§4.

Сигнатурой будем называть произвольное конечное множество предикатных символов с указанной валентностью (= количеством аргументов) каждого символа.

Структурой сигнатуры $\sigma = (P_1, \ldots, P_n)$ называется, как обычно, непустое множество M (носитель структуры) вместе с отношениями $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$ на M такими, что количество аргументов отношения $\bar{P}_i$ равна валентности P_i.

Определим понятие *древесного напарника* структуры $\langle M, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n \rangle$. Это структура сигнатуры $\bar{\sigma} = (P_1, \ldots, P_n, Q)$, где Q — двуместный символ. Ее носитель — множество M^* всех слов в алфавите M, которое мы по аналогии с двоичным деревом назовем *деревом с M-ветвлением* или *деревом ветвления M* (так что, двоичное дерево — это дерево {Л,П}-ветвления). Предикат Q интерпретируется отношением $\bar{Q}$ "быть сыном", т.е. $\bar{Q}(u, v)$ означает, что для некоторого $m \in M$ выполнено $u = vm$. Символ P_i интерпретируется отношением $\bar{\bar{P}}_i$, истинным на элементах $v_1, \ldots, v_k$ (где k — валентность P_i), если существуют $v \in M^*$ и $m_1, \ldots, m_k \in M$ такие, что $v_1 = vm_1, \ldots, v_k = vm_k$ и $\bar{P}_i(m_1, \ldots, m_k)$. То есть $\bar{\bar{P}}_i$ истинно на $v_1, \ldots, v_k$, если $v_1, \ldots, v_n$, лежат "в одном веере" и их последние буквы удовлетворяют $\bar{P}_i$.

Чтобы сформулировать обобщение теоремы Рабина, надо дать определение монадической теории произвольной структуры, которое было дано в §1 для структуры (двоичное дерево, L, R). Определение в общем случае получается из того определения заменой атомарных формул $L(x, y), R(x, y)$ формулами вида $P(x_1, \ldots, x_k)$, где P — любой символ из сигнатуры, k — его валентность, $x_1, \ldots, x_k$ — индивидные переменные.

Шелах и Ступ доказали следующее обобщение теоремы Рабина.

ТЕОРЕМА (Шелах, Ступ). *Если монадическая теория структуры разрешима, то и монадическая теория ее древесного напарника разрешима.*

Если применить эту теорему к структуре ({Л,П}, одноместное отношение "быть равным Л"), то получается теорема Рабина.

Мы обобщим теорему Шелаха-Ступа, усилив взаимодействие различных вееров между собой. Например, мы хотим, чтобы в монадической теории древесного напарника были выразимы отношения $\bar{P}_i$ от последних букв слов одного веера и их общей предпоследней буквы. Для этого достаточно ввести в сигнатуру древесного напарника одноместный предикат равенства последней и предпоследней буквы слова.

Итак, начиная с этого места, древесным напарником структуры $(M, \bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n)$ будем называть структуру $(M^*, \bar{\bar{P}}_1, \ldots, \bar{\bar{P}}_n, \bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{R}})$, где

$M^*, \bar{\bar{P}}_1, \ldots, \bar{\bar{P}}_n, \bar{\bar{Q}}$ — те же, что и раньше, а $\bar{\bar{R}}$ одноместное отношение равенства последней и предпоследней буквы слова. На пустом слове и однобуквенных словах будем считать $\bar{R}$ истинным.

Теорема 6. *Если монадическая теория структуры разрешима, то и монадическая теория ее древесного напарника (в новом смысле) разрешима.*

Заметим, что усилить эту теорему добавлением предикатов, допускающих взаимодействие последней и предпредпоследней буквы слова, нельзя. Точнее, если добавить к древесному напарнику Шелаха-Ступа одноместное отношение "последняя и предпредпоследняя буква слова равны", то может получиться неразрешимая теория. А именно, если в качестве исходной взять структуру $(N, <)$, монадическая теория которой, как известно, разрешима, то в монадической теории древесной структуры будет моделироваться двусчетчиковая машина, т.е. по любой двусчетчиковой машине можно построить монадическую формулу, истинную тогда и только тогда, когда машина останавливается. Двусчетчиковые машины же моделируют машины Тьюринга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 6. Доказательство проходит параллельно доказательству теоремы Рабина. Перенесем понятия, использованные в доказательстве теоремы Рабина, на наш случай.

Σ-деревья M-ветвления определяются очевидным образом. Можно по аналогии с понятием автомата на двоичных Σ-деревьях дать понятие автомата на Σ-деревьях M-ветвления (для любого M). Однако нам понадобится понятие автомата, отличающееся от этого естественного обобщения. А именно, состояние автомата в сыне u вершины v может зависеть не только от состояния автомата в вершине v, пометки вершины v и последней буквы u, но и от последней буквы v (если v не пустое слово). Более формально, по сравнению с автоматом на двоичных Σ-деревьях изменяется только определение перехода и таблицы переходов. *Переходом* теперь называется четверка $\langle s, a, m, f \rangle$, где s, a — состояние и буква, $m \in M$, а $f\colon M \longrightarrow S$ (S — множество состояний). Таблицей переходов может быть произвольное монадически выразимое множество переходов. Множество переходов T называем (монадически) выразимым, если существует монадическая формула $\varphi(s, a, m, f)$ такая, что переход $\langle s, a, m, f \rangle$ принадлежит T тогда и только тогда, когда формула $\varphi(s, a, m, f)$ истинна в M.

Здесь следует оговориться. Выразительные возможности монадического языка не изменяется, если в язык добавить:

(1) для любого фиксированного конечного множества A, переменные по элементам множества A, и все константы из A.

(2) для любого фиксированного конечного множества A, переменные

по функциям из носителя структуры в A, и для такой переменной f и индивидной переменной x разрешить применение выражения $f(x)$,

(3) кванторы по переменным первого и второго типа,

(4) предикат равенства.

Точнее, по любой формуле расширенного таким образом монадического языка можно построить эквивалентную ей формулу монадического языка.

Как и раньше, будем называть *переходами автомата* $\mathcal{A}$ переходы, принадлежащие его таблице переходов. Автомат $\mathcal{A}$ называется *правильным*, если его переходы из начального состояния s_0 не зависят от последней буквы вершины, т.е. если для всех a, m, m', f выполнено

$$\langle s_0, a, m, f\rangle \text{ — \textit{переход} } \mathcal{A} \iff \langle s_0, a, m', f\rangle \text{ — \textit{переход} } \mathcal{A} \qquad .$$

Если G — размеченное дерево, то будем обозначать через $G(x)$ пометку вершины x в G. Определим понятие хода правильного автомата $\mathcal{A}$ на Σ-дереве D M-ветвления. Это — любое S-дерево H M-ветвления такое, что

1) $H(\Lambda) = s_0$.

2) Для всех $x \in M^*$ переход $\langle H(x), D(x), m, f\rangle$ принадлежит таблице переходов, где m и функция $f\colon M \longrightarrow S$ определены следующим образом: m — это последняя буква x, если $x \neq \Lambda$, и любой элемент M иначе, и для всех $m' \in M$

$$f(m') = H(xm').$$

Теперь, как и в случае двоичного дерева, надо доказать теорему об автоматности монадически выразимых множеств, в формулировке которой допускающий автомат $\mathcal{A}$ надо заменить на правильный допускающий автомат $\mathcal{A}$. Единственный сложный случай в доказательстве, как и раньше, — переход к дополнению. Для его осуществления опять вводятся стратегии с памятью, с очевидным изменением: стратегия разделяет возможные переходы не на левые и правые, а по направлениям из M. Теорема 4 доказывается точно так же. Единственная трудность возникает в доказательстве теоремы 5, а именно в докзательстве полуавтоматности множества Σ-деревьев ветвления M, для которых существует отвергающая стратегия, основанная на конечном стратегическом множестве C. Изложим эту часть подробно. Для лучшего понимания дальнейшего читателю полезно освежить понятия стратегии, стратегического множества, вероятного пути.

Напомним, что в бинарном случае состояниями полуавтомата были пары непересекающихся множеств копий переходов исходного автомата. В нашем случае количество таких пар бесконечно, поэтому мы возьмем другой полуавтомат. Его состояниями будут подмножества $C \times C$, где

C — стратегическое множество. Начальное состояние — $\{\langle c_0, c_0\rangle\}$, где c_0 — начальная копия начального состояния исходного автомата. Если T — помеченное дерево, то обозначим через $T(x)$ пометку вершины x в T. Определим таблицу переходов полуавтомата. Пусть $\langle A, a, m, F\rangle$ некоторый переход, здесь $A \subset C \times C$, $a \in \Sigma$, $m \in M$, $F\colon M \longrightarrow C \times C$. Скажем, в каком случае он является переходом полуавтомата. Для любой функции G, распределяющей копии переходов $\mathcal{A}$ по направлениям (т.е. $G\colon S \times \Sigma \times M \times S^M \longrightarrow M$) обозначим $G_{A,a,m}$ следующую функцию из M в $C \times C$. Значение этой функции на $m' \in M$ состоит из пар $\langle c, f(c)\rangle$ по всем копиям переходов $\langle c, a, m, f\rangle$ автомата $\mathcal{A}$, отнесенным функцией G к направлению m' таким, что c принадлежит второй проекции A.

не нужен ли здесь рисунок?

Формально, $G_{A,a,m}(m') = \{\langle c, f(c)\rangle \mid \langle c, a, m, f\rangle$ — переход $\mathcal{A}$, $G(\langle c, a, m, f\rangle) = m'$, $\exists c' \in C\, \langle c', c\rangle \in A\}$.

Переходами полуавтомата являются такие четверки $\langle A, a, m, F\rangle$, что существует функция G для которой $F(m') \supset G_{A,a,m}(m')$ для всех $m' \in M$.

Докажем, что свойство "быть переходом полуавтомата" выразимо. Оно выражается формулой $\varphi(A, a, m, F)$, утверждающей, что для каждой копии перехода $\mathcal{A}$ вида $\langle c, a, m, f\rangle$ существует $m' \in M$ такое, что если c принадлежит второй проекции A, то пара $\langle c, f(c)\rangle$ принадлежит $F(m')$.

Напомним, что в состав полуавтомата входит автомат $\mathcal{L}$ на ω-словах в алфавите, состоящем из состояний полуавтомата: по определению ход полуавтомата считается допускающим, если последовательность состояний полуавтомата вдоль любого пути в этом ходе отвергается автоматом $\mathcal{L}$. В нашем случае автомат $\mathcal{L}$ устроен таким образом, что допускает последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_k \ldots$ состояний полуавтомата, если существует последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ состояний $\mathcal{A}$, имеющая заключительный предел, для которой существуют копии $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$ соответственно состояний $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ такие, что $\langle c_0, c_1\rangle \in A_1$, $\ldots$, $\langle c_{k-1}, c_k\rangle \in A_k$, $\ldots$. Будем последовательности $s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$, которые можно получить таким образом из последовательности состояний $A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots$ вдоль некоторого пути в ходе полуавтомата, называть вероятными для этого хода.

Нетрудно проверить, что если на некотором Σ-дереве ветвления M существует отвергающая стратегия, то существует ход полуавтомата на этом дереве, для которого множество вероятных последовательностей совпадает с множеством последовательностей состояний вдоль вероятных путей стратегии, а значит все вероятные последовательности для этого хода имеют незаключительный предел (в каждой вершине x надо взять подходящий переход $\langle A, a, m, G_{A,a,m} \rangle$, где функция G разделяет переходы по направлениям в соответствии со стратегией). И обратно, если на дереве существует допускающий ход полуавтомата, то из него легко построить отвергающую стратегию, взяв для каждой вершины x дерева ту функцию G, для которой верно $\forall m' \; G_{A,a,m}(m') \in F(m')$, где $\langle A, a, m, F \rangle$ — переход в данной вершине.

Таким образом, доказательство аналога теоремы 1 закончено. Чтобы закончить доказательство теоремы 6 осталось построить алгоритм проверки пустоты правильного автомата на деревьях ветвления M над однобуквенным алфавитом Σ. Такое дерево ровно одно, и мы будем считать, что пометок нет вовсе и удалим их из переходов автомата. Построение этого алгоритма сложнее, чем в бинарном случае, и мы приведем его полностью.

Во-первых, будем рассматривать произвольные (а не только правильные) автоматы.

Во-вторых, перейдем к автоматам с тупиками. Распространим понятие хода на дереве ветвления M на произвольные автоматы с тупиками. Напомним, что для размеченного дерева H через $H(x)$ обозначается пометка вершины x в H. Пусть $m_0 \in M$. Определим понятие m_0-хода. Неформально, m_0-ход — это обычный ход автомата с тупиками, в котором "последней" буквой пустого слова считается m_0. Формально, m_0-ходом автомата $\mathcal{A}$ с тупиками из Δ на $P(\Delta)$-дереве D ветвления M называется любое поддерево H дерева M^*, размеченное символами из $S \bigcup \Delta$ (S — множество состояний $\mathcal{A}$) такое, что

(1) $H(\Lambda)$ — начальное состояние,

(2) Если $H(x)$ — состояние, то H содержит xm для всех $m \in M$ и $\langle H(x), m', f \rangle$ — переход $\mathcal{A}$, где $m' = m_0$, если $x = \Lambda$ и m' — последняя буква x, иначе, и для любого m $f(m) = H(xm)$.

(3) Если $H(x)$ — тупик, то вершина x не имеет продолжений в H.

Определение допускающего хода переносится без изменений.

Скажем, что автомат m_0-*допускает* дерево, если существует допускающий m_0-ход автомата на дереве.

Назовем *простым* $P(\Delta)$-*деревом*, любое $P(\Delta)$-дерево ветвления M, у которого пометка вершины x зависит только от последней буквы x, а пометка корня — пустое множество. Простое $P(\Delta)$-дерево задается однозначно функцией из M в $P(\Delta)$.

Индукцией по числу состояний мы построим для каждого автомата $\mathcal{A}$ с тупиками монадическую формулу $\varphi(g, m)$, где $m \in M$, $g\colon M \longrightarrow P(\Delta)$, которая истинна в M тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ m-допускает простое дерево, задаваемое g. Допустим, мы уже это сделали. Тогда, чтобы выяснить пустоту множества, распознаваемого правильным автоматом (без тупиков) в однобуквенном алфавите, достаточно построить для него формулу $\varphi(g,m)$ и, пользуясь разрешимостью монадической теории M, выяснить истинность формулы $\exists m\ \exists g\ \varphi(g,m)$.

Итак, начнем доказательство. Пусть h некоторая функция из M в $P(\Delta\bigcup S)$, а g: $M \longrightarrow P(\Delta)$. Скажем, что h *расширяет* g, если для всех $m \in M$ $g(m) \subset h(m)$.

Рассмотрим случай автомата $\mathcal{A}$ с единственным состоянием. Обозначим это состояние через s. Рассмотрим два подслучая.

ПОДСЛУЧАЙ ПЕРВЫЙ: макросостояние $\{s\}$ не заключительно.

Скажем, что функция h типа $M \longrightarrow P(\Delta\bigcup\{s\})$ *замкнута вниз*, если для всех $m \in M$ из существования такого перехода $\langle s,m,f\rangle$ автомата $\mathcal{A}$, что $\forall m' \in M\ f(m') \in h(m')$ следует $s \in h(m)$.

ЛЕММА. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Автомат* $\mathcal{A}$ m_0*-допускает простое* $P(\Delta)$*-дерево, задаваемое функцией* g*.*

(2) *Для любой функции* h*, замкнутой вниз и расширяющей* g*, выполнено* $s \in h(m_0)$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что (2) влечет (1). Пусть выполнено (2).

$$\text{положим } h(m) = \begin{cases} g(m)\bigcup\{s\}, & \text{если автомат } \mathcal{A}\ m\text{–допускает} \\ & \text{простое дерево, задаваемое } g. \\ g(m) - \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что h расширяет g и замкнута вниз, следовательно $s \in h(m_0)$, т.е. автомат $\mathcal{A}$ m_0-допускает простое дерево, задаваемое g.

Обратно, пусть не выполнено (2), т.е. существует замкнутая вниз и расширяющая g функция h, для которой $s \notin h(m_0)$. Докажем, что в любом m_0-ходе H автомата $\mathcal{A}$ на простом дереве, задаваемом g, существует бесконечный путь или путь приводящий в неразрешенный тупик.

Распространим функцию h на M^*, положив $h(x)$ равным $h(m_0)$, если $x = \Lambda$, и равным значению h на последней букве x, иначе. Пусть H — m_0-ход $\mathcal{A}$ на простом дереве, задаваемом g. Докажем,что H не является допускающим ходом. Для этого построим в H либо конечный путь, заканчивающийся неразрешенным тупиком, либо бесконечный путь (т.к. макросостояние $\{s\}$ незаключительно, бесконечный путь имеет незаключительный предел). Мы будем от корня вверх строить этот путь $x_0 = \Lambda, x_1, x_2, \ldots$, поддерживая инвариант $H(x_i) \notin h(x_i)$. Пусть часть пути $x_0, x_1, \ldots, x_i$ уже построена и пусть инвариант выполнен. Положим $m = m_0$, если $x_i = \Lambda$, и $m =$ последней букве x_i, иначе. Если $H(x_i)$ — тупик, то он не разрешен, поскольку $H(x_i) \notin h(m) \supset g(m)$, а значит искомый путь построен. Если $H(x_i) = s$, то $s \notin h(m)$. В силу замкнутости вниз, отсюда следует, что существует $m' \in M$ такое, что $H(xm') \notin h(m')$. Полагаем $x_{i+1} = x_i m'$. Лемма доказана.

Очевидно, что свойство функции g и элемента m_0, сформулированное в пункте (2), выразимо, а значит первый подслучай разобран.

ПОДСЛУЧАЙ ВТОРОЙ: макросостояние $\{s\}$ заключительно.

Назовем функцию h: $M \longrightarrow P(\Delta \bigcup \{s\})$ *замкнутой вверх*, если из того, что $s \in h(m)$, следует существование такого перехода вида $\langle s, m, f\rangle$ автомата $\mathcal{A}$, что $\forall m' \in M\ f(m') \in h(m')$.

В этом подслучае достаточно следующей леммы.

ЛЕММА 7. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Автомат $\mathcal{A}$ m_0-допускает простое $P(\Delta)$-дерево, задаваемое функцией g.*

(2) *Существует замкнутая вверх и сужающая g функция h такая, что $s \in h(m_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим выполнено (1). Докажем, что тогда выполнено (2). Зафиксируем допускающий m_0-ход H. Положим
$h(m) = \{H(x) \mid$ последняя буква x равна m или $x = \Lambda,\ m = m_0\}$. Ясно, что h сужает g, замкнута вниз и $s \in h(m_0)$.

Обратно, пусть существует замкнутая вверх и сужающая g функция h, для которой $s \in h(m_0)$. Построим допускающий m_0-ход автомата $\mathcal{A}$ на простом дереве, задаваемом g. Поскольку $s \in h(m_0)$ и h замкнута вверх, существует переход $\langle s, m_0, f\rangle$ автомата $\mathcal{A}$, для которого $\forall m' \in M\ f(m') \in h(m')$. Ставим этот переход в корне. Поднимаемся на первый ярус дерева. Пусть m — произвольная вершина первого яруса. Если $f(m) \neq s$, то $f(m) \in g(m)$, значит в этом месте у хода можно сделать разрешенный тупик. Если $f(m) = s$, то $s \in h(m)$ и можем действовать так же как в корне. Поднимаясь таким образом по ярусам, построим ход в котором любой конечный путь заканчивается разрешенным тупиком. Поскольку $\{s\}$ — заключительное макростояние, любой бесконечный путь имеет заключительный предел. Лемма доказана. Осталось заметить, что свойство функции g и элемента m_0, сформулированное в пункте (2) леммы 7 монадически выразимо, а значит случай автомата с одним состоянием разобран.

Перейдем к случаю автомата с $n > 1$ состоянием. Пусть автомат $\mathcal{A}$ имеет n состояний $0, 1, \dots, n-1$, причем 0 — начальное состояние. Рассмотрим два подслучая.

ПЕРВЫЙ ПОДСЛУЧАЙ: макросостояние $\{0, 1, \dots, n-1\}$ незаключительно.

Мы будем использовать понятие тупиковой редукции, введеное в §2. Напомним, что i-ой тупиковой редукцией $\mathcal{L}_i$ называется автомат, полученный из $\mathcal{A}$ объявлением i начальным состоянием, а $i+1$ — новым тупиком (здесь + обозначает сложение по модулю n).

Скажем, что функция h типа $M \longrightarrow P(S \bigcup \Delta)$ замкнута вниз, если для всех $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, и всех $m \in M$ из того, что $\mathcal{L}_i$ m-допускает простое $P(\Delta \bigcup \{i+1\})$-дерево, задаваемое функцией $h_i(m') = h(m') \bigcap (\Delta \bigcup \{i+1\})$, следует $i \in h(m)$.

ЛЕММА 8. *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Автомат $\mathcal{A}$ m_0-допускает простое $P(\Delta)$-дерево, задаваемое функцией g.*

(2) *Для любой расширяющей g замкнутой вниз функции h выполнено $0 \in h(m_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (2). Докажем, что выполнено (1). Определим $\mathcal{A}_i$ как автомат, получающийся из $\mathcal{A}$ переносом начального состояния в состояние i. Положим
$h(m) = g(m) \bigcup \{i \mid \mathcal{A}_i$ m–допускает простое дерево, задаваемое $g\}$.
По определению, h расширяет g. Несложно проверить, что h замкнута вниз. Следовательно $0 \in h(m_0)$, т.е. автомат $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ m_0-допускает простое дерево, задаваемое g.

Обратно: пусть существует замкнутая вниз расширяющая g функция h, для которой $0 \notin h(m_0)$. С помощью этой функции построим в любом m_0-ходе H автомата $\mathcal{A}$ на дереве, задаваемом g, бесконечный путь с незаключительным пределом или конечный путь с неразрешенным тупиком в конце. Будем строить этот путь по шагам. На i-м шаге имеющаяся часть пути продолжается либо на конечное, либо на бесконечное число символов. В первом случае получаемый после i-го шага путь мы будем обозначать x_i. Строя этот путь, будем поддерживать инвариант $H(x_i) \notin h(x_i)$, где функция h продолжена на множество вершин следующим образом: $h(\Lambda) = h(m_0)$ и $h(xm) = h(m)$ для всех $x \in M^*$, $m \in M$.

Сначала положим $x_0 = \Lambda$ и, так как $h(\Lambda)$ по определению равно $h(m_0)$ и $H(\Lambda) = 0$, инвариант выполнен. Пусть x_j — последняя вершина части пути, построенной на шаге j. Пусть $H(x_j) = i \notin h(x_j)$. Если $i \in \Delta$, то i неразрешенный тупик и мы заканчиваем путь. Пусть $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

В силу замкнутости вниз, автомат $\mathcal{L}_i$ не m-допускает дерево, задаваемое h_i, где m — последняя буква x_j или $m = m_0$, если $x_j = \Lambda$. В частности, если у поддерева H с корнем в x_j выбросить все вершины, продолжающие вершины, помеченные состоянием $i+1$, то полученное дерево H' не является допускающим m-ходом автомата $\mathcal{L}_i$ на простом дереве, задаваемом h_i. Другими словами, в H' существует путь S', заканчивающийся вершиной ym', такой, что $H'(ym') \notin h_i(m')$, или бесконечный путь S' с незаключительным пределом. В первом случае, если $H'(ym') \neq i+1$, то $H'(ym') \notin g(m')$, а значит, приклеив путь S' к имеющемуся пути, получим путь в H, заканчивающийся неразрешенным тупиком. Если же $H'(ym') = i + 1$, то $i + 1 \notin h(m')$. Тогда, подклеив путь S' к имеющемуся пути, мы опять обеспечим истинность инварианта. Действуя таким образом, мы либо на каком-нибудь шаге построения получим путь с неразрешенным тупиком в конце, либо выполним бесконечное число шагов. Во втором случае построенный путь бесконечно много раз по циклу проходит состояние $0, 1, 2, \ldots, n-1$, а значит имеет незаключительный предел. Лемма доказана.

По индуктивному предположению, для автоматов $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, существуют формулы $\varphi_i(h_i, m)$, выражающие m-допускание автоматом $\mathcal{L}_i$ простого дерева, задаваемого h_i. Следовательно свойство замкнутости вниз выразимо, а значит выразимо и свойство g, m_0, сформулированное в пункте (2) леммы 8.

ПОДСЛУЧАЙ ВТОРОЙ: макросостояние $\{0, \ldots, n-1\}$ заключительно.

Назовем функцию h: $M \longrightarrow P(\Delta \bigcup S)$ замкнутой вверх, если из того, что $i \in h(m_0)$ следует, что $\mathcal{L}_i$ m_0-допускает простое дерево, задаваемое h_i.

ЛЕММА 9 *Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Автомат $\mathcal{A}$ m_0-допускает простое дерево, задаваемое g.*

(2) *Существует сужающая g и замкнутая вверх функция h, для которой $0 \in h(m_0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено (1). Докажем, что выполнено (2). Зафиксируем допускающий m_0-ход H на простом дереве, задаваемом g. Положим
$h(m) = \{H(x) \mid m$ − последняя вершина x или $m = m_0,\ x = \Lambda\}$.
Нетрудно проверить, что h сужает g, замкнута вверх и $0 \in h(m_0)$.

Обратно, пусть для некоторой функции h выполнено (2). Будем строить допускающий m_0-ход $\mathcal{A}$ на простом дереве, задаваемом g. Поскольку $0 \in h(m_0)$, автомат $\mathcal{L}_0$ m_0-допускает дерево, задаваемое h_0. Возьмем допускающий m_0-ход H_0 автомата $\mathcal{L}_0$ на этом дереве. Для каждой вершины xm этого хода, помеченной тупиком 1, сделаем следующее. По определению h_0, $1 \in h(m)$. Поэтому на простом дереве, задаваемом h_1, существует допускающий m-ход автомата $\mathcal{L}_1$. Приклеим этот ход к вершине xm хода H. Далее действуем точно также для тупиков 2 и т.д. Проведя ω шагов такого построения, получим m_0-ход $\mathcal{A}$ на дереве, задаваемом g. Любой путь в этом ходе либо, начиная с некоторого места, целиком лежит в ходе одного из автоматов $\mathcal{L}_i$, а значит имеет заключительный предел, либо по циклу бесконечно много раз походит через состояние $0, 1, \ldots, n-1$, а значит имеет предел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, являющийся заключительным. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы о распознавании пустоты осталось заметить, что свойство m_0 и g, сформулированное в пункте (2) леммы 9 выразимо.