Ан. А. Мучник, А. Л. Семёнов, Решетка определимости в порядке рациональных чисел, *Матем. заметки*, 2020, том 108, выпуск 1, 102–118

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12651

Математические заметки

Том 108 выпуск 1 июль 2020

УДК 510.635

Решетка определимости в порядке рациональных чисел

Ан. А. Мучник, А. Л. Семёнов

Описывается решетка подпространств определимости в порядке рациональных чисел. Доказывается, что она состоит из пяти определяемых в работе подпространств, порождаемых отношениями: "равенство", "меньше", "между", "цикл", "зацепленность". Для каждого из подпространств найдена его ширина (минимальное число аргументов порождающего отношения), и дается удобное описание группы автоморфизмов. Хотя структура данной решетки уже была ранее известна, доказательство в работе использует не теоретико-групповой метод, а носит эффективный синтаксический характер.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: конечно порожденное пространство, решетка подпространств определимости, синтаксический характер.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12651

Введение

История вопроса. В начале 1970-х гг. Альберт Абрамович Мучник (ученик П. С. Новикова) привлек внимание своего ученика А. Л. Семёнова (одного из авторов настоящей статьи) к кругу задач, относящихся к определимости во фрагментах арифметики.

Примером результата этого периода является теорема об определимости в арифметике сложения целых чисел любого отношения, автоматно определимого в двух системах счисления с мультипликативно независимыми основаниями [1], [2]. Была поставлена проблема полного описания всевозможных ослаблений арифметики сложения целых чисел (в смысле выразительной силы, формальное определение см. далее), иначе говоря, подпространств определимости, редуктов (см. [3]).

В своих студенческих работах 1970–1980-х гг. Л. Костюков и О. Митина продвинулись в решении указанной проблемы и предположительно нашли такое полное описание. Однако их доказательства были неполными. Пытаясь довести решение до конца, в начале 2000-х годов авторы настоящей работы рассмотрели существенно более простой случай порядка на рациональных числах вместо сложения целых. Была развита техника, полезная, как мы надеемся, и в других ситуациях, представленная в данной публикации, и получено полное описание "ослаблений"

Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (грант № 17-11-01377).

для порядка рациональных чисел. Такое описание может быть получено и иначе. В частности, оно вытекает из построений Камерона, в которых использовались теоретико-групповые и теоретико-модельные методы (см. [4]), хотя явно в этой работе и не формулируется. Видимо, впервые сам результат был получен в [5] и оставался неизвестным Камерону. Для получения результата также может быть использована теорема Свенониуса [6]. Частичные продвижения в решении исходной задачи Мучника имеется также в [6] – случай следования на целых числах.

Основные определения. *Сигнатура* – это произвольное множество символов. Каждому символу сопоставлено натуральное число – *число аргументов* этого символа.

Структура данной сигнатуры Σ – это произвольное множество D (область структуры) вместе с интерпретацией – отображением, которое каждому принадлежащему сигнатуре Σ символу P с числом аргументов n ставит в соответствие n-местное отношение на D (подмножество D^n).

Пусть теперь задано произвольное семейство S отношений на D. Дадим имена всем отношениям из какого-то конечного подсемейства семейства S, выбрав подходящую сигнатуру Σ, припишем им соответствующие количества аргументов. Тем самым, получим структуру с областью D и выбранной сигнатурой Σ. Составим формулу какого-нибудь логического языка, где в качестве имен отношений будут использоваться имена только из Σ. Эта формула задает отношение на D. Всякое такое отношение (получаемое при различных выборах подсемейств, сигнатур и формул) будем называть *определимым* через S. Множество всех определимых через S отношений назовем *замыканием* S. (Легко видеть, что мы действительно задали операцию замыкания.) Замкнутые множества можно было бы называть *логически замкнутыми классами отношений* или *степенями выразимости* (как в [7]). Мы будем их называть *пространствами определимости*. В современной англоязычной литературе для них установилось название *редукт* (reduct). Такое название связано с тем, что обычно изучаются замкнутые множества отношений, лежащие в каком-то большем, важном и естественном классе отношений, например, в классе всех полуалгебраических отношений на действительных числах, а дальше этот класс редуцируется. Термин редукт нам кажется не очень удачным, поскольку не всегда естественно рассматривать только подклассы бóльших классов.

Наше определение замыкания S не зависит от того, как мы выбирали имена для отношений из S, но оно зависит от используемого логического языка, его выразительных средств. В простейшем случае – это просто язык логики высказываний, т.е. формулы содержат, помимо символов сигнатуры и переменных для элементов D, только логические связки и равенство. В этом случае мы говорим о *пропозициональной* (или *бескванторной*) *определимости*. Наиболее часто рассматриваемый случай – это язык логики отношений (логики первого порядка), использующий, помимо логических связок, еще кванторы по предметным переменным. Говоря об определимости, в данной работе мы имеем в виду именно определимость средствами языка логики отношений, если не оговорено противное. Можно рассматривать также случаи слабой монадической логики, где допускаются также кванторы по конечным подмножествам D, монадической логики и т.д. Получаемые понятия можно называть *слабой монадической определимостью*, *монадической определимостью* и т.д.

Пространство определимости называется *конечно порожденным*, если оно порождается конечным множеством (является замыканием этого множества). Любое конечно порожденное пространство может быть порождено одним элементом. Пусть, например, пространство порождается двумя отношениями $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$, не являющимися тождественно ложными. Тогда оно же порождается, например, отношением

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_1, x_2) \wedge Q(x_3, x_4).$$

Мы говорим, что пространство имеет *ширину* n, если оно порождено каким-то семейством n-местных отношений и не может быть порождено никаким семейством $(n-1)$-местных отношений.

Всякое конечно порожденное пространство ширины n может быть порождено конечным семейством n-местных отношений. Действительно, в классе n-местных отношений, порождающих пространство, достаточно оставить конечный подкласс, через который можно выразить каждое отношение из конечного множества, порождающего данное пространство.

Перестановка на D – это взаимно однозначное отображение D на себя. Перестановка называется *автоморфизмом пространства определимости*, если она сохраняет все отношения этого пространства. Существует естественное соответствие между решеткой подпространств и решеткой подгрупп группы всех перестановок. Это соответствие является (антимонотонным) соответствием Галуа. Именно, каждому подпространству соответствует группа перестановок, сохраняющая все элементы подпространства, каждой группе перестановок соответствует подпространство, состоящее из всех отношений, сохраняющихся при всех перестановках из этой группы.

Классические подпространства линейного порядка. Нам удобнее считать, что порядок $<$ на рациональных числах строгий. Введем ряд отношений, систематически описанных Хантингтоном в [8], но рассматривавшихся еще до него (в том числе в работах по основаниям геометрии конца XIX в.). Эти отношения имеют смысл для любого линейного порядка (см. [9]), но нам они понадобятся в случае порядка рациональных чисел. Мы будем называть их и порождаемые каждым из них подпространства *классическими*:

- O – равенство: $x_1 = x_2$,
- I – сам порядок: $x_1 < x_2$,
- B – “*между*”: $(x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_3 < x_2 < x_1)$,
- C – “*цикл*” (иначе его можно было бы назвать “направление обхода”):

$$(x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_2 < x_3 < x_1) \vee (x_3 < x_1 < x_2),$$

- S – “*зацепленность*” (иначе его можно было бы назвать “разделенность”):

$$\begin{aligned}(x_1 < x_2 < x_3 < x_4) &\vee (x_3 < x_2 < x_1 < x_4) \vee (x_1 < x_4 < x_3 < x_2)\\ &\vee (x_3 < x_4 < x_1 < x_2) \vee (x_2 < x_3 < x_4 < x_1) \vee (x_2 < x_1 < x_4 < x_3)\\ &\vee (x_4 < x_3 < x_2 < x_1) \vee (x_4 < x_1 < x_2 < x_3).\end{aligned}$$

Наглядный смысл последнего отношения таков: два отрезка с концами x_1, x_3 и x_2, x_4 пересекаются, но ни один из них не вложен в другой.

Подпространства, порождаемые каждым из отношений O, I, B, C, S, будем обозначать той же буквой: O, I, B, C, S.

Определимость одного отношения через другие можно доказать предъявлением соответствующей формулы. А как доказывать неопределимость? Классическим способом для этого является использование автоморфизмов. Метод автоморфизмов применим не всегда. Может понадобиться переход к элементарному расширению. То, что такого перехода достаточно, обеспечивает теорема Свенониуса [6]. Однако для решетки определимости в случае рациональных чисел имеет место взаимно однозначное соответствие между подпространствами и группами автоморфизмов, сохраняющих отношения из подпространств.

Группы автоморфизмов, соответствующие пространствам O, I, B, C, S, будут обозначаться G_O, G_I, G_B, G_C, G_S.

Содержание статьи. В разделе 1 статьи мы дадим удобное описание групп G_B, G_C, G_S и докажем, что между классическими пространствами имеются соотношения, показанные на рис. 1 (отрезок означает строгое включение подпространства, расположенного ниже, в расположенное выше).

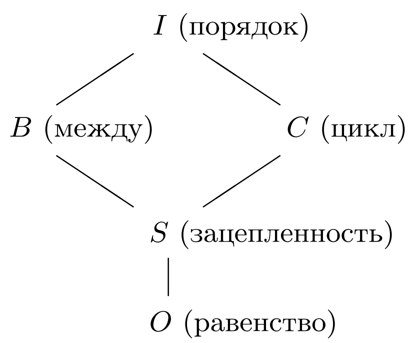

Рис. 1. Решетка подпространств определимости в пространстве I

В разделе 2 статьи мы для каждого класса отношений, определимых через I, найдем систему порождающих специального вида. При этом, если какое-то из этих порождающих определяется через другие, то его можно через них определить пропозициональными средствами (т.е. без использования кванторов). В разделе 3 мы найдем ширину каждого из пространств O, I, B, C, S. В разделе 4 мы докажем (теперь уже для определимости будем использовать кванторы), что каждое подпространство пространства I совпадает с одним из O, I, B, C, S.

1. Группы G_B, G_C, G_S и соотношения между классическими пространствами

Пусть G^- – множество всех биекций, меняющих порядок на рациональных числах на противоположный.

Пусть α – иррациональное число. Рациональную прямую разрежем на два луча $(-\infty, \alpha)$ и $(\alpha, +\infty)$. Обозначим через G_α множество всех биекций, сохраняющих порядок на паре рациональных чисел, если они принадлежат одному и тому же лучу, но меняющих порядок на противоположный, если рациональные числа принадлежат разным лучам.

Группа G_B является объединением G_I и G^-. Докажем это. Пусть для каких-то a, b выполнено $a < b$, $\varphi(b) < \varphi(a)$. Тогда для любого числа x в каждом из случаев

$x < a$, $a < x < b$, $x > b$ непосредственно проверяется, что сохраняющее “между” φ меняет порядок x и с a, и с b. В силу произвольности выбора x отображение φ меняет порядок любых двух чисел: $\varphi \in G^-$.

Группа G_C является объединением G_I и множества G_α для всех иррациональных α. В одну строну включение очевидно. Для доказательства в обратную сторону рассмотрим произвольный элемент $\varphi \in G_C$ и числа $b > a$, для которых $\varphi(b) < \varphi(a)$.

Обозначим

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a, \, \varphi(x) < \varphi(a)\}$$

и докажем, что пара $\langle \mathbb{Q} \setminus A, A \rangle$ - иррациональное сечение и φ сохраняет порядок на его элементах. Действительно, $b \in A$, $a \notin A$, элементы пары не пусты. Пусть $x \in A$, $y > x$. Поскольку φ сохраняет циклический порядок на $a < x < y$ и $\varphi(x) < \varphi(a)$, то $\varphi(x) < \varphi(y) < \varphi(a)$. Таким образом, A замкнуто вверх и φ сохраняет порядок на A.

Образ A – левый луч. Действительно, все элементы этого образа меньше $\varphi(a)$. Если бы существовал $\varphi(y) \notin \varphi(A)$, $\varphi(y) < \varphi(x) \in \varphi(A)$, то цикл $\varphi(y) < \varphi(x) < \varphi(a)$ при φ^{-1} переходил бы в цикл $y > x > a$ с учетом $x > a$. Это невозможно. Отсюда вытекает, в частности, что $\langle \mathbb{Q} \setminus A, A \rangle$ - иррациональное сечение и что образ $\mathbb{Q} \setminus A$ - правый луч. Пусть теперь $x, y \in \mathbb{Q} \setminus A$, $x < y$. Возьмем произвольное $z \in A$. Тогда $y < z$, а из сохранения цикла $x < y < z$ вытекает $\varphi(x) < \varphi(y)$. Значит, φ сохраняет порядок на $\mathbb{Q} \setminus A$. Таким образом, $\varphi \in G_\alpha$ при некотором α.

Примерно так же доказывается и то, что группа G_S порождена объединением G_I, G^- и множества G_α для всех иррациональных α. В одну сторону включение очевидно. Для $\varphi \in G_C$ утверждение доказано. Пусть для некоторых $a < b < c$ перестановка φ не сохраняет их цикл. Домножив при необходимости исходную перестановку на подходящий элемент G^-, мы можем считать, что

$$\varphi(a) = a, \qquad \varphi(c) = c, \qquad \varphi(b) > c.$$

Положим

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a, \, \varphi(x) > \varphi(a)\}.$$

Как и в предыдущем случае, покажем, что $\langle \mathbb{Q} \setminus A, A \rangle$ – иррациональное сечение. Ясно, что A и дополнение к нему непусты. Пусть $x \in A$. Если $x > c$, то пара $\{b, x\}$ зацеплена с парой $\{a, c\}$. Поскольку $\varphi(b) > \varphi(c)$, $\varphi(x) > \varphi(a)$, получаем $\varphi(x) < \varphi(c)$. Аналогично, если $x < c$, то пара $\{b, x\}$ не зацеплена с парой $\{a, c\}$. Поскольку $\varphi(x) > \varphi(a)$, $\varphi(b) > \varphi(c)$, получаем $\varphi(x) > \varphi(c)$. Таким образом, φ “инвертирует” A относительно точки c. Мы покажем сейчас, что и порядок на A “инвертируется”.

Пусть $x < y$, $x \in A$. Докажем, что $y \in A$ и $\varphi(y) < \varphi(x)$. Пусть выполнено $x > c$. Тогда пара $\{a, x\}$ зацеплена с парой $\{c, y\}$. Значит, пара $\{\varphi(a), \varphi(x)\}$ зацеплена с парой $\{\varphi(c), \varphi(y)\}$. Имеем $\varphi(x) > \varphi(a)$, $\varphi(x) < \varphi(c)$. Поэтому $\varphi(a) < \varphi(y) < \varphi(x)$. Пусть $x < c$; тогда пара $\{a, x\}$ не зацеплена с парой $\{y, c\}$. Поскольку $\varphi(a) < \varphi(c) < \varphi(x)$, то для того чтобы пара $\{\varphi(y), \varphi(c)\}$ не была зацеплена с $\{\varphi(a), \varphi(x)\}$, нужно $\varphi(a) < \varphi(y) < \varphi(x)$. Таким образом, A – луч, φ инвертирует порядок на A.

Образ A – правый луч. Действительно, все элементы этого образа больше $\varphi(a)$. Далее, если $\varphi(y) > \varphi(x) \in \varphi(A)$, то пара $\{\varphi(a), \varphi(y)\}$ зацеплена с парой $\{\varphi(c), \varphi(x)\}$. Поэтому пара $\{a, y\}$ зацеплена с $\{c, x\}$. Значит, $y > x$, $y \in A$, $\varphi(y) \in \varphi(A)$. Таким образом, $\varphi(A)$ – не ограничено сверху. Значит, A не имеет минимального элемента, образ $\mathbb{Q} \setminus A$ – левый луч.

Пусть $x, y \in \mathbb{Q} \setminus A$, $x < y$. Тогда $\{x, c\}$ не зацеплено с $\{y, b\}$. Значит $\{\varphi(x), \varphi(c)\}$ не зацеплен с $\{\varphi(y), \varphi(b)\}$, $\varphi(y) < \varphi(x)$. То есть φ антимонотонно на $\mathbb{Q} \setminus A$. Отсюда следует, что φ лежит в рассматриваемой группе.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Выполнены следующие соотношения*:

$$O \subset S, \qquad S \subset B, \qquad S \subset C, \qquad B \subset I, \qquad C \subset I, \qquad B \not\subseteq C, \qquad C \not\subseteq B.$$

Замечание к теореме 1 (см. рис. 1). Пространство I является (решеточным) объединением (точной верхней гранью) пространств B и C.

Действительно, $x_1 < x_3$ равносильно тому, что $\exists\, x_2(B(x_1, x_2, x_3) \wedge C(x_1, x_2, x_3))$.

Тот факт, что S является пересечением B и C (а не просто содержится в обоих пространствах), вытекает из теоремы 5 ниже.

Строгость включений вытекает из строгости включений для групп автоморфизмов и наличия указанного выше соответствия Галуа.

2. Отношения и группы перестановок переменных

Начнем с технических замечаний, используемых в последующих построениях. В них речь идет только об отношениях, лежащих в I. Всякое такое отношение может быть задано бескванторной формулой в сигнатуре порядка. Отсюда следует, что истинность формулы полностью определяется относительным упорядочением значений свободных переменных (равенство значений, конечно, тоже учитывается).

Определение 1. Назовем отношение *несклеивающим*, если оно ложно, когда значения двух каких-нибудь его аргументов равны.

Утверждение 1. *Для каждого n-местного отношения можно построить конечный класс несклеивающих отношений с числом аргументов не более n, порождающий то же пространство определимости, что и исходное отношение.*

Действительно, всякое отношение $R(x_1, x_2, \dots)$ в смысле определимости эквивалентно множеству из двух отношений: $R \mathbin{\&} x_1 \neq x_2$ и “отношение, получаемое из R подстановкой x_2 вместо x_1”.

Каждое n-местное отношение на множестве D можно рассматривать как функцию со значениями “истина” и “ложь”, определенную на кортежах $a = (a_1, \dots, a_n)$ длины n, составленных из элементов множества D. Кортеж можно рассматривать как функцию из n-элементного множества номеров $\{1, \dots, n\}$ в множество D:

$$a\colon \{1, \dots, n\} \to D.$$

Кортежи, все элементы которых различны, назовем *инъективными.* Кортеж $a = (a_1, \dots, a_n)$ назовем *возрастающим*, если $a_1 < \dots < a_n$.

Инъективный кортеж a можно превратить в возрастающий кортеж a^0 домножением справа (в смысле композиции функций) на подходящую перестановку λ_a n-элементного множества номеров $\{1, \dots, n\}$:

$$a^0 = a^\circ \lambda_a \qquad \text{или} \qquad (a_1^0, \dots, a_n^0) = (a_{\lambda_a(1)}, \dots, a_{\lambda_a(n)}).$$

Перестановку λ_a назовем *выпрямляющей* кортеж a. Обратную перестановку $\xi_a = \lambda_a^{-1}$ назовем *скручивающей* для кортежа a:

$$a = a^0_\circ \xi_a \qquad \text{или} \qquad (a_1, \ldots, a_n) = (a^0_{\xi_a(1)}, \ldots, a^0_{\xi_a(n)}).$$

Перестановку $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ будем записывать $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$.

Два инъективных кортежа назовем *подобными*, если совпадают их выпрямляющие перестановки (или, что равносильно, если совпадают их скручивающие перестановки). Если два кортежа подобны, а отношение P выразимо через порядок, то либо P истинно на обоих кортежах, либо на обоих ложно. Это позволяет задавать несклеивающее отношение P множеством $\overline{P}$ перестановок, выпрямляющих кортежи, на которых P истинно, либо множеством $\widetilde{P}$ перестановок, скручивающих кортежи, на которых P истинно.

Условие истинности несклеивающего отношения P на кортеже a можно записать так:

$$P(a) \iff \xi_a \in \widetilde{P}.$$

Определение 2. Будем писать $P \preccurlyeq Q$, если отношение P определимо через Q. Два отношения P и Q назовем *эквивалентными* и будем писать $P \sim Q$, если они порождают одно и то же подпространство определимости.

Утверждение 2. *Для любого несклеивающего отношения $P(x_1, \ldots, x_n)$ существует эквивалентное ему отношение $Q(x_1, \ldots, x_n)$, множество скручивающих перестановок которого $\widetilde{Q}$ является подгруппой группы всех перестановок номеров $1, \ldots, n$.*

Доказательство. Зададим отношение Q формулой

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\sigma \in \widetilde{P}} P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Докажем, что для этого Q утверждение выполняется. Имеем

$$\tau \in \widetilde{Q} \iff (\forall\, \sigma \in \widetilde{P})\, (\tau \circ \sigma) \in \widetilde{P}. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что перестановки принадлежащие $\widetilde{Q}$, образуют группу. (Действительно, тождественная перестановка принадлежит $\widetilde{Q}$, и легко заметить, что если $\tau_1 \in \widetilde{Q}$, $\tau_2 \in \widetilde{Q}$, то $\tau_1 \circ \tau_2 \in \widetilde{Q}$. Так как каждая перестановка имеет конечный порядок, то обратные перестановки выражаются через композицию.)

Пусть перестановки σ и σ_1 принадлежат одному и тому же правому классу смежности группы всех перестановок номеров $1, \ldots, n$ по подгруппе $\widetilde{Q}$. Это означает, что существует такая перестановка $\tau \in \widetilde{Q}$, что $\sigma_1 = \tau \circ \sigma$. Из (2.1) видно, что $\sigma \in \widetilde{P} \Rightarrow \sigma_1 \in \widetilde{P}$. Следовательно, $\widetilde{P}$ является объединением некоторых правых классов смежности.

Пусть $\widetilde{R}$ – один из таких классов смежности, R – отношение, для которого $\widetilde{R}$ – множество скручивающих перестановок, $\overline{R}$ – соответствующее множество выпрямляющих перестановок, $\rho \in \overline{R}$ – произвольная выпрямляющая перестановка для отношения R. Тогда отношение R можно определить через отношение Q формулой

$$R(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}) \qquad \text{или, в краткой записи,} \qquad R(x) = Q(x \circ \rho).$$

Действительно, $\rho^{-1} \in \widetilde{R}$. Далее,

$$\begin{aligned} R(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \xi_x \in \widetilde{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_x \circ (\rho^{-1})^{-1} \in \widetilde{Q} \\ &\Longleftrightarrow \quad \xi_x \circ \rho \in \widetilde{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad Q(x^0 \circ \xi_x \circ \rho) \quad \Longleftrightarrow \quad Q(x \circ \rho). \end{aligned}$$

Так как отношения, соответствующие каждому классу смежности, определимы через Q, то и отношение P, соответствующее объединению классов смежности, тоже определимо через Q. Утверждение 2 доказано.

Определение 3. Пусть для некоторого отношения Q множество $\widetilde{Q}$ скручивающих перестановок является группой (как в утверждении 2, в этом случае оно совпадает с множеством $\overline{Q}$ выпрямляющих перестановок). Вместо $\widetilde{Q}$ и $\overline{Q}$ будем писать Q и называть это множество перестановок *областью истинности* отношения Q (используя одинаковые обозначения для самого отношения и для соответствующего ему множества перестановок).

Теорема 2. *Всякое подпространство линейного порядка на рациональных числах порождается семейством отношений, которое для каждого n содержит не более одного n-местного отношения, причем область истинности этого отношения соответствует собственной подгруппе группы перестановок номеров* $1, \ldots, n$. *Если исходный класс имеет ширину n, то и построенные отношения не более, чем n-местные.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 позволяют во всяком подпространстве линейного порядка на рациональных числах оставить в качестве порождающих только такие отношения, у каждого из которых область истинности является группой.

Для каждого n возьмем конъюнкцию отобранных n-местных отношений. Область истинности этой конъюнкции является пересечением областей истинности членов конъюнкции. Этой конъюнкции соответствует подгруппа в группах ее членов. Как известно, группа является объединением смежных классов по своей подгруппе. Это позволяет выразить каждый член конъюнкции через конъюнкцию. Тем самым, конъюнкция годится в качестве отношения, порождающего то же подпространство, что и исходный набор n-местных отношений.

Группа всех перестановок соответствует тривиальному отношению "все аргументы различны". Поэтому можно оставить только отношения, соответствующие собственным подгруппам.

В настоящем разделе определимость отношений получалась исключительно с помощью пропозициональных связок и переименования переменных, кванторы мы начнем использовать в следующем разделе.

3. Ширина классических подпространств

Теорема 3. *Пространства O, I, B, C, S имеют ширину соответственно* 0, 2, 3, 3, 4.

Доказательство. То, что в каждом случае ширина не превосходит указанных значений, ясно из определений O, I, B, C, S.

Предположим, что одно из пространств I, B, C, S имеет меньшую ширину, чем указано в теореме. По теореме 2 можно считать, что эти пространства порождены отношениями, область истинности каждого из которых является собственной подгруппой группы всех перестановок одного, двух или трех номеров переменных. Для одного номера собственных подгрупп нет, следовательно, ширина I не меньше 2.

Для двух номеров есть одна собственная подгруппа, состоящая из тождественной перестановки. Этой подгруппе соответствует отношение $x_1 < x_2$, следовательно, ширина каждого из пространств B, C и S не меньше 3.

Для трех номеров есть следующие собственные подгруппы:

- цикл длины 3 – $\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$; этой подгруппе соответствует отношение “цикл”;
- транспозиция номеров 1 и 3 – $\{(1,2,3),\ (3,2,1)\}$; этой подгруппе соответствует отношение “между”;
- транспозиция номеров 1 и 2 – $\{(1,2,3),\ (2,1,3)\}$; через соответствующее отношение определим линейный порядок:

$$x_1 < x_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, x_2((x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_2 < x_1 < x_3));$$

- транспозиция номеров 2 и 3 – $\{(1,2,3),\ (1,3,2)\}$; через соответствующее отношение определим линейный порядок:

$$x_1 < x_3 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, x_2((x_1 < x_2 < x_3) \vee (x_1 < x_3 < x_2));$$

- единичная подгруппа – $\{(1,2,3)\}$; ей соответствует отношение $x_1 < x_2 < x_3$, через которое определим линейный порядок.

В любом случае получается определимость пространства B или пространства C. Но по теореме 1 ни одно из этих пространств не включено в S. Поэтому ширина пространства S не меньше 4.

4. Исчерпывающее перечисление подпространств

4.1. Предварительные замечания. Как уже отмечалось, отношения I, B, C, S имеют смысл для любого линейного порядка. В качестве вспомогательного средства они нам потребуются на n-элементном множестве $\{1,\dots,n\}$ с естественным порядком.

Введем обозначения для перестановок множества $\{1,\dots,n\}$:

- $e = (1,2,\dots,n-1,n)$ – тождественная перестановка;
- $b = (n,n-1,\dots,2,1)$;
- $c = (n,1,2,\dots,n-1)$;
- $t = (2,1,3,4,\dots,n)$.

Нетрудно проверить следующее

Утверждение 3. *Пусть $n \geqslant 4$. Перестановка σ множества $\{1,\dots,n\}$ тогда и только тогда сохраняет на этом множестве отношение*

1) *S, когда она порождается перестановками b и c;*
2) *B, когда она порождается перестановкой b (совпадает с e или b);*
3) *C, когда она порождается перестановкой c;*
4) *I, когда она является перестановкой e.*

4.2. Основные результаты.

Теорема 4. *Если область истинности n-местного отношения H соответствует собственной подгруппе (которую мы обозначаем той же буквой H) группы всех перестановок номеров $1, \ldots, n$, то отношение H порождает одно из подпространств I, B, C, S.*

Доказательство. Для $n < 4$ утверждение настоящей теоремы доказано при доказательстве теоремы 3. Поэтому далее предполагаем $n \geqslant 4$. Нам достаточно доказать следующие четыре леммы:

Лемма 1. *Если $b \in H$ и $c \in H$, то $H \sim S$.*

Лемма 2. *Если $b \in H$ и $c \notin H$, то $H \sim B$.*

Лемма 3. *Если $b \notin H$ и $c \in H$, то $H \sim C$.*

Лемма 4. *Если $b \notin H$ и $c \notin H$, то $H \sim I$.*

Пусть P обозначает для леммы 1 отношение “зацепленность”, для леммы 2 – отношение “между”, для леммы 3 – отношение “цикл”, для леммы 4 – отношение “меньше”, а p – количество аргументов отношения P, т.е. числа 4, 3, 3, 2 соответственно. Каждая из лемм фактически состоит из двух утверждений:

$$\begin{array}{ll} H \preccurlyeq P & \text{(отношение } H \text{ определимо через отношение } P\text{),} \\ P \preccurlyeq H & \text{(отношение } P \text{ определимо через отношение } H\text{).} \end{array}$$

Докажем, что $H \preccurlyeq P$. Для этого в условии каждой из четырех лемм установим, что отношение H выражается через P формулой

$$\Theta \rightleftharpoons \bigvee_{\sigma \in H} \bigwedge_{k \in A} P(x_{\sigma(k_1)}, \ldots, x_{\sigma(k_p)}),$$

где множество A, состоящее из p-элементных кортежей, таково:

$$A = \big\{(k_1, \ldots, k_p) \mid k_1, \ldots, k_p \in \{1, \ldots, n\} \wedge P(k_1, \ldots, k_p)\big\}.$$

Например, в случае леммы 3 и $n = 4$ формула Θ приобретает следующий вид вид:

$$\begin{aligned} \Theta_C^4 \rightleftharpoons \bigvee_{\sigma \in H} \big(& C(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) \wedge C(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(1)}) \wedge C(x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \\ & \wedge C(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}) \wedge C(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(1)}) \wedge C(x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}) \\ & \wedge C(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \wedge C(x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(1)}) \wedge C(x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}) \\ & \wedge C(x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \wedge C(x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}) \wedge C(x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})\big). \end{aligned}$$

Определим функции x, σ, k, x^0, ξ_x следующим образом:

- $k\colon \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$ – p-элементный кортеж чисел от 1 до n,
- $\sigma\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ – перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$,
- $x\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Q}$ – n-элементный кортеж рациональных чисел,
- $x^0\colon \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Q}$ – выпрямленный кортеж x,
- $\xi_x\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ – перестановка, скручивающая кортеж x.

Тогда истинностное значение формулы Θ на наборе x рациональных чисел можно записать так:

$$\Theta(x) = \bigvee_{\sigma\in H} \bigwedge_{k\in A} P(x\circ\sigma\circ k) = \bigvee_{\sigma\in H} \bigwedge_{k\in A} P(x^0\circ\xi_x\circ\sigma\circ k) = \bigvee_{\sigma\in H} \bigwedge_{k\in A} P(\xi_x\circ\sigma\circ k). \tag{4.1}$$

Последний переход в цепочке равенств (4.1) сделан на том основании, что x^0 – монотонно возрастающая функция, и, следовательно, она сохраняет истинностное значение отношения P.

Мы должны доказать, что $\Theta(x)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $H(x)$.

1) Пусть $\Theta(x)$ истинно. Это означает, что существует такая перестановка $\sigma\in H$, $\bigwedge_{k\in A} P(\xi_x\circ\sigma\circ k)$. Из истинности этой конъюнкции можно сделать вывод, что перестановка $\xi_x\circ\sigma$ сохраняет отношение P на множестве $\{1,\dots,n\}$. Действительно, пусть отношение P истинно на некотором p-элементном кортеже k, составленном из элементов множества $\{1,\dots,n\}$. Тогда $k\in A$ по определению множества A, и, следовательно, истинно $P(\xi_x\circ\sigma\circ k)$.

Тогда из утверждения 3 и из условий лемм 1–4 следует, что перестановка $\xi_x\circ\sigma$ принадлежит группе H. Тогда и ξ_x принадлежит группе H, а это и означает истинность $H(x)$.

2) Пусть $H(x)$ истинно. Тогда $\xi_x,\lambda_x\in H$. Чтобы доказать истинность $\Theta(x)$, нам достаточно указать такую перестановку $\sigma\in H$, $\bigwedge_{k\in A} P(\xi_x\circ\sigma\circ k)$. Очевидно, что в качестве σ подойдет перестановка, выпрямляющая набор x: $\sigma=\lambda_x=\xi_x^{-1}$. Тогда $\xi_x\circ\sigma\circ k=k$, а истинность $\bigwedge_{k\in A} P(k)$ следует из определения множества A.

Определимость H через P доказана.

Для того, чтобы доказать определимость P через H, мы воспользуемся теоремой Эрдеша–Секереша [10]: для любого n в любой последовательности длины $\varphi(n) = n^2+2$ различных элементов линейно упорядоченного множества можно выбрать монотонно возрастающую или убывающую подпоследовательность длины n.

В каждой из четырех лемм формула Φ, выражающая отношение P через H, будет иметь вид

$$\Phi = \Phi_0(a)\wedge\forall\, y(\Phi_1(a,y)\to\exists\, x(\Phi_2(x,y)\wedge\Psi(a,x))).$$

Здесь a, y, x – наборы переменных. Длина набора свободных переменных a равна p (числу аргументов отношения P), длина набора x равна n, длина набора y равна $5\varphi(n)$. Формула Φ_0 утверждает, что значения переменных из набора a попарно различны. Формула Φ_1 утверждает, что значения переменных из объединения наборов a и y попарно различны. Формула Φ_2 утверждает, что последовательность значений $x_1,\dots,x_n$ является подпоследовательностью в $y_1,\dots,y_{5\varphi(n)}$. Формула Ψ (содержащая символ отношения H) строится отдельно для каждой леммы таким образом, чтобы для любого p-элементного набора рациональных чисел $a=a_1,\dots,a_p$,

Истинность $P(a)$ равносильна истинности утверждения
Все числа из набора a различны, и если последовательность $x_1,\dots,x_n$, является строго монотонной и целиком лежит в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую, то $\Psi(a,x)$ истинна. (*) (**)

Сейчас мы изложим общую для всех лемм часть доказательства того, что если формула Ψ удовлетворяет условию $(**)$, то $P(a)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $\Phi(a)$.

1) Предположим, $P(a)$ истинно. Тогда $\Phi_0(a)$ истинно. Пусть набор y удовлетворяет $\Phi_1(a, y)$. Набор a делит рациональную прямую не более, чем на пять частей. В одну из них попадает по крайней мере пятая доля чисел из набора y. В этой (достаточно длинной) подпоследовательности y можно выбрать монотонную (возрастающую или убывающую) подпоследовательность, для которой $\Phi_2(x, y)$ истинно. Формула Ψ удовлетворяет условию $(**)$, "левая" ("верхняя") часть условия $(**)$ истинна, следовательно, утверждение $(*)$ тоже истинно, посылка второй части утверждения $(*)$ истинна, следовательно, $\Psi(a, x)$ истинно, и $\Phi(a)$ истинно.

2) Предположим, $\Phi(a)$ истинно. Тогда все числа из набора a различны – выполнена первая часть утверждения $(*)$. Докажем утверждение $(*)$ целиком.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – строго монотонная последовательность, целиком лежащая в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую. Не выходя за пределы этой части рациональной прямой, расширим последовательность x до строго монотонной последовательности y длины $5\varphi(n)$ так, чтобы последовательность x была подпоследовательностью последовательности y. Из истинности $\Phi(a)$ следует истинность

$$\forall\, y(\Phi_1(a, y) \to \exists\, x(\Phi_2(x, y) \wedge \Psi(a, x))).$$

Далее, из истинности $\Phi_1(a, y)$ следует истинность $\exists\, x(\Phi_2(x, y) \wedge \Psi(a, x))$. Следовательно, существует строго монотонная последовательность $x' = x'_1, \ldots, x'_n$, целиком лежащая в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую, для которой истинно $\Psi(a, x')$. Из построения последовательности y ясно, что обе ее подпоследовательности x и x' упорядочены одинаково. Более того, объединение наборов a и x и объединение наборов a и x' тоже упорядочены одинаково. Поскольку истинность формулы полностью определяется относительным упорядочением значений свободных переменных, то из истинности $\Psi(a, x')$ следует истинность $\Psi(a, x)$. Утверждение $(*)$ доказано, а вместе с ним доказано $P(a)$.

Остается для каждой из лемм 1–4 построить формулу Ψ, удовлетворяющую условию $(**)$.

Начнем с леммы 1.

Доказательство леммы 1. Формула Ψ выглядит так:

$$\Psi_S = \bigvee_{\sigma \in S} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} H(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(m+1)}, x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Докажем, что формула Ψ_S удовлетворяет условию $(**)$.

1) Пусть выполнено условие $(*)$. Докажем, что истинно $P(a)$, т.е. $S(a)$. Первая часть условия $(*)$ говорит о том, что все числа из набора a различны. Возьмем строго возрастающую последовательность $x_1, \ldots, x_n$, целиком лежащую правее всех чисел из набора a. Из второй части условия $(*)$ следует, что $\Psi_S(a, x)$ истинна. Это означает, что существует такая перестановка $\sigma \in S$, что истинна конъюнкция

$$\bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} H(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(m+1)}, x_3, x_4, \ldots, x_n). \tag{4.2}$$

Каждый член конъюнкции (4.2) означает, что $a_{\sigma(m)} < a_{\sigma(m+1)}$. Действительно, равенство $a_{\sigma(m)} = a_{\sigma(m+1)}$ невозможно, так как все числа набора a различны. Неравенство $a_{\sigma(m)} > a_{\sigma(m+1)}$ тоже невозможно, так как это означало бы, что $t \in H$. Но по условию леммы 1 перестановка c принадлежит группе H. Поэтому перестановка t не может принадлежать группе H. Иначе транспозиции всех пар соседних номеров принадлежали бы H, а следовательно, все перестановки принадлежали бы H, что противоречит условию теоремы 4.

Таким образом, $a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < a_{\sigma(3)} < a_{\sigma(4)}$, т.е. кортеж $a \circ \sigma$ является возрастающим, а σ является перестановкой, выпрямляющей кортеж a: $\sigma = \lambda_a$. Из того, что $\lambda_a \in S$ следует, что $S(a)$, т.е. $P(a)$, истинно.

2) Пусть $P(a)$, т.е. $S(a)$, истинно. Докажем истинность условия $(*)$. Из истинности $S(a)$ следует, что все числа набора a различны – первая часть условия $(*)$ истинна. Пусть строго монотонная последовательность $x_1, \ldots, x_n$ целиком лежит в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую. Для доказательства второй части условия $(*)$ мы должны доказать истинность $\Psi_S(a, x)$, т.е. существование такой перестановки $\sigma \in S$, для которой истинна конъюнкция (4.2).

Возможны два случая:

(а) последовательность $x_1, \ldots, x_n$ возрастает, и правее нее располагаются ровно i элементов набора a;

(б) последовательность $x_1, \ldots, x_n$ убывает, и левее нее располагаются ровно i элементов набора a.

Докажем, что в случае (а) годится перестановка

$$\sigma = \lambda_a \circ \mathfrak{c}^i,$$

а в случае (б) – перестановка

$$\sigma = \lambda_a \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i.$$

Здесь и далее используется готический шрифт для обозначения перестановок 4-элементного множества:

$$\mathfrak{c} = (4, 1, 2, 3), \qquad \mathfrak{b} = (4, 3, 2, 1)$$

(во избежание путаницы с аналогичными перестановками c и b n-элементного множества).

Так как $S(a)$ истинно, то $\lambda_a \in S$. Кроме того, $\mathfrak{c} \in S$, $\mathfrak{b} \in S$. Поэтому в обоих случаях $\sigma \in S$. Остается доказать истинность каждого члена конъюнкции (4.2), т.е. для каждого $m \in \{1, 2, 3\}$ доказать истинность

$$H(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(m+1)}, x_3, x_4, \ldots, x_n). \tag{4.3}$$

В случае (а) кортеж, к которому в (4.3) применяется H, можно переписать так:

$$\begin{aligned}&(a \circ \lambda_a \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a \circ \lambda_a \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n)\\ &\qquad = (a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Если $i < m$, то кортеж (4.4) возрастает и выражение (4.3) истинно, так как $e \in H$.

Если $i = m$, то кортеж (4.4) получается из возрастающего кортежа

$$(a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n,\, a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m))$$

однократным применением циклической перестановки c. Если $i > m$, то кортеж (4.4) получается из возрастающего кортежа

$$(x_3, x_4, \ldots, x_n,\, a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a^0 \circ \mathfrak{c}^i(m+1))$$

двукратным применением циклической перестановки c. В последних двух случаях выражение (4.3) истинно, так как $c \in H$.

В случае (б) кортеж, к которому в (4.3) применяется H, можно переписать так:

$$\begin{aligned}(a \circ \lambda_a \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a \circ \lambda_a \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n)&\\ = (a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n).&\end{aligned} \tag{4.5}$$

Если $i < m$, то кортеж (4.5) убывает и выражение (4.3) истинно, так как $b \in H$.

Если $i = m$, то кортеж (4.5) получается из убывающего кортежа

$$(a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m+1),\, x_3, x_4, \ldots, x_n,\, a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m))$$

однократным применением циклической перестановки c. Если $i > m$, то кортеж (4.5) получается из убывающего кортежа

$$(x_3, x_4, \ldots, x_n,\, a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m),\, a^0 \circ \mathfrak{b} \circ \mathfrak{c}^i(m+1))$$

двукратным применением циклической перестановки c. В последних двух случаях выражение (4.3) истинно, так как $b, c \in H$.

Лемма 1 доказана.

Перейдем к лемме 2.

Доказательство леммы 2. Для нее формула Ψ выглядит так:

$$\Psi_B \rightleftharpoons (H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \wedge H(a_3, x_2, x_3, \ldots, x_n)) \to H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Докажем, что формула Ψ_B удовлетворяет условию $(**)$.

1) Допустим, что $P(a)$, т.е. $B(a)$, ложно. Требуется доказать, что условие $(*)$ ложно. Если среди чисел набора a есть равные, то условие $(*)$ ложно, так как нарушена его первая часть.

Пусть все числа из набора a различны. Так как a_2 не лежит между a_1 и a_3, то либо a_2 больше, чем a_1 и a_3, либо a_2 меньше, чем a_1 и a_3.

В первом случае возьмем строго возрастающую последовательность $x_1, \ldots, x_n$, целиком лежащую правее чисел a_1 и a_3, но левее a_2. Получаем, что оба выражения $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $H(a_3, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинны, но $H(a_2, x2, x_3, \ldots, x_n)$ – ложно, так как $c \notin H$.

Во втором случае возьмем строго убывающую последовательность $x_1, \ldots, x_n$, целиком лежащую правее a_2, но левее чисел a_1 и a_3. Так как $b \in H$, оба выражения $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $H(a_3, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинны, но $H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – ложно, так как $c \notin H$.

В обоих случаях $\Psi_B(a, x)$ ложно, и условие $(*)$ ложно, так как нарушена его вторая часть.

2) Пусть $P(a)$, т.е. $B(a)$, истинно. Докажем истинность условия $(*)$. Из истинности $B(a)$ следует, что все числа набора a различны – первая часть условия $(*)$

истинна. Пусть строго монотонная последовательность $x_1, \ldots, x_n$ целиком лежит в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую.

Предположим, что последовательность x возрастает. Так как $c \notin H$, то истинность выражения $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ означает, что a_1 лежит слева от x, а истинность $H(a_3, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ означает, что a_3 лежит слева от x. Но тогда и a_2 лежит слева от x, а, следовательно, и $H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинно.

Предположим, последовательность x убывает. Так как $b \in H$, $c \notin H$, то истинность выражения $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ означает, что a_1 лежит справа от x, а истинность $H(a_3, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ означает, что a_3 лежит справа от x. Но тогда и a_2 лежит справа от x, а, следовательно, и $H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинно.

В обоих случаях $\Psi_B(a, x)$ истинно, и вторая часть условия $(*)$ истинна.

Лемма 2 доказана.

Перейдем к лемме 3.

Доказательство леммы 3. Формула Ψ выглядит так:

$$\Psi_C = H(x) \to \bigvee_{\sigma \in C} \bigwedge_{m \in \{1,2\}} H(a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(m+1)}, x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Поскольку $b \notin H$, то для строго монотонной последовательности x условие $H(x)$ означает ее возрастание. Перестановка t не принадлежит группе H по той же причине, что и в лемме 1. Далее рассуждение, как в лемме 1.

Займемся леммой 4.

Доказательство леммы 4. Для нее формула Ψ выглядит так:

$$\Psi_I = (H(x) \wedge H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)) \to H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Докажем, что формула Ψ_I удовлетворяет условию $(**)$.

1) Допустим, что $P(a)$, т.е. $I(a)$, ложно (это означает, что $a_2 \leqslant a_1$). Требуется доказать, что условие $(*)$ ложно. Если $a_1 = a_2$, то условие $(*)$ ложно, так как нарушена его первая часть.

Пусть $a_2 < a_1$. Возьмем строго возрастающую последовательность $x_1, \ldots, x_n$, целиком лежащую правее a_2, но левее a_1. Оба выражения $H(x)$ и $H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ истинны, но $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – ложно, так как $c \notin H$. Следовательно, $\Psi_I(a, x)$ ложно, и условие $(*)$ ложно, так как нарушена его вторая часть.

2) Пусть $P(a)$, т.е. $I(a)$, истинно (это означает, что $a_1 < a_2$). Докажем истинность условия $(*)$. Первая часть условия $(*)$ истинна, так как $a_1 \neq a_2$. Пусть строго монотонная последовательность $x_1, \ldots, x_n$ целиком лежит в одной из частей, на которые a делит рациональную прямую. Так как $b \notin H$, то истинность условия $H(x)$ означает возрастание последовательности x. Так как $c \notin H$, то для возрастающей последовательности x истинность условия $H(a_2, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ означает, что a_2 лежит левее x. Но тогда a_1 тем более лежит левее x, и истинно $H(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Следовательно, $\Psi_I(a, x)$ истинно, и вторая часть условия $(*)$ истинна.

Лемма 4, а вместе с ней и теорема 4 доказаны.

Теорема 5. *Любое подпространство в I совпадает с одним из пространств O, I, B, C, S. Решетка всех подпространств I представлена на рис. 1.*

Доказательство. Пусть K – подпространство в I. По теореме 2 подпространство K порождается семейством отношений, которое для каждого n содержит не более одного n-местного отношения, причем область истинности этого отношения соответствует собственной подгруппе группы перестановок номеров $1, \dots, n$. По теореме 4 каждое из этих отношений порождает какое-то из пространств I, B, C, S. Подпространство K является объединением этих пространств, а по теореме 1 и замечанию к теореме 1 объединения этих пространств входят в список O, I, B, C, S.

Отсюда также ясно, что единственное нетривиальное пересечение пространств точно отражено на рис. 1.

Теорема 5 доказана.

5. Заключение

В наших результатах размер выражающих формул легко оценить сверху функцией $\exp(\mathrm{Poly}(n))$. Так как количество всех n-местных отношений больше $\exp(\exp(n))$, то для большинства из них кратчайшее выражение через фиксированный конечный класс отношений будет длиннее $\exp(n)$. Но вот кратчайшее выражение отношения из этого фиксированного конечного класса через произвольное n-местное отношение, в принципе, могло бы оказаться короче.

Вопрос. Пусть P – одно из классических подпространств порядка на рациональных числах. Пусть отношение Q лежит в P. Можно ли оценить сверху размер кратчайшего выражения Q через порождающий элемент P полиномом от длины определения Q через порядок?

Примеры результатов такого рода можно найти в [11].

Авторы благодарны С. И. Адяну и С. Ф. Сопрунову за обсуждения и Ю. А. Боравлёву за полезные замечания и помощь в оформлении текста. Мы также благодарны рецензентам за тщательное чтение статьи и советы по ее улучшению.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Л. Семенов, “Пресбургеровость предикатов, регулярных в двух системах счисления”, *Сиб. матем. журн.*, **18**:2 (1977), 403–418.

[2] Ан. А. Мучник, *Выразимый критерий выразимости в арифметике Пресбургера и его применения*, Институт новых технологий, М., 1991; “The definable criterion for definability in Presburger arithmetic and its applications”, *Theoret. Comput. Sci.*, **290**:3 (2003), 1433–1444.

[3] A. Semenov, S. Soprunov, V. Uspensky, “The lattice of definability. Origins, recent developments, and further directions”, *Computer Science – Theory and Applications*, Lecture Notes in Comput. Sci., **8476**, Springer, Cham, 2014, 23–38.

[4] P. J. Cameron, “Transitivity of permutation groups on unordered sets”, *Math. Z.*, **148**:2 (1976), 127–139.

[5] C. Frasnay, “Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **15**:2 (1965), 415–524.

[6] A. L. Semenov, S. F. Soprunov, *Lattice of Relational Algebras Definable in Integers with Successor*, 2012, arXiv: 1201.4439v3.

[7] А. Л. Семёнов, *Математическая логика и алгебра*, Тр. МИАН, **242**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2003, 103–107.

[8] E. V. Huntington, “Inter-relations among the four principal types of order”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38**:1 (1935), 1–9.

[9] S. A. Adeleke, P. M. Neumann, “Relations related to betweenness: their structure and automorphisms”, Mem. Amer. Math. Soc., **131**, no. 623, 1998.

[10] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.

[11] J. Leroux, “A polynomial time Presburger criterion and synthesis for number decision diagrams”, 20*th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science* (*LICS’* 05), Chicago, IL, 2005, 147–156.

$\boxed{\textbf{Ан. А. Мучник}}$
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва

А. Л. Семёнов
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова;
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Московская область, г. Долгопрудный
E-mail: alsemno@ya.ru

Поступило
20.02.2019
После доработки
22.07.2019
Принято к публикации
29.10.2019