ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА.

Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$.

§1. Делимость, кратные.

Определение. $a \in \mathbb{Z}$ делится на b, если существует такое c, что $a = b \cdot c$ / a, b, c – целые числа / (Пишут: $a \vdots b$)

Задача. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a + b \vdots c$

Решение. Раз $a \vdots c$, то существует целое k, такое, что $a = k \cdot c$. Аналогично существует целое l, такое, что $b = l \cdot c$. Тогда $a + b = (k+l) \cdot c$ из чего по определению следует, что $a + b \vdots c$

Задачи. 1а) $\dfrac{a \vdots c,\ b \vdots c}{a - b \vdots c}$ 1б) $0 \vdots a$ 1в) $a \vdots 1$ 1г) $n \vdots 0 \Rightarrow n = 0$ 1д) $0 \vdots 0$

1е) $\dfrac{a \vdots b,\ b \vdots c}{a \vdots c}$ 1ж) $\dfrac{a \vdots c}{ab \vdots c}$ 1з) Если $c \neq 0$ и $ac \vdots bc$, то $a \vdots b$ 1и) $\dfrac{a \vdots b}{a \vdots -b}$

1k) если $a, b, c, d \neq 0$, $ab = cd$ и $a \vdots c$, то $d \vdots b$

1л) если $a^2 \vdots a + b$, то $b^2 \vdots a + b$

/ Над чертой пишутся условия, под – то, что надо доказать/

Задачи. Доказать верные и опровергнуть неверные утверждения:

2а) $\dfrac{a \vdots c,\ b \vdots c,\ c \neq 0}{ab \vdots c \text{ и } ab/c \vdots c}$ 2б) $\dfrac{a \not\vdots b,\ c \not\vdots b}{a + c \not\vdots b}$ 2в) $\dfrac{a \vdots b,\ a \vdots c}{a \vdots bc}$ 2г) $\dfrac{a \not\vdots b \quad c \not\vdots b}{ac \not\vdots b}$

Деление с остатком. Если $a \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, то существует единственная пара чисел $\langle q, r \rangle$, такая, что:

1. $a = bq + r$ 2. $0 \leq r < b$

q называется частным, r – остатком.

3. Задача. Нарисуйте на числовой оси в интервале $[-20, 20]$ все числа, дающие при делении на 4 остаток 1.

4. Задача. При каждом n наидите остаток от деления $n^2 + 3n + 5$ на n.

5. Задача. Докажите, что остаток от деления n на 3 равен остатку от деления $100n$ на 3.

<u>Кратные</u>. Слова "a кратно b" – синоним слов "a делится на b". Множество всех кратных a обозначаем $\mathbb{Z}a$. Например, $\mathbb{Z}1 = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}2$ = множеству всех четных чисел и т.д.

6. Задача. $\mathbb{Z}a$ является <u>идеалом</u> / Множество $M \subset \mathbb{Z}$ называется идеалом, если вместе с любыми числами x и y оно содержит их сумму $x + y$ и разность $x - y$, а также вместе с любым числом x содержит все его кратные nx при всех $n \in \mathbb{Z}$/

§2. Общие кратные.

Определение. c – общее кратное a и b, если c кратно a и c кратно b.

Согласно этому определению множество общих кратных a и b равно $\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$

7. Задача. Докажите, что множество общих кратных a и b является идеалом. /Можно сразу доказать, что пересечение идеалов – идеал, а затем использовать задачу 6 /

8. Теорема о наименьшем общем кратном.

В множестве общих кратных a и b есть такой элемент x, что всякое общее кратное для a и b кратно x. Такой элемент x называется наименьшим кратным чисел a и b.

План доказательства. 1случай. Множество общих кратных есть $\{0\}$ /так, например, бывает, если $a = b = 0$/; чему в этом случае будет равно x?

Случай 2. Множество общих кратных содержит ненулевой элемент c: $c \in \mathbb{Z}a \wedge \mathbb{Z}b$, $c \neq 0$. Тогда оно содержит и некоторое натуральное число /если $c < 0$, то возьмем $-c$/. Обозначим через x наименьшее натуральное число, являющееся общим кратным a и b. Утверждается, что x -требуемое. Для этого надо доказать, что если y -любое общее кратное a и b, то $y \vdots x$ ./Для этого разделите y на x с остатком/.

9. Задача. Докажите, что если x - наименьшее общее кратное a и b /т.е. такое общее кратное a и b, что оно делит любое другое общее кратное a и b /, то $\mathbb{Z}x = \mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b$

10. Задача. Докажите, что если x -наименьшее общее кратное, то $-x$ - также наименьшее общее кратное и других общих кратных нет.

11. Контрольный вопрос. Найдите НОК/0,0/ , НОК/2,5/, НОК /0,5/ Например, НОК /2,3/ = +6 или -6.

12. Задача. Докажите, что если $a \vdots b$, то a - наименьшее о.к. для a и b /Напоминаем, что по определению это означает, что: 1. a -общее кратное для a и b. 2. если a_1-другое общее кратное для a и b, то $a_1 \vdots a$ /

13. Задача. Обобщите доказательство теоремы и докажите, что всякий идеал $\mathcal{J}$ содержит такой элемент x, что все элементы $\mathcal{J}$ кратны x. Докажите, что если x -такой, то $\mathbb{Z}x = \mathcal{J}$

14. Задача. Докажите теорему о НОК с помощью задачи 13. /К какому идеалу $\mathcal{J}$ нужно применить задачу 13 ?/

Задача 13 дает нам, что все идеалы имеют вид $\mathbb{Z}a$ при некотором a. Если идеал $\mathcal{J} = \mathbb{Z}a$, то мы говорим, что a -образующая идеала $\mathcal{J}$.

15. Докажите, что если a -образующая идеала $\mathcal{J}$, то $-a$ - тоже образующая идеала $\mathcal{J}$ и других образующих нет.

§3. Наибольший общий делитель.

16. Теорема о наибольшем общем делителе.
При всех a и b существует такое x, что x -общий делитель a и b и всякий другой общий делитель a и b есть делитель x /Если x удовлетворяет этому свойству, то x называется наибольшим общим делителем a и b /

План доказательства.
1-ый вариант. Пусть c -одно из НОК чисел a и b. Положите $x = ab/c$ /Контрольный вопрос: почему $ab \vdots c$?/ Тогда x есть наибольший делитель a и b /проверьте!/
2-ой вариант. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}(a,b)$ всех чисел, представимых в виде суммы $ma + nb$ /то есть в виде суммы кратное a + кратное b /. Это идеал /Почему?/. Пусть x -его образующая. Тогда x -НОД чисел a и b /Проверьте!/

17. Докажите, что если x -НОД чисел a и b, то $-x$ - тоже НОД чисел a и b и других НОД нет.

18. Контрольный вопрос. Найдите НОД /0,0/, НОД /2,3/, НОД /0,5/. Например, НОД /4,6/ есть +2 или -2.

19. Докажите, что , каковы бы ни были a и b, НОК/a,b/ $\times$ НОД /a,b/ $= a \times b$ или $- a \times b$. /Строго говоря, у чисел a и b есть 2 НОК и 2 НОД, но в данном случае это не важно, так как они отличаются знаком/.

20. Задача. Если $a \vdots b$, то b -НОД (a,b)/Напоминаем, что , согласно определению, для этого надо проверить, что b -общий делитель a и b и что любой другой общий делитель a и b кратен этому/

§4. Взаимная простота.

21. Задача. Следующие свойства 1,2 и 3 равносильны.
1. У a и b нет общих делителей, кроме 1 и -1.
2. 1 и -1 являются НОД чисел a и b.
3. Существуют целые m и n такие, что $ma + nb = 1$

В этом случае / т.е. если выполнено любое из эквивалентных свойств 1-3 / говорят, что a и b взаимно просты.

22. Задача. При каких натуральных n числа n и $2n + 2$ взаимно просты ?

23. Если c -НОД чисел a и b, то a/c и b/c взаимно просты.

24. Если a взаимно просто с $b\cdot c$, то a взаимно просто с b и a взаимно просто с c .

25. Основное свойство взаимно простых чисел: a и b вз. просты и $ca \vdots b$ $\Rightarrow$ $c \vdots b$

Указания к задаче №23. 1 способ. $ca \vdots b, ca \vdots a \Rightarrow ca \vdots НОК/a,b/=ab \Rightarrow c \vdots b$. 2 способ. Рассмотреть идеал таких x , что $xc \vdots b$ и показать, что его образующая = ± 1. 3 способ. Применить в качестве определения взаимной простоты свойство 3 из задачи №21.

26. Докажите, что уравнение $ax+by=c$ /относительно x и y/ имеет целые решения тттк /тогда и только тогда, когда/ НОД/a,b/ является делителем c .

27. Если a вз. просто с b и c, то a вз. просто с $b\cdot c$.

§5. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА.

Определение. Число $p>1$ называется простым, если его делителями являются только числа $1,-1,p,-p$.

28. Докажите, что если $1<p\leq 100$ не делится на 2,3,5,7, то оно простое.

29. Если p-простое, то a не взаимно просто с $p \Leftrightarrow a \vdots p$.

30. Если p-простое и $ab \vdots p$, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$. Если p-простое и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, то $a_1 \vdots p$, или $a_2 \vdots p$, ... или $a_n \vdots p$.

31. Каждое число можно разложить в произведение простых /докажите!/

32. Теорема об единственности разложения на простые множители. Если $a>0$ разложено двумя способами на простые множители $a=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots$ $a=q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots$, то эти разложения отличаются лишь порядком, т.е. содержат одни и те же простые числа и в одном количестве. Указание. Докажите сначала, что они содержат одни и те же простые числа.

33. Докажите, что если $a \vdots b$, p-простое, то число раз, которое p входит в разложение $a \geq$ числа раз, которое p входит в разложение b .

34. Докажите, что для положительных a и b НОД/a,b/ и НОК/a,b/ можно вычислять способом, известным из начальной школы: если число p входит в a m раз, а в b – n раз, то в НОД/a,b/ оно входит $\min/n,m/$, а в НОК/a,b/ оно входит $\max/n,m/$ раз.

35. Верно ли, что если $a^3 \vdots b^3$, то $a \vdots b$?

36. Теорема Евклида.

а/. На столе 211 книг. Проверьте, что если их связывать по 2,3,5, или 7 книг в пачку, то всегда останется одна лишняя /211=2 3 5 7 + 1/

б/. Сколько должно быть книг на столе, чтобы всегда оставалась лишняя при связывании по 2,3,5,7,11,13 штук в пачку?

в/. Пусть $p_1; p_2; \ldots p_m$-любые простые числа. Придумайте число N , которое при делении на каждое из этих чисел p_i дает в остатке 1.

г/. Докажите, что кроме $p_1; p_2; \ldots p_m$ существуют и другие простые числа.

Указание. Любой простой делитель числа N , построенного в задаче в/. отличен от $p_1; \ldots p_m$.

37. Докажите, что 2^{16} с любым числом последовательности $2+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1$ взаимно просто.

Указание. $2^{16}-1=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$.

38. Если a и b не имеют общих простых делителей, то a и b взаимно просты.

39. Решите задачу 27, если она раньше не вышла.

* 40. Докажите, что любые два числа из последовательности

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^4+1,\ 2^8+1,\ 2^{16}+1, \ldots ,\ 2^{2^n}+1$$

взаимно просты.

41. Получите отсюда новое доказательство теоремы Евклида. Указание. Если бы простых чисел было конечное число, то не могло быть бесконечной последовательности попарно взаимно простых чисел.

* 42. Докажите "китайскую теорему об остатках": каковы бы ни были натуральные числа $a_1 \ldots a_n$ и натуральные попарно взаимно простые числа $b_1 \ldots b_n$, причем при всех i $a_i < b_i$, существует натуральное число C , которое при делении на b_i дает остаток a_i .