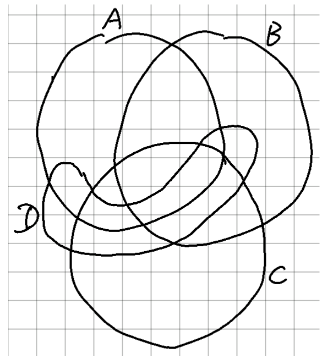
• Эта задача показывает, что во всех трёх случаях правая часть уменьшается на единицу — синхронно с левой. Если по очереди удалить все элементы, то она станет равной нулю — значит, изначально она была равна числу элементов в $A \cup B \cup C$, как и утверждает формула включений и исключений.

Теперь уже можно догадаться, как будет выглядеть формула для четырёх множеств: чтобы найти число элементов в их объединении, надо

- сложить числа элементов в этих множествах;
- вычесть все шесть попарных пересечений;
- добавить четыре тройных пересечения;
- наконец, вычесть пересечение всех четырёх множеств.

(Понятно, почему попарных пересечений шесть? потому что $C_4^2 = 6$.)

▷ Чтобы доказать эту формулу, тоже можно нарисовать «представительную» картинку для четырёх множеств, где были бы все 16 вариантов принадлежности и непринадлежности. Это уже не так просто, но если не настаивать на симметрии, то можно:



По этой картинке тоже можно посчитать, сколько раз вошла и вышла каждая часть. Но нам хотелось бы доказать аналогичную формулу для любого числа множеств, так что надо искать другое доказательство. ◁

6.4* Докажите общую *формулу включений и исключений*:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots - (-1)^n |A_1\cap\ldots\cap A_n|.$$

Здесь написано, что для подсчёта размера объединения надо сложить размеры множеств, вычесть размеры попарных пересечений, прибавить размеры тройных пересечений и так далее (последний знак будет плюс при нечётном n и минус при чётном n, поэтому там и стоит коэффициент $-(-1)^n$).

6.5* Докажите, что выражение

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + 4\sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots - (-2)^{n-1} |A_1\cap\ldots\cap A_n|.$$

(добавлены степени двойки) тоже имеет комбинаторный смысл: оно равно числу элементов, которые входят в *нечётное* число множеств $A_1,\ldots,A_n$. (Если множества A_i не пересекаются, то по-прежнему получается сумма.)

Приведём два примера, где можно использовать формулу включений и исключений: (1) перестановки без неподвижных точек и (2) слова, использующие все буквы (сюръекции).

6.6* Слово состоит из n различных букв. Сколько разных слов можно составить, переставляя эти буквы, если дополнительно требуется, чтобы ни одна буква не осталась на своём прежнем месте?

▷ Можно было бы спросить, сколькими способами n писем для n адресатов можно разложить по n надписанным конвертам, если нужно, чтобы каждый адресат получил бы неправильное письмо. (А математики сказали бы коротко «найти число перестановок без неподвижных точек».) ◁

▷ Знатоки математического анализа сразу скажут, что выражение в скобках с ростом n быстро приближается к значению $1/e$, где $e = 2{,}7182818284\ldots$ — так называемое «основание натуральных логарифмов», так что в примерно 37% случаев ни одна буква не стоит на своём месте.

(А знатоки теории вероятностей добавили бы, что в среднем в перестановке n букв есть одна неподвижная точка, так что не очень и удивительно, что около трети слов не имеют её — зато другие имеют больше одной.) ◁

А вот второй пример, где полезна формула включений и исключений.

Мы знаем, что слов длины n в алфавите из k букв (то есть последовательностей из n символов, выбираемых из k-элементного списка) всего k^n (для каждой буквы есть k вариантов). Наложим дополнительное ограничение: *в слове должны встречаться все буквы*. Сколько тогда останется слов?

Вопрос имеет смысл при $n \geqslant k$ (иначе мест для всех букв не хватит). Скажем, можно спросить (и мы сделаем это в следующей задаче), сколько существует десятизначных чисел с нечётными цифрами, в которых каждая из пяти нечётных цифр встречается не менее одного раза. Это соответствует $n = 10$, $k = 5$. Но нет смысла спрашивать, сколько бывает пятизначных чисел, в которых встречаются все 10 цифр — их не бывает.

В случае $k = n$ ответ будет $n!$ (или $k!$), потому что мест столько же, сколько букв, и если каждая буква встречается, то ровно один раз (иначе мест для других не хватит). Но как найти ответ при $n > k$?

6.7* Сколько существует десятизначных чисел, составленных из нечётных цифр, в которых каждая нечётная цифра использована (встречается хоть раз)? (Скажем, таковы числа 1975311111 или 5533997711, но не 1111335777.)

▷ Для вычисления по рекуррентной формуле можно написать простую программу типа такой (это `python`):

```
N=10
K=5
T = [[0 for i in range(K+1)] for j in range(N+1)]
```

```
T[1][1]=1
for n in range(2,N+1):
    for k in range(1,K+1):
        T[n][k]=k*(T[n-1][k-1]+T[n-1][k])
print (T[10][5])
```

В этой программе мы окружаем интересующую нас таблицу нулями, чтобы не разбирать случаи $k = 1$ и $k = n$ отдельно. Благодаря этому единственное ненулевое значение, которое нам надо явно указать, это $T(1, 1) = 1$. ◁

• Посмотрим ещё раз на десятизначные числа из нечётных цифр, в которых встречаются все нечётные цифры. В таком числе можно переставить цифры по какому-то правилу. Скажем, если применить перестановку (1→5, 3→3, 5→7, 7→1, 9→9) к числу 5533997711, то получится другое число того же типа, а именно 7733991155. (Как сказали бы математики, «на нашем множестве действует группа перестановок пяти цифр».)

Сколько чисел можно получить из одного такими перестановками? («Сколько элементов в орбите одного числа при действии группы перестановок?») Разные перестановки дадут разные числа (поскольку все цифры входят, отличие проявится), поэтому получится $120 = 5!$ чисел в каждой группе. Такая группа соответствует разбиению всех разрядов числа (позиций в его записи) на пять классов (групп) — в каждом классе стоит одна и та же цифра. Можно сказать, что мы сначала разбиваем разряды на пять групп, а потом решаем, какую цифру назначить для каждой группы. Способов такого разбиения (на пять групп) будет $5\,103\,000/120 = 42\,525$ (из нашего рассуждения было сразу ясно, что поделится нацело).

Тот же вывод в общем случае: *число разбиений множества из n элементов на k различных классов равно $T(n, k)/k!$*. Если обозначить его через $S(n, k)$, то получается рекуррентная формула

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k).$$

Надо только отчётливо понимать, чтó именно мы подсчитываем, говоря о числе разбиений: разбиение определяется тем, какие позиции входят в один класс, а какие в разные (а, скажем, порядок перечисления классов не учитывается). Математики сказали бы, что мы подсчитываем «отношения эквивалентности на n-элементном множестве с k классами эквивалентности».

▷ Для чисел $S(n, k)$ есть традиционное название: *числа Стирлинга второго рода*. (Это тот же самый английский математик Стирлинг (1692–1770), который нашёл приближённую формулу для факториалов: $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.) ◁

7. Что дальше?

В предыдущих разделах мы разобрали базовые понятия и методы перечислительной комбинаторики из категории «это должен знать каждый». В этом разделе мы немного расскажем о более сложных результатах, приведя примеры биективных доказательств и простейших рассуждений с производящими функциями, укажем на вероятностный смысл комбинаторных задач и приведём список книг разного уровня о комбинаторике на русском языке.

7.1. Биективные доказательства

7.1.1. Диаграммы Юнга

Как мы уже видели в разделе 4, иногда можно доказать, что в двух множествах поровну элементов, установив между ними взаимно однозначное соответствие («биекцию»). Иногда это соответствие совсем простое, но не всегда — бывает, что равенство сначала доказали каким-то другим способом, а соответствие построили только позже (или вообще пока не построили). Вот немного более сложный пример биективного рассуждения.

$\boxed{\textbf{7.1}^*}$ Пусть n и k — целые положительные числа. Докажите, что количество разбиений числа n на целые положительные слагаемые, *не превосходящие* k, равно количеству разбиений числа n на *не более чем* k целых положительных слагаемых.

• Как и раньше, порядок слагаемых мы не учитываем. Скажем, для $n = 5$ и $k = 3$ можно перечислить разбиения 5 на не более чем 3 слагаемых:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

(пять вариантов, в первом единственное слагаемое, равное 5). Можно также перечислить разбиения 5 на слагаемые, не большие 3:

$$[5 =]\ 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Здесь 5 в скобках, потому что теперь оно уже не будет разбиением. Можно проверить, что мы ничего не пропустили (в обоих случаях слагаемые в разбиении указаны в убывающем порядке, а сами разбиения указаны в порядке убывания наибольшего слагаемого).

Видно, что и тех, и других разбиений поровну (5 при $n = 5$, $k = 3$). Требуется доказать, что их будет поровну и для всех других целых $n, k \geqslant 1$.

7.1.2. Числа Каталана

Много интересных биекций можно построить для разных определений чисел Каталана. Напомним, что мы рассматривали (задача 3.15) произведение n сомножителей, и считали, сколькими способами можно расставить в нём скобки, указывающие порядок действий (переставлять сомножители не разрешается). Это число способов, как мы уже упоминали, называется *числом Каталана* и обозначается C_{n-1} (так принято, так что C_4 — это число способов расставить скобки в произведении пяти сомножителей, а не четырёх).

$\boxed{\mathbf{7.2}^*}$ Докажите, что C_4 равно числу способов разрезать выпуклый 6-угольник диагоналями на треугольники, и вообще C_n равно числу способов разрезать выпуклый $(n+2)$-угольник диагоналями на треугольники.

• Скажем, четырёхугольник можно разрезать двумя способами (по одной диагонали и по другой) — и это соответствует C_2, или числу способов перемножить три множителя.

Важное уточнение: мы рассматриваем разрезания данного n-угольника, поворачивать его не разрешается (так что разрезания по разным диагоналям считаются разными разрезаниями).

▷ Можно также понять, сколько нужно диагоналей и сколько получится треугольников. Каждое разрезание увеличивает число частей на единицу, так что число треугольников на 1 больше числа диагоналей (вначале была одна часть). Если провести все диагонали из одной вершины, то будет $n - 3$ диагоналей и $n - 2$ треугольников. Но из подсчёта углов следует, что число треугольников не зависит от способа разрезания: сумма углов всех треугольников должна равняться сумме углов многоугольника, как ни разрезай. Так что при любом разрезании n-угольника будет столько же треугольников и диагоналей ($n - 2$ и $n - 1$ соответственно). ◁

▷ Дотошные люди попросят тут доказать, что действительно возникает взаимно однозначное соответствие. Хотя это и выглядит очень правдоподобно после рассматривания рисунка и других примеров, строгое доказательство прежде всего потребовало бы формального определения понятий «расстановка скобок для указания порядка дейтсвий» и «разрезания многоугольника на треугольники», что совсем не так просто (не зря в школьном курсе про многоугольники говорят без точных определений), так что мы не будем этого делать.

Аналогичным образом в следующей задаче мы тоже позволим себе описать соответствие неформально и декларировать его взаимную однозначность. ◁

7.3* Докажите, что C_n равно количеству двоичных слов длины $2n$ из n нулей и n единиц, в которых каждый начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей.

• На графике длины стека (снизу на рисунке) единицы, они же буквы p, сооответствуют участкам подъёма (вектор $(1,1)$), а нули, они же звёздочки, соответствуют участкам спуска (вектор $(1,-1)$). Другими словами, число Каталана C_n равно числу ломаных такого вида (с наклоном ± 1, повороты в вершинах клеток), идущих из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$ и не доходящих до оси абсцисс.

• Глядя на эти ломаные, можно доказать рекуррентную формулу для их числа — и убедиться, что эта та же формула, что и для чисел Каталана. Останется сравнить первые члены и заключить, что все члены совпадают (тем самым получив другое решение предыдущей задачи). Рекуррентную формулу можно получить так: посмотрим, в каком месте ломаная первый раз обращается в нуль (какое минимальное начало имеет поровну нулей и единиц), и разобьём ломаные на такие группы. Если это место фиксировано (скажем, после $2k$ членок последовательности — их чётное число, так как нулей и единиц поровну), то до и после этого места последовательность строится независимо. После него C_{n-k} вариантов (потому что это та же задача меньшего размера), а до него C_{k-1} (потому что участок до начинается с 1 и кончается 0, остаётся выбрать промежуток между ними).

7.1.3. Метод отражений и формула для чисел Каталана

Оказывается, можно построить ещё одно взаимно-однозначное соответствие и с его помощью найти явную формулу для чисел Каталана. Мы уже видели, что надо подсчитать число ломаных из $(1,1)$ до $(2n+1,1)$, *целиком идущих* (строго) *выше оси абсцисс*. Если отбросить это последнее условие, то число ломаных равнялось бы числу последовательностей из n нулей и n единиц, то есть C_{2n}^n. Теперь из этого числа надо вычесть ломаные, *доходящие* до оси абсцисс — и их число можно найти, построив взаимно однозначное соответствие. (Говоря о ломаных, мы всюду имеем в виду ломаные с наклоном ± 1, идущие по диагоналям клеток.)

7.4* Постройте взаимно однозначное соответствие между ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,1)$, доходящими до оси абсцисс (в том числе пересекающими её), и *всеми* ломаными из $(1,1)$ в $(2n+1,-1)$.

Теперь уже легко указать формулу для чисел Каталана.

7.5* Докажите, что $C_n = C_{2n}^n/(n+1)$

Мы привели только несколько примеров, когда построение взаимно однозначного соответствия позволяет найти число элементов в интересующем нас множестве. Есть целый список таких задач (R. Stanley, `https://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf`) разной сложности, включая некоторые нерешённые. Но, пожалуй, даже более удивительно то, что иногда можно найти ответ совсем другими методами — и сейчас мы приведём несколько (самых простых) примеров такого рода.

7.2. Производящие функции

Перечислительная комбинаторика удивительным образом связана с другими разделами математики. Мы уже видели (в разделе 3), что числа сочетаний можно определить как коэффициенты многочлена $(1+x)^n$, и это сразу же позволяет получить разные следствия, скажем, найти сумму $\sum_{k=1}^n 2^k C_n^k$ (задача 5.13), или найти сумму квадратов всех C_n^k при данном n (задача 5.16). Если немного знать анализ и уметь дифференцировать многочлены, можно легко получить ещё несколько следствий.

7.6* Какое тождество получится, если продифференцировать биномиальное разложение для $(1+x)^n$?

Можно подставить $x = 1$ и получить тождество

$$n2^{n-1} = 0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \ldots + n \cdot C_n^n,$$

но его и без этого легко понять. (Мы добавили для красоты и C_n^0 с нулевым коэффициентом.)

7.7* Как доказать это равенство без дифференцирования?

• Другие — не столь очевидные — тождества получатся, если подставить не $x = 1$, а, скажем, $x = -1$ или $x = -2$.

Дифференцирование можно применять и дальше.

7.8* Найдите сумму

$$0^2 \cdot C_n^0 + 1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \ldots + n^2 \cdot C_n^n.$$

Говорят, что $(1+x)^n$ является *производящей функцией* для биномиальных коэффициентов. Вообще производящей функцией для последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называется ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

— бесконечный, если в последовательности бесконечно много ненулевых членов.

• Какой смысл имеют бесконечные ряды и какие действия по каким правилам с ними можно выполнять — вопрос сложный. Мы сейчас не будем в это вдаваться, и действовать с ними как если бы они были конечными (на самом деле наши действия можно оправдать, если разобраться).

Пусть p_n — число разбиений целого $n \geqslant 0$ на положительные целые слагаемые (без учёта порядка слагаемых). Мы полагаем $p_0 = 1$ (можно условно сказать, что число 0 можно единственным образом представить в виде суммы целых положительных слагаемых, взяв сумму из нуля слагаемых). Производящую функцию для p_n можно разложить в бесконечное произведение (мы это уже упоминали, говоря о пентагональной теореме Эйлера в разделе 3):

7.9* Докажите, что $p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n + \ldots$ можно представить как

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)\ldots$$

Здесь в k-й скобке стоит $1+x^k+x^{2k}+\ldots$, то есть использованы все степени, кратные k (начиная с нулевой).

7.10* Что изменится, если оставить в каждой скобке по два члена и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^k)\ldots$$

— производящая функция какой последовательности задаётся таким произведением?

7.11* Что изменится, если оставить в произведении предыдущей задачи только степени двойки и написать

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^k})\ldots$$

▷ Можно пойти дальше и «вычислить» сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

мы это упоминали, говоря о пентагональной теореме, но в данный момент это нам ни к чему. ◁

$\boxed{\textbf{7.12}^*}$ Докажите, что *число разбиений на нечётные слагаемые равно числу разбиений на различные слагаемые.*

• Мы рассматриваем разбиения какого-то целого положительного числа в n сумму целых положительных слагаемых (без учёта порядка) с двумя видами ограничений: (а) все слагаемые нечётны; (б) все слагаемые различны. (Скажем, при $n = 6$ получаем разбиения $5+1$, $3+3$, $3+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1$ для нечётных слагаемых и 6, $5+1$, $4+2$, $3+2+1$ для различных слагаемых.)

Это рассуждение выглядит удивительно (и требует обоснования законности наших действий), но его (в отличие от многих других рассуждений с производящими функциями) можно перевести на язык взаимно однозначных соответствий.

$\boxed{\textbf{7.13}^*}$ Пусть n — целое положительное число. Постройте взаимно однозначное соответствие между разложениями n на нечётные слагаемые и разложениями n на различные слагаемые.

$\boxed{\textbf{7.14}^*}$ Покажите, что производящая функция для чисел Фибоначчи

$$T(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$$

удовлетворяет соотношению

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1$$

(если перемножить формально и привести подобные члены в бесконечной сумме).

▷ Отсюда можно заключить (особенно если забыть о смысле и обоснованиях), что $T(x) = 1/(1-x-x^2)$. Дальше можно разложить $(1-x-x^2)$ на линейные множители и затем разложить дробь типа $1/(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, как говорят математики, *в сумму простейших*, то есть в сумму $a_1/(x-\alpha_1) + a_2/(x-\alpha_2)$. Для этого полезно временно заменить числитель на $(x-\alpha_1)-(x-\alpha_2)$. После этого можно вспомнить, что дроби вида $1/(x-a)$ разлагаются в ряд, и получится формула для чисел Фибоначчи с суммой двух геометрических прогрессий. ◁

7.15* Используя определение чисел Каталана с помощью рекуррентной формулы $C_0 = 1$,

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_kC_{n-1-k} + \ldots + C_nC_0,$$

напишите тождество для производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + \ldots$$

(в него войдёт её квадрат).

▷ Отсюда можно найти выражение с корнем для $C(x)$ по формуле квадратного уравнения. Если затем применить формулу бинома для этого квадратного корня (с полуцелым показателем), то можно получить формулу для чисел Каталана, которую мы доказали другим способом, с отражением ломаных. ◁

7.3. Комбинаторика и вероятности

Часто комбинаторные задачи формулируют в вероятностных терминах. Объясним на примере, как это делается.

Рассмотрим *вероятностный эксперимент*, состоящий в том, что мы трижды бросаем игральную кость и записываем, какое число (от 1 до 6) выпало. *Исходом* (результатом) такого эксперимента будет последовательность из трёх чисел от 1 до 6 (трёхбуквенное слово в шестибуквенном алфавите).

7.16* Считая все исходы равновероятными, определить вероятность событий «выпали три шестёрки», «выпала ровно одна шестёрка», «выпала хотя бы одна шестёрка».

• Другими словами, нужно найти отношения числа «благоприятных исходов» (подпадающих под описание события) к общему числу возможных исходов.

Можно проверить свою вероятностную интуицию, попытавшись сначала угадать ответ, а потом проверить.

7.17* Что вероятнее при шести бросаниях кубика — не выбросить ни одной шестёрки или выбросить хотя бы одну шестёрку?

▷ Вероятность 1/6 часто объясняется как «один из шести раз». Если бы действительно каждый шестой раз (через пять неудач) выпадала бы шестёрка, то при шести бросаниях она была бы наверняка. Но на деле вероятность совсем не близка к 1 (хоть и больше 50%). ◁

Примерно так же можно посчитать вероятность разных событий, связанных с лотереями и т.п. Скажем, во времена СССР была лотерея «Спортлото»[12], в которой играющий покупал карточку за 30 копеек (=0,3 рубля), на которой были написаны числа от 1 до 49. Он должен был зачеркнуть шесть из этих чисел, и отправить билет организаторам до определённого дня. После этого дня происходил «тираж», вероятностный эксперимент, где с помощью «лототрона» выбирались шесть (различных) выигрышных номеров от 1 до 49. Билет был выигрышным, если было хотя бы три общих номера (если больше, то выигрыш был больше).

7.18* Найдите вероятность выиграть в «Спортлото» ровно с тремя выигрышными номерами.

Во многих случаях комбинаторную задачу можно представить в вероятностных терминах.

7.19* Сто человек хотят уплатить по рублю, при этом у половины из них по рублёвой монете (оплата без сдачи), а у половины по двухрублёвой монете. Они становятся в очередь в случайном порядке. Какова вероятность того, что всем удастся расплатиться, если у кассира перед открытием кассы никакой сдачи нет?

7.20* У Маши есть кубик, шесть граней которого окрашены в шесть разных цветов. Миша, будучи в гостях у Маши, решил сделать себе такой же кубик, и запомнил эти цвета (но не запомнил, как они располагались на кубике). Придя домой, он взял такой же кубик и случайным образом раскрасил его грани в те же шесть цветов. Какова вероятность, что у него получится точная копия кубика Маши? (Это значит, что кубик Миши можно так повернуть, чтобы цвета были точно такие же, как у Маши.)

▷ Математическая теория вероятностей не сводится к комбинаторике. Можно рассматривать неравновероятные исходы, или эксперименты с бесконечным числом исходов (где, скажем, исходом может быть точка на плоскости: «бросаем случайную точку в квадрат»). Помимо событий и вероятностей, центральную роль в теории вероятностей играют *случайные величины* и их *математические ожидания*. Даже если ограничиваться событиями, то появляется важное понятие *условной вероятности* и *независимости событий*.

[12]«Если вы не отзовётесь, мы напишем в Спортлото», пел Высоцкий.

На практике нас могут интересовать не точные значения вероятностей, а какие-то приближения для них, или оценки сверху. Скажем, получив какую-то астрономически малую вероятность для неблагоприятного стечения обстоятельств, мы можем это стечение обстоятельств не учитывать при планировании.[13] Одна из базовых верхних оценок — *закон больших чисел*. В простейшей ситуации он означает, что в дальних строках треугольника Паскаля основная масса сосредоточена около их центра. Скажем, если мы просуммируем 1% всех чисел строки, стоящих в интервале вокруг середины, то их сумма составит больше 99% суммы всех чисел строки (соответствующей степени двойки). Можно изучать, как ведут себя числа в треугольнике Паскаля около середины — оказывается, что их график при правильном масштабе близок к графику функции $e^{-x^2/2}$ (гауссово, или нормальное распределение). И многое другое — мы привели только два простых примера.

В общем, математическая теория вероятностей — отдельная интересная наука, но начинается она с базовых комбинаторных задач, так что разобранные нами задачи — хорошее начало для знакомства с ней. $\triangleleft$

7.4. Литература

Материалы для школьников, популярные изложения

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев, *Введение в комбинаторику (по материалам лекций академика И. М. Гельфанда). Методические разработки для учащихся ВЗМШ*. Москва, 1989, `https://archive.org/details/combinatorics1989`

Сборник задач (часть с решениями), рассылавшийся ученикам Всесоюзной Заочной Математической Школы (организованной в середине 1960-х И. М. Гельфандом и его сотрудниками). Рассчитан на школьников с минимальной предварительной подготовкой.

В. А. Успенский, *Треугольник Паскаля*, 2-е изд., Москва, Наука, 1979 (Популярные лекции по математике, выпуск 43), `https://math.ru/lib/plm/43`.

По материалам лекции для школьников (в предисловии написано, что «Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы» — хотя это всё

[13] А если оно потом произойдёт, например, потому, что наши вероятностные модели были неправильными, что ж — значит, случился «чёрный лебедь», как теперь модно говорить.

же небольшое преувеличение.) Начиная с рекуррентного определения треугольника Паскаля, Успенский обсуждает комбинаторный смысл его элементов, бином Ньютона и соотношения между биномиальными коэффициентами. (Попутно там поучительное обсуждение того, что значит «решить комбинаторную задачу».)

Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, Наука, 1969.

Разбираются разные комбинаторные задачи, большинство сформулировано в житейских терминах с элементами «оживляжа», но несмотря на такую «занимательность», разобрано много разных интересных (и не таких простых) вещей.

Н. Я. Виленкин, *Популярная комбинаторика*, Москва, Наука, 1975, `https://math.ru/lib/book/djvu/combinatorika.djvu`

Частично пересекается с предыдущей книгой (и сохраняет её стиль), но есть много нового материала, выходящего за рамки *перечислительной* комбинаторики.

Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин, *Комбинаторика*, Москва, ФИМА, МЦНМО, 2006.

Содержит материалы двух предыдущих книг. Подготовлена к печати уже после смерти Н.Я. его сыном и внуком.

Журнал «Квант», `http://www.kvant.info/`, `http://kvant.mccme.ru/`

В разные годы публиковал много материалов о комбинаторике

С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс, *Математический дивертисмент*, Москва, МЦНМО, 2011.

Сборник рассказов на разные математические темы (в том числе комбинаторные); часть из них написана на основе статей авторов в «Кванте»ю

Е Ю. Смирнов, *Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы*, Москва, МЦНМО, 2014, `https://users.mccme.ru/smirnoff/papers/dubna14.pdf`

Записки лекций, прочитанных в летней школе для школьников и студентов-младшекурсников.

Учебники для студентов и не только

Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*, Москва, Мир, 1990.

Классический учебник по перечислительной комбинаторике (первый том, переведённый на русский язык). Информация о втором томе и другие материалы: `https://math.mit.edu/~rstan/ec/`.

М. Холл, *Комбинаторика*, Москва, Мир, 1970.

Не только перечислительная комбинаторика, но и многое другое.

С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях, 3-е изд., Москва, МЦНМО, 2007,
`https://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf`

По материалам лекций, читавшихся автором в Независимом Московском университете.

Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. *Конкретная математика. Основание информатики.* Перевод Б. Б. Походзея и А. Б. Ходулёва под редакцией А. Б. Ходулёва. Москва, Мир, 1998,
`https://archive.org/details/Konkretnaya-matematika-Osnovaniye-informatiki-Grehem-Knut-Patashnik-1998`

Биномиальные коэффициенты и тождества для них — глава 5, производящие функции — глава 7.

8. Пентагональная теорема Эйлера

8.1. Формулировка

Мы уже упоминали (с. 24) пентагональную теорему Эйлера, которая утверждает, что

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}+\ldots$$

В правой части удивительным образом коэффициенты равны ± 1, знаки чередуются парами, а степени получаются по формулам $k(3k \mp 1)/2$.

$\boxed{\mathbf{8.1}^*}$ Почему бесконечное произведение в левой части имеет смысл (не придётся складывать бесконечно много подобных членов)?

$\boxed{\mathbf{8.2}^*}$ Формула утверждает, что в бесконечном произведении все коэффициенты — плюс-минус единицы. Убедитесь, что для конечных произведений это не всегда так (могут появиться и другие коэффициенты, которые потом полностью или частично сократятся).

$\boxed{\mathbf{8.3}^*}$ Проверьте, что ту же самую формулу Эйлера можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

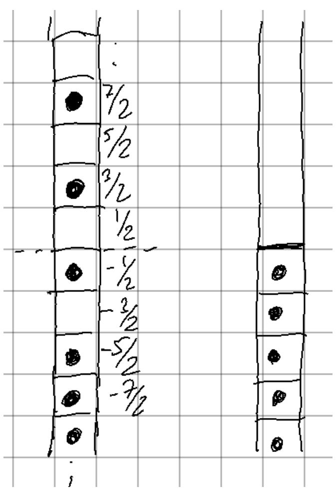
Одно из доказательств этой формулы использует комбинаторное соответствие, которое физики называют *бозонно-фермионным* — но его можно понять безо всякой физики (не считая терминологии).

8.2. Фермионы

Рассмотрим бесконечный вниз и вверх столб из коробок. Каждая коробка может быть пустой, или в ней может лежать шар (только один). При этом мы считаем, что все достаточно высокие коробки пусты, а все достаточно низкие (глубокие) заполнены. Будем называть такую конфигурацию (шаров в коробках) *состоянием*. Следуя физикам, будем называть коробки *уровнями*, а шары — *фермионами*. (Так называют частицы, которые не могут быть вместе на одном уровне, в отличие от *бозонов*, о которых ещё будет речь.)

Уровни можно нумеровать снизу вверх целыми числами, но нам будет удобно нумеровать их *полуцелыми* числами, и называть эти числа *энергией* фермиона на соответствующем уровне: у нас есть уровни с энергией $\ldots, -7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \ldots$. На рисунке слева показано состояние, где на положительных уровнях есть два фермиона с энергиями $3/2$ и $7/2$, а отрицательные уровни заполнены все, кроме одной дырки с энергией $-3/2$. На рисунке справа показано *основное состояние*, где все отрицательные уровни энергии заполнены, а все положительные — нет.

Из одного состояния можно получить другое, добавив шар, забрав шар или переложив шар с одного места на другое. Так можно перейти в любое другое состояние после конечного числа действий (напомним, что мы требуем, чтобы все достаточно высокие состояния были пусты, а все достаточно низкие заполнены).



$\boxed{\textbf{8.4}^*}$ Нельзя говорить об общем количестве фермионов в состоянии или об их общей энергии, потому что получаются бесконечные суммы. Но можно определить *разницу* в количестве фермионов или энергии для двух состояний. Какова эта разница для двух состояний на рисунке? Как её определить в общем случае?

$\boxed{\textbf{8.5}^*}$ Покажите, что разницы в предыдущей задаче (8.4) определены корректно в следующем смысле: если есть три состояния A, B, C, то разница между состояниями C и A равна сумме разниц между C и B и между B и A.

$\boxed{\mathbf{8.6}^*}$ У какого состояния энергия минимальна?

Для удобства мы будем говорить о *количестве* фермионов или об *энергии*, приняв за точку отсчёта основное состояние, то есть в основном состоянии будем считать оба параметра равными нулю.

В отличие от энергии, количество фермионов (по сравнению с основным состоянием) может быть и отрицательным (возможно любое целое число).

Перекладывание шара (перемещение фермиона) с одного уровня на другой не меняет их количество, но меняет энергию (на некоторое целое число, разницы энергий между уровнями целые), добавление или удаление шара меняет и количество (на единицу), и энергию (на некоторое полуцелое число).

Разделяя положительные и отрицательные уровни, можно сказать, что число фермионов равно разнице между числом фермионов на положительных уровнях и числом дырок на отрицательных уровнях.

$\boxed{\mathbf{8.7}^*}$ Как изменится число фермионов в состоянии, если всю конфигурацию сдвинуть (как единое целое) вверх на один уровень? (Заметим, что при этом она останется корректной в смысле хвостов.)

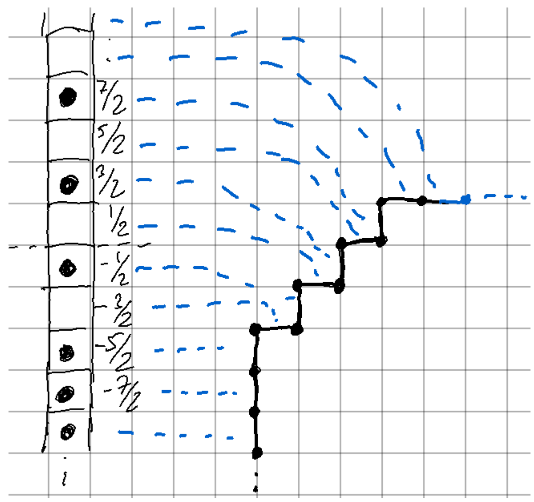
$\boxed{\mathbf{8.8}^*}$ Как изменится энергия основного состояния после сдвига на N уровней вверх? Покажите, что то же самое изменение будет и для любого состояния с нулевым числом фермионов.

Всё сказанное даёт такую картину: если разбить состояния на классы, отличающиеся сдвигами, то в каждом классе есть одно «сбалансированное» состояние с нулевым числом фермионов, из которого все остальные получаются сдвигами: сдвиг на N вверх даёт состояние с N фермионами (поэтому состояния внутри класса можно однозначно задавать числом фермионов). Что касается энергий, то среди всех состояний класса минимальную энергию имеет состояние с нулевым числом фермионов, если сдвинуть его на N в любую сторону, то энергия возрастёт на $N^2/2$.

Классы можно поставить во взаимно однозначное соответствие с диаграммами Юнга, и сейчас мы увидим, как это сделать.

8.3. Бозонно-фермионное соответствие

Пусть дано некоторое состояние, то есть способ заполнения уровней фермионами. Просматривая состояние снизу вверх, нарисуем ломаную на клетчатой бумаге: заполненный уровень соответствует шагу вверх, а пустой уровень соответствует шаг вправо.

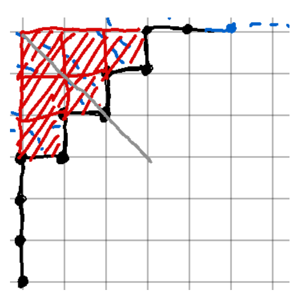


На картинке пунктиром показано, какой уровень какому звену ломаной соответствует.

Наше условие на состояния (что снизу с какого-то места всё заполнено, а сверху пусто) означает, что ломаная приходит вертикально снизу вверх, а уходит горизонтально вправо.

Наоборот, каждая такая ломаная из шагов вверх и вправо (приходящая вертикально снизу и уходящая горизонтально вправо) соответствует состоянию — вернее, состоянию с точностью до сдвига, потому что на ломаной не написано, где какие энергии. Чтобы задать состояние полностью, нужно ещё отметить, в каком месте ломаная переходит из зоны отрицательных энергий в зону положительных.

Глядя на такую картинку, хочется заделать откушенный угол, добавив недостающее:



Эта недостающая часть представляет собой диаграмму Юнга (мы говорили о них в разделе 7.1.1). Таким образом, каждому классу состояний (с точностью до сдвига) соответствует диаграмма Юнга, и это соответствие взаимно однозначно, как показывает следующая задача.

8.9* Как по диаграмме Юнга восстановить состояние (с точностью до сдвига)?

8.10* Какая диаграмма соответствует основному состоянию?

Несложно понять, где нужно поставить на ломаной точку перехода от отрицательных энергий к положительным, чтобы получить сбалансированное состояние (где фермионов сверху столько же, сколько дырок снизу) — ответ даёт следующая задача.

8.11* Докажите, что для сбалансированного состояния граница между отрицательными и положительными энергиями проходит на пересечении ломаной с биссектрисой прямого угла (которую мы заранее нарисовали).

• Такое пересечение единственно: каждый шаг вверх или вправо приближает нас к биссектрисе, пока мы её не достигнем, а потом отдаляет от неё.

Оказывается, что и энергия имеет ясный смысл в терминах диаграмм.

8.12* Докажите, что энергия сбалансированного состояния равна числу клеток в соответствующей диаграмме.

8.4. Производящие функции и тройное тождество

После этой подготовки можно начать двигаться в сторону тождеств и пентагональной теоремы. Заметим, что каждому состоянию s (размещению фермионов по уровням) соответствуют два числа: число фермионов $N(s)$ и энергия $E(s)$ — обе величины берутся в сравнении с основным состоянием. Число $E(s)$ — целое, а $N(s)$ — полуцелое. Бывает, что для каких-то двух разных состояний значения E и N совпадают, так что все состояния делятся на группы. Нас интересует, сколько состояний будет в каждой группе.

В терминах производящих функций можно сказать так. Рассмотрим бесконечную сумму

$$\sum_s q^{E(s)} z^{N(s)}, \tag{$*$}$$

в которой суммирование происходит по всем состояниям s, и приведём в ней подобные члены.

$\boxed{\mathbf{8.13}^*}$ Чему будет равен коэффициент при $q^e z^n$ в получившейся формальной (двумерной) сумме?

$\boxed{\mathbf{8.14}^*}$ Докажите, что бесконечная сумма ($*$) равна произведению

$$(1+q^{1/2}z)\cdot(1+q^{3/2}z)\cdot(1+q^{5/2}z)\cdot\ldots\cdot(1+q^{1/2}z^{-1})(1+q^{3/2}z^{-1})(1+q^{5/2}z^{-1})\cdot\ldots$$

• Это произведение состоит из двух бесконечных групп скобок. Его можно понимать так: мы «раскрываем скобки», то есть всевозможными способами выбираем в каждой скобке одно из слагаемых, причём неединицу можно выбрать только конечное число раз, и такие произведения складываем и приводим подобные члены. Заметим, что каждый неединичный множитель увеличивает степень q по крайней мере на 1/2, так что подобных членов будет только конечное число.

В более компактной форме это бесконечное произведение можно записать как

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)$$

Теперь вспомним о бозонно-фермионном соответствии и заметим, что в исходной сумме по всем состояниям можно сгруппировать состояния, отличающиеся сдвигом. Если мы знаем число частиц и энергию для сбалансированного состояния в этой группе, то после сдвига на N число частиц увеличится на N, а энергия увеличится на $N^2/2$. (Здесь N может быть любым целым числом; если оно отрицательно, то число частиц уменьшается, а энергия всё равно увеличивается.) Из одного слагаемого в сумме, соответствующего сбалансированному состоянию, получится двусторонний ряд слагаемых, получающихся из исходного умножением на

$$F=\sum_{N=-\infty}^{\infty} z^N q^{N^2/2}$$

Поэтому достаточно вычислить сумму для всех сбалансированных состояний, а потом результат умножить на F. А сбалансированные состояния в точности соответствуют диаграммам Юнга, у них число фермионов равно 0 (и переменную z в нулевой степени можно опустить), а энергия равна площади, так что сумма по сбалансированным состояниям равна

$$\sum_{y} q^{E(y)},$$

где сумма берётся по всем диаграммам Юнга, а $E(y)$ — число клеток (площадь) диаграммы y. В этой сумме коэффициент при q^e равен числу диаграмм Юнга из e клеток. Диаграммы Юнга из e клеток соответствуют разбиениям числа e на положительные слагаемые (как мы обсуждали в разделе 7.1.1), так что получается производящая функция для числа разбиений (задача 7.9), равная

$$(1+q+q^2+q^3+\ldots)(1+q^2+q^4+q^6+\ldots)(1+q^3+q^6+q^9+\ldots)\ldots$$

Суммируя бесконечные геометрические прогрессии, можно было бы записать последнее произведение как

$$\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdot\frac{1}{1-q^3}\cdot\ldots$$

но удобнее не выходить за пределы формальных рядов (избегая деления), так что можно умножить на обратное произведение

$$(1-q)\cdot(1-q^2)\cdot(1-q^3)\cdot\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),$$

чтобы оно сократилось с производящей функцией для числа разбиений. Собирая всё сказанное вместе, мы видим, что два различных способа вычисления суммы $(*)$ — непосредственный и с переходом к диаграммам Юнга — дают равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-\frac{1}{2}}\cdot z^{-1}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{N=-\infty}^{\infty} z^N q^{N^2/2}$$

Это тождество для рядов объединяет в себе бесконечное число тождеств, соответствующих равенству коэффициентов левой и правой частей при $z^n q^e$ для всех пар (n,e), и называется «тройным тождеством Якоби».

▷ Это тождество было доказано Карлом Густавом Якобом Якоби (1804–1851) в 1829 году. Приведённое нами доказательство придумали ????? ◁

8.5. Доказательство пентагональной теоремы

Из тройного тождества легко вывести пентагональную теорему, надо только сделать несколько подстановок.

8.15* Что получится, если подставить в это тождество $z = -q^{-1/6}$?

Видно, что после такой подстановки в левой части есть три серии показателей степеней: целые положительные, они же минус 1/3 и они же минус 2/3.

8.16* Замените в этой формуле q на q^3, объедините эти три серии в одну и получите пентагональную теорему Эйлера.

• В этих рассуждениях мы свободно обращались с бесконечными суммами и произведениями, как если бы к ним были применимы обычные правила алгебры и не заботясь об обосновании этих действий. Но вообще-то тут недалеко и до абсурда. Скажем, если перемножать геометрические прогрессии и написать

$$(1 + z + z^2 + \ldots)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{z}{1-(2z-z^2)},$$

затем в правой части воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии в обратную сторону, написав

$$-\frac{z}{1-(2z-z^2)} = -z(1 + (2z - z^2) + (2z - z^2)^2 + \ldots) = -z - 2z^2 - 3z^3 - \ldots,$$

а затем сравнить коэффициенты при разных степенях z в левой и правой части, то получится, что бесконечная сумма из единиц равна одновременно 0, -1, -2 и т. д. По-хорошему, конечно, надо внимательно следить, что все наши выражения имеют смысл (то есть что не получается бесконечного числа подобных членов) и что наши преобразования законны (скажем, что можно перемножать сомножители в любом порядке). Для нашего случая тут никаких принципиальных сложностей нет, но мы этого делать не будем.

После всего сказанного уже несложно понять, как связана пентагональная теорема с рекуррентным соотношением для чисел разбиений.

8.17* Выведите из пентагональной теоремы рекуррентное соотношение для количества T_n разбиений n на слагаемые

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-5} - T_{n-7} + T_{n-12} + T_{n-15} - T_{n-22} - T_{n-26} + \ldots$$

▷ Пентагональную теорему мы доказали, но кто такие бозоны? *Фермионы* для нас — шары, которые можно класть в коробки (уровни) с полуцелыми номерами (энергиями на соответствующих уровнях), причём в одну коробку помещается не больше одного шара (два фермиона не могут иметь одну энергию). Рассмотрим теперь столб из коробок, бесконечный только вверх (уровни 1, 2, 3, ...) и при этом разрешим в каждый ящик класть сколько угодно шаров. Шары нового типа будем называть *бозонами*. Легко понять, что размещения бозонов с общей энергией E соответствуют разбиениям числа E: каждый бозон на уровне k соответствует слагаемому, равному k (и таких слагаемых может быть несколько, как бозонов в одном ящике — или может не быть вообще). А такие разбиения соответствуют диаграммам Юнга. На этом языке основной шаг доказательства можно изложить так: *каждому размещению фермионов с точностью до сдвига взаимно однозначно соответствует размещение бозонов* с энергией, равной минимальной энергии размещений фермионов среди всех сдвигов.

Как рассказывают физики, все элементарные (на самом деле — не только элементарные) частицы делятся на *бозоны* и *фермионы*. Согласно их теориям, бозоны — частицы с целым *спином* — переносчики взаимодействий. Важнейшим из бозонов для нас является *фотон* (квант света). Бозоны могут занимать одно и то же состояние, например один и тот же уровень энергии, даже если этот уровень *невырожден* (одномерен). А фермионы — частицы материи — имеют полуцелый спин. Например таковы *электроны*, и они не могут занимать один и тот же уровень энергии.

Как уточняют математики, состояния и бозонов, и фермионов описываются элементами *векторных пространств*. Но состояние со многими бозонами одной природы описывается элементом *симметрической алгебры* бозонного векторного пространства, тогда как состояние со многими фермионами — элементом *внешней алгебры* фермионного.

Идея, что частицы делятся на два класса (бозоны и фермионы) принадлежит основоположникам квантовой механики — Вольфгангу Паули, Альберту Эйнштейну, Полю Дираку, Энрико Ферми и Шатьендранату Бозе. Дирак, предложив своё уравнение для частиц с полуцелым спином, столкнулся с проблемой: согласно этому уравнению, энергия электрона не ограничена снизу. Это противоречит интуиции, так как роняя электрон на достаточно глубокий уровень, можно было бы получать сколько угодно энергии. Дирак предположил, что все уровни с отрицательной энергией — кроме, быть может, конечного числа — уже заняты. Такая конфигурация называется *морем Дирака*. Отсутствие частицы на отрицательном уровне может быть также интерпретировано, как наличие (анти)частицы с положительной энергией, так как для создания такого состояния необходимо эту энергию потратить. Так Дирак предсказал существование *позитрона* (1929) — а к 1932 году эти самые позитроны уже были обнаружены, за что Карл Дэвид Андерсон получил нобелевскую премию 1936 года (Дирак получил свою в 1933 году).

А что сделали вы? ◁