Математическая индукция.

Решения задач методом математической индукции следует записывать в следующей форме. В решении, приведенном ниже, подчеркнуты части, которые в соответствующим образом видоизмененном виде должны присутствовать во всех решениях.

Задача. Докажите, что $1+2+3+\ldots+K = k\cdot(k+1)/2$

Решение. Обозначим через $A(k)$ утверждение: $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$
Докажем $A(1)$. В самом деле, $1 = 1\cdot(1+1)/2$
Предположив $A(k)$, докажем $A(k+1)$. В самом деле, $1+\ldots+k+k+1 = (1+\ldots+k)+k+1 =$ (по предположению $A(k)$) $= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = (k+1)\cdot(k+2)/2$

1. При всех натуральных n
$$1^2+\ldots+n^2 = 1/6\cdot n(n+1)\cdot(2n+1)$$

2. При всех $n\in\mathbb{N}$ и $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$
$$1+q+\ldots+q^n = (q^{n+1}-1)/(q-1)$$

3. При $n\in\mathbb{N}$ и $p\in\mathbb{R}$, таких, что $p>0$
$$(1+p)^n \geqslant 1+np$$

4. Пусть дано n прямых на плоскости, никакие 2 из которых не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке. Докажите, что эти прямые делят плоскость на $1+n\cdot(n+1)/2$ частей.

5. Длина ломаной, соединяющей 2 точки на плоскости, не меньше длины соединяющего их отрезка.

6. Если $n\in\mathbb{N}$ и $n\geqslant 5$, то $2^n\leqslant n!$

7. Последовательность чисел формируется так: два первых выбираются произвольно, а каждое следующее равно сумме всех предыдущих. Докажите, что если два первых числа четны, то и все члены последовательности четны.

8. Если $a_1,\ldots,a_n$ -действительные числа, такие, что $a_1,\ldots,a_n>0$ и $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=1$,
то $a_1+a_2+\ldots+a_n\geqslant n$

Указание. А. Докажите сначала для $n=2$
Б. Проводя индукционный переход, использовать, что среди неравных положительных чисел, произведение которых равно 1, есть число, большее 1 и есть число, меньшее 1.

9. Докажите неравенство о среднем арифметическом и геометрическом: если $a_1,\ldots,a_n>0$, то
$$(a_1+\ldots+a_n)/n \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

Указание. Задача 8 утверждает это в частном случае

-------Задачи 10-13: биномиальные коэффициенты-----

10. Числа C_n^k $n=0,1,\ldots$; $0\leqslant k\leqslant n$ определяются соотношениями:
а/ при всех $n\geqslant 0$ $C_n^0=1$, $C_n^n=1$
б/ при всех $n\geqslant 0$ и при всех k таких, что $1\leqslant k\leqslant n-1$
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$$
Найдите C_n^k при всех $n\leqslant 5$, ответ дайте в виде таблицы.
/Необходим только ответ/

11. Докажите, что при всех n и k, $n\geqslant 0$, $0\leqslant k\leqslant n$
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ /при этом считаем 0! = 1/

12. Докажите, что при всех $n\geqslant 0$
$$(a+b)^n = C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^na^{n-n}b^k$$
/при этом $a^0=b^0=1$/. Запишите эти формулы при $n=0,1,2,3$

13. Докажите, что C_n^k равно числу различных k -элементных подмножеств n -элементного множества.

14. Докажите, что число $\underbrace{111\ldots 11111}_{3^n}$ делится на 3^n и не делится на 3^{n+1}.

15. Докажите с помощью математической индукции принцип наименьшего числа: "всякое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент".

16. Выведите принцип математической индукции из принципа наименьшего числа.