Основные понятия логики – 1

А. Высказывания. Высказыванием /суждением, утверждением,.../ называется предложение /обычно повествовательное/, которое может быть истинным или ложным. Примеры высказываний: "123456789 - простое число", " функция синус четна" , "завтра будет дождь". Примеры не-высказываний: "Вперед!" , "будет ли завтра дождь ?", "Да будет свет!". Говорят, что значением высказывания является истина /И/ , если оно истинно;в противном случае его значением является ложь /Л/

Б. С помощью союзов "и","или", "если...то...", "неверно,что..." из одних высказываний могут быть образованы другие, составные. Пример составного высказывания: "синус - четная функция"или"синус-периодическая функция". Значение сложного высказывания определяется значениями тех высказываний , из которых оно составлено. Так, например, А или В истинно, если хотя бы одно из высказываний А и В истинно, и ложно, если и А, и В ложны. /См. таблицу/

B \ A	И	Л
И		
Л		

А и В ($A \wedge B$)

B \ A	И	Л
И	И	И
Л	И	Л

А или В ($A \vee B$)

B \ A	И	Л
И		
Л		

($A \Rightarrow B$) Если А, то В

A	И	Л

"Неверно, что А" ($\neg A$)

1. Заполнить остальные места в таблице и объяснить, как и почему они заполнены. /Рядом с каждой частью таблицы указано сокращенное символическое обозначение каждого союза/

В. Формулы логики высказываний. Примеры формул: $(A \wedge B) \vee C$ $((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \vee D)) \Rightarrow B$ и т.п. Если вместо букв А,В,С... в некоторую формулу подставить высказывания, то и вся формула станет высказыванием.

2. Пусть известно, что А ~~ис~~тинно, В ложно, С истинно, Д ложно. Найти значение приведенных выше примеров формул.

3. Заполнить таблицу:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$	$(A \wedge B) \vee A$	$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
И	И				
И	Л				
Л	И				
Л	Л				

Г. Логические законы. Формула $\Phi(A, B, \ldots)$ называется логическим законом, если при всех значениях А,В,... она всегда имеет значение И. Мы говорим, что формулы $\Phi_1(A, B, \ldots)$ и $\Phi_2(A, B, \ldots)$ эквивалентны, если при всех значениях А,В,... их значения совпадают.

4. Докажите, что Φ_1 и Φ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда формула $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2) \wedge (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_1)$ /обозначаемая короче $\Phi_1 \Leftrightarrow \Phi_2$ и называемая эквивалентностью Φ_1 и Φ_2 / является логическим законом.

Говорят, что Φ_2 является следствием Φ_1 , если на всех тех наборах значений, где истинна Φ_1 , истинна и Φ_2 .

5. Доказать, что Φ_2 является следствием Φ_1 тогда и только тогда, когда $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ есть логический закон.

Говорят, что формулы Φ_1 и Φ_2 несовместны,если не существует набора значений, на котором обе они истинны.

6. Сформулировать и доказать аналог задач 4 и 5 : Φ_1 и Φ_2 несовместны тогда и только тогда, когда .....является логическим законом.

7. Докажите эквивалентность следующих пар формул: $\neg\neg A$ и A , $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B)$ и $\neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \Rightarrow B)$ и $A \wedge (\neg B)$ *)

8. Выразите $A \vee B$ через $\wedge, \neg$ / то есть найдите формулу, эквивалентную $A \vee B$ и содержащую лишь $\wedge$ и $\neg$ /

9. Выразите $A \Rightarrow B$ через $\wedge, \neg$.

10. Докажите, что для любой формулы существует эквивалентная ей формула, содержащая только $\wedge$ и $\neg$.

Д. Составление формул по таблицам истинности

11. Придумать формулу, таблица истинности которой была бы такой:

12. То же для другой таблицы истинности:

13. Докажите, что для любой таблицы можно составить формулу, для которой эта таблица будет таблицей истинности.

A	B	C	$\Phi(A,B,C)$
И	И	И	Л
И	И	Л	И
И	Л	И	Л
И	Л	Л	И
Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л

A	B	$\Phi(A,B)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

*) 7 (продолжение). Какие формулы среди $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $\neg A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$ эквивалентны?

Е. Выразимость одних союзов через другие.

14. Можно ли выразить $\neg A$ через $\wedge, \vee, \Rightarrow$?
15. Можно ли выразить $A \Rightarrow B$ через $\wedge, \vee$?
16. Доказать, что через новую связку, имеющую таблицу

B \ A	И	Л
И	Л	И
Л	И	И

, можно выразить все остальные.

Ж. Анализ словесных формулировок. /Приведенные задачи заимствованы из книги: Э.Мендельсон, Введение в математическую логику, стр.30-31/

Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными. Для этого представить каждое рассуждение в виде формулы и проверить, будет ли она логическим законом.

17. Если Джонс - коммунист, то Джонс - атеист. Джонс - атеист. Следовательно, Джонс - коммунист. /Соответствующая формули имеет вид $((A \Rightarrow B) \wedge B) \Rightarrow A$; $A =$ "Д. комм.", $B =$ "Д. атеист"/

18. Если строить противоатомные убежища, то другие государства будут чувствовать себя в опасности, а наш народ получит ложное представление о своей безопасности. Если другие страны будут чувствовать себя в опасности, то они смогут начать превентивную войну. Если наш народ получит ложное представление о своей безопасности, то он ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира. Если же не строить противоатомные убежища, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны. Следовательно, либо другие страны могут начать превентивную войну и наш народ ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира, либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны.

19. Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

З. Применение логики высказываний к проверке тождеств.

20. Докажите, что $x \in (A \wedge B)$ тогда и только тогда, когда истинно $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Составьте аналогичные формулы для $A \cup B$ и $A \setminus B$. Применим это соображение к доказательству тождества $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. В самом деле, надо доказать, что $[x \in (A \cap B) \setminus C] \Leftrightarrow [x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)]$ всегда истинно; перепишем это в виде $((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in C)) \wedge ((x \in B) \wedge \neg(x \in C))$. Это всегда истинно, так как $(a \wedge b) \wedge \neg c \Leftrightarrow (a \wedge \neg c) \wedge (b \wedge \neg c)$ - логический закон /проверьте!/.

21. Применяя этот метод, проверьте, являются ли тождествами $(A \cap (B \setminus C)) = (A \cap B) \setminus C$; $(A \setminus B) \vee B = A$. Как с помощью этого метода строить контрпримеры к не-тождествам?

И. Высказывательные формы и кванторы.

Фраза "x - простое число" не является высказыванием, но станет им, если вместо переменной x подставить конкретное число. То же можно сказать и о фразах "x делится на y", " функция f четна" и т.п. Такие фразы называются <u>высказывательными формами,</u> входящие в них буквы, от значений которых зависит истинность формы - <u>параметрами</u>. Высказывательные формы можно соединять теми же союзами "и", "или", "если...,то", "неверно, что". Кроме того, можно употреблять еще <u>кванторы</u> $\forall$ /для всех/ и $\exists$ /существует/, например: $\neg \exists y ((y \neq 1) \wedge (x \vdots y))$ - высказывательная форма с параметром x ;она верна, если x - простое число.

22. Запишите с помощью кванторов следующие утверждения: а/ последовательность x_n ограничена б/ посл. x_n монотонно возрастает;в/ $[a, b]$ является кормушкой для x_n ;г/ $[a, b]$ является ловушкой для x_n ;д/ a является пределом x_n ;е/ a является предельной точкой x_n ;ж/ функция $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна в x_0 ; з/ функция $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках $[a, b]$; и/ функция $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ равномерна непрерывна на $[a, b]$; к/ последовательность функций f_n сходится к f в каждой точке;л/ последовательность f_n равномерно сходится к f .

К. Логические законы с кванторами.

Формулы с кванторами имеют вид вроде следующего: $\forall x \exists y A(x,y,z)$; $\forall x \exists y (A(x) \Rightarrow B(y))$; $A(x) \vee \exists y B(y,z)$.

У каждой формулы есть список параметров. /В наших примерах у первой единственный параметр z, у второй нет параметров, у третьей x и z/ Если вместо $A(x)$, $B(\ldots)$ и т.д. подставить конкретные высказывательные формы, то формулы без параметров будут выражать некоторые высказывания. Формулу с кванторами назовем логическим законом, если она всегда истинна /независимо от того, что понимать под $A, B, \ldots$ /. Пример логического закона: $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$

23. Являются ли следующие формулы логическими законами? Дать обоснованный ответ /если да, то объяснить, почему, если нет, то привести пример/

а) $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$ б) $\neg \forall x A(x) \Rightarrow \exists x \neg A(x)$

в) $\exists x \neg A(x) \Rightarrow \neg \forall x A(x)$ г) $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

д) $\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$

е) $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

ж) $\forall x (A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$

з) $\neg \forall x \neg (A(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x)$

и) $\forall x (A(x) \Rightarrow \exists y A(y))$

к) $\forall x (A(x) \Rightarrow \forall y A(y))$

л) $\neg \forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x \neg A(x) \wedge \exists x B(x)$