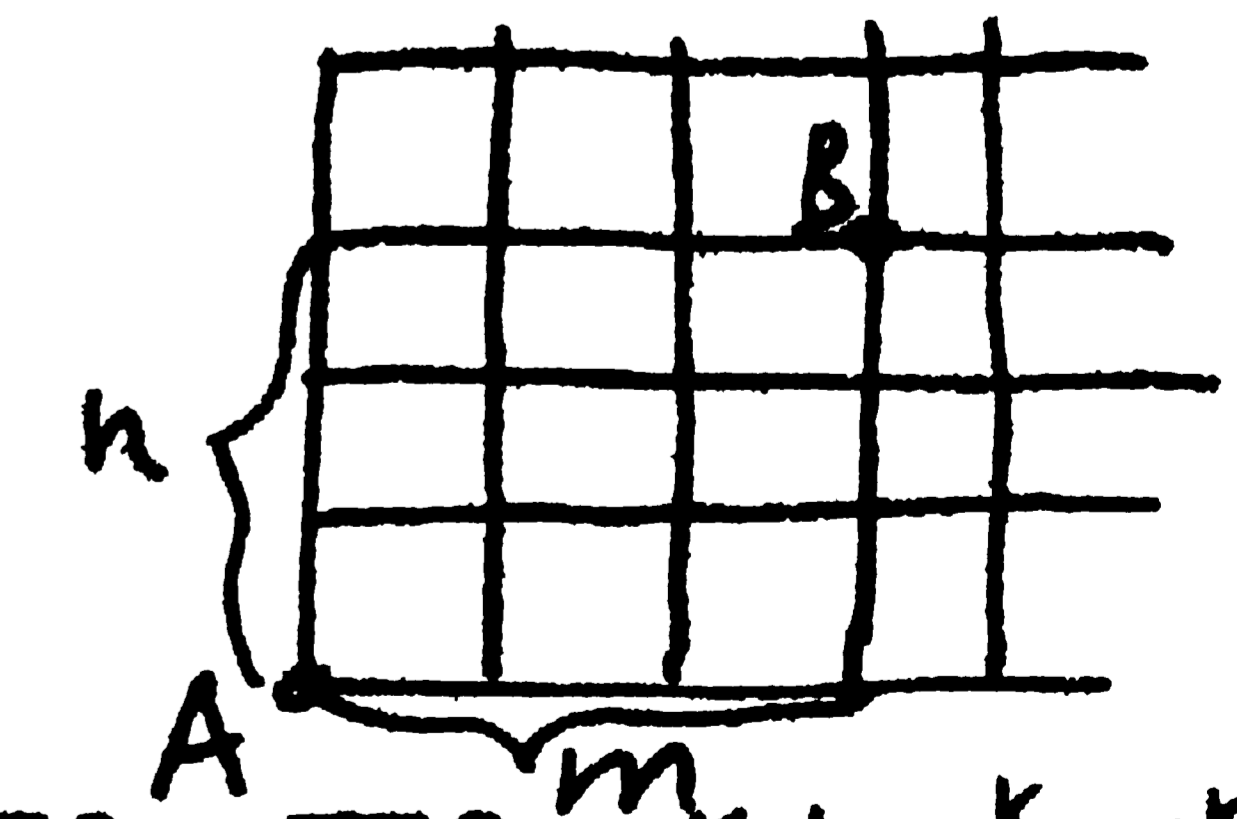
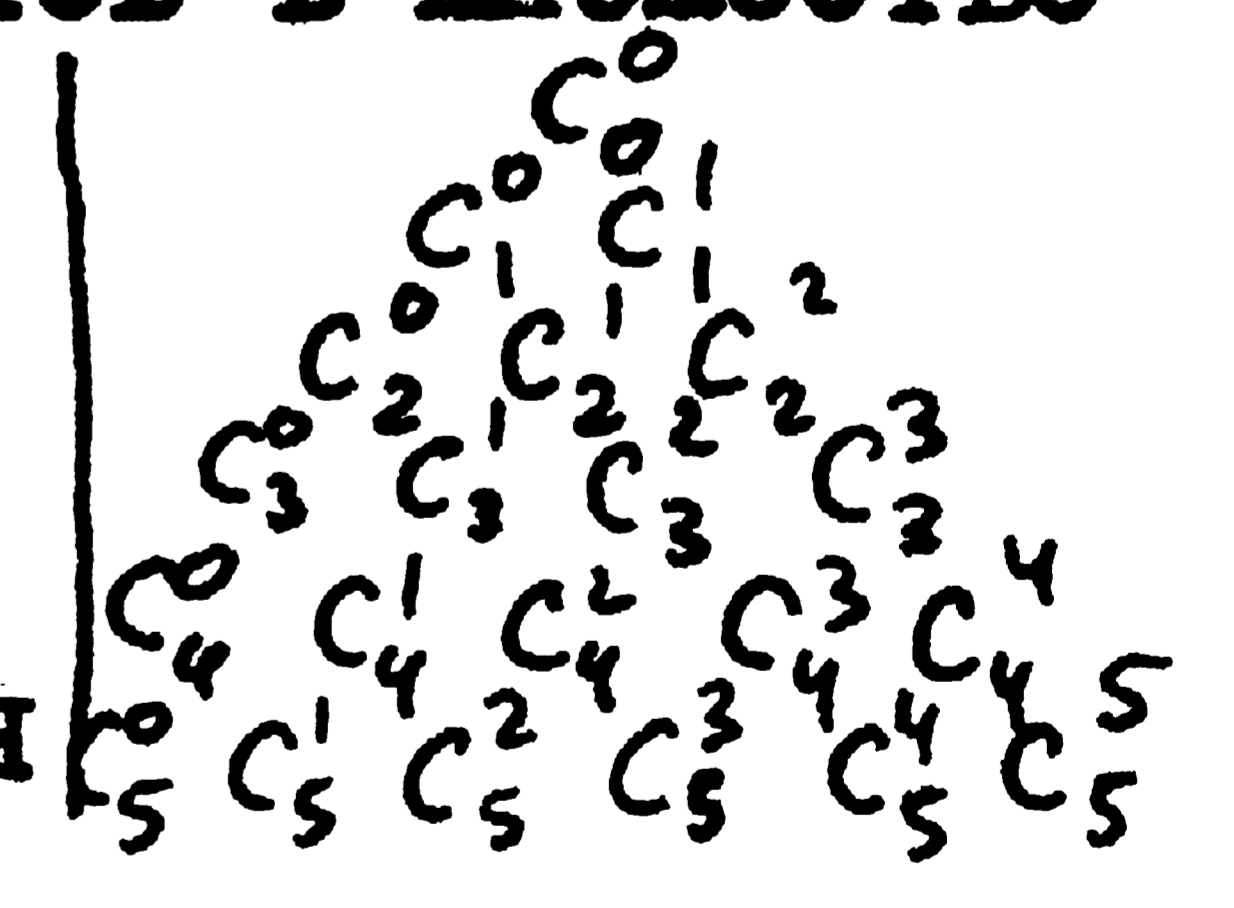


А. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1. На кухне коммунальной квартиры имеется 5 независимо зажигающихся лампочек. Сколько существует способов освещения? /Не горит ни одной, горят две левые, горят две правые - три различных способа/
2. Найти верхнюю границу числа легковых автомашин в СССР, исходя из того, что разным машинам не могут быть присвоены одинаковые номера. /Номер состоит из 4 цифр и 3 букв, в русском языке 33 буквы./
3. Сколько диагоналей в 1979 - угольнике?
4. Найти коэффициент при x^{99} в многочлене $(x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-100)$
5. Сколько существует 6-значных чисел, не содержащих 0 и 8?
6. Сколько 6-значных чисел содержит 8 и не содержит 0?
7. Сколько существует подмножеств у K -элементного множества?
8. Сколько существует функций из K -элементного множества в n -элементное?
9. Сколько существует 9-значных чисел, в которые каждая цифра от 1 до 9 входит ровно по одному разу?
10. Сколькими способами можно построить группу из 7 человек в колонну по одному?
11. Среди семи человек предыдущей задачи есть Петров и Иванов. Сколькими способами можно построить их в колонну так, чтобы Петров стоял ближе к началу, чем Иванов?
12. В роте 3 ефрейтора и 50 рядовых. Надо назначить суточный наряд в составе 1 дежурного /ефрейтора/ и 2 дневальных /рядовых/. /См. подробно "Устав ВС СССР"/ Сколькими способами это можно сделать?

Б. СОЧЕТАНИЯ

1. Сколько существует четырехзначных чисел без повторяющихся цифр /пример таких чисел - 0123 и 9801/
2. Сколько существует двухэлементных подмножеств в множестве из 100 элементов?
3. В классе 42 школьника. Сколькими способами можно выбрать редакционную стенную газету в составе: 1/ редактор 2/ зам.редактора 3/ пом. редактора?
4. В том же классе нужно назначить 3 дежурных по классу. Сколькими способами можно это сделать? /В чем отличие от предыдущей задачи?/
5. Сколько существует функций из K -элементного множества в n -элементное, являющихся вложениями /т.е. переводящих разные элементы в разные/? Это число обозначается A_n^K
6. Сколько существует подмножеств из K элементов в множестве из n элементов? Это число обозначается C_n^K
7. Докажите, что $C_n^K = C_n^{n-K}$ ($0 \leq K \leq n$)
8. Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$
9. Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$
10. Вычислите числовые значения и запишите их в таблицу /см. рис./ Получившаяся таблица называется треугольником Паскаля. /При правильном подходе вычисления должны занять не более минуты/
11. Чему равен предел $a_n = C_{2n}^n / 3^n$?
12. Докажите, что при любом k верно $\frac{n^k}{C_{2n}^n} \rightarrow 0$
13. Город состоит из прямоугольных кварталов, разделенных улицами /см. рис./ Сколько существует кратчайших путей из A в B ?
14. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$
15. Докажите, что $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n + C_n^n$
16. Используя предыдущую задачу, дайте новое решение задачи 8.
17. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$
18. Докажите, что если $\alpha > 1$, а n^k - любое натуральное, то последовательность $a_n = n^k / \alpha^n$ стремится к 0. /Мораль: геометрическая прогрессия со знаменателем, большим 1, растет быстрее любой степени n /
19. Докажите: $C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0$; $(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$



В. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ /продолжение/

1. Для проведения субботника 42 учеников класса надо разбить на группы следующего состава: 20 чел. на уборку школы, 15 чел. на пришкольный участок, 7 чел. на уборку класса. Сколькими способами это можно сделать?

2. То же, если в каждой из 3 групп надо назначить ответственного.

3. В "Спортлото" разыгрывается 6 номеров из 49. Сколько возможно результатов тиража? / не учитывая так называемый "льготный шар" /

4. То же с учетом льготного шара /этот шар разыгрывается после 6 основных и играет некоторую особую роль; см. объявления тиражной комиссии/.

5. Найти вероятность совпадения ровно 3 цифр при игре в "Спортлото". Это означает следующее. Представьте себе, что Вы загадали какие-то 6 цифр; надо подсчитать количество способов розыгрыша, при которых Вы угадываете ровно 3 цифры, и поделить на общее количество способов. Дать ответ в процентах.

6. Когда вероятнее угадать ровно 3 цифры: при игре в "Спортлото" или в "Субботное спортлото" /5 из 36/ ?

7. Вы бросаете игральную кость /представляющую собой кубик, грани которого помечены цифрами от 1 до 6/ 6 раз. Какова вероятность того, что выпадет хотя бы одна четверка? А ровно одна четверка? /Вероятность равна отношению числа "благоприятных" исходов к общему числу; в данной задаче исходы суть последовательности из 6 чисел от 1 до 6; благоприятные исходы - те, где есть хотя бы одна четверка /в первом случае/ или где есть ровно одна четверка /во втором/. "Физический смысл" вероятности таков: если проделать большое число N экспериментов, в каждом из которых бросать кость 6 раз и рассмотреть число M тех экспериментов, где была хотя бы одна четверка, то отношение M/N будет близко к вычисленной нами вероятности. Точный смысл слова "близко", впрочем, современной науке неясен; это одна из важнейших философских /в хорошем смысле этого слова/ проблем, возникающих в физике, особенно квантовой./

8. Докажите, что число последовательностей из n нулей и единиц, не содержащих двух нулей подряд, равно $n+1$ -му числу Фибоначчи a_{n+1} . /Последовательность Фибоначчи определяется так: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих, так что $a_2 = 2$, $a_3 = 3 \dots$ /

9. Найти предел a_{n+1}/a_n . Указание. Назовем последовательность обобщенно-фибоначчиевой /оф/, если каждый член /начиная с a_2 / равен сумме двух предыдущих. Докажите, что: а/ сумма двух офп есть офп; б/ если умножить все члены офп на одно и то же число, то получится офп; в/ если у двух офп совпадают два первых члена, то и все члены совпадают; г/ найдите все α при которых последовательность $a_n = \alpha^n$ является офп; д/ используя предыдущие пункты, найдите общую формулу для обычных чисел Фибоначчи.

10. 700 родичей Пиро /см. А.Франс, "Остров пингвинов", кн. 6, гл. 3, "Библиотека всемирной литературы", М.1970, стр.307/ на сорок первый день решили избрать из своего числа комиссию по борьбе за оправдание Пиро. При этом в комиссии должно быть нечетное число членов /в интересах однозначности голосования/. Сколькими способами это можно сделать?

11. Сколькими способами можно представить число 100 в виде суммы трех слагаемых /порядок существенен: $50+25+25$ и $25+50+25$ - разные представления/? Указание. Представьте себе 100 белых камушков, положенных в ряд. Сколькими способами можно положить среди них 2 черных камушка? Для этого представьте себе 102 белых камушка, из которых два покрасили черной краской.

12. Троллейбусный билет иногда называют "счастливым", если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех. Сколько существует счастливых билетов в одной серии?

13. Найти коэффициент при $x^{50} y^{25} z^{25}$ в $(x+y+z)^{100}$

14. Докажите, что произведение любых трех соседних натуральных чисел делится на 6 и, вообще, произведение любых n соседних делится на $n!$.

15. В комнате несколько человек, знающих хотя бы один из трех языков. Шестеро знают английский, шестеро - немецкий, семеро - французский. Английский и немецкий одновременно знают четверо, немецкий и французский - трое, английский и французский - двое. Один человек знает все три языка. Сколько человек в комнате? Сколько из них знает только английский?

16. В кассе продают билеты по 50 коп. В очереди из $2n$ человек имеется n человек с полтинниками и n человек с рублями. До продажи денег в кассе нет. Какова вероятность того, что очередь пройдет без задержки? /Ответ: $1/n+1$ /