МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ : пролегомены
/Контрольный вопрос: что такое пролегомены ? /

ТЕМА 1 "Почти для всех"

Определение. Мы говорим, что какое-то свойство выполнено "почти для всех" натуральных чисел, если оно не выполнено лишь для конечного числа натуральных чисел.

∘ 1.1 Докажите, что $1/n < 0,001$ почти для всех натуральных n / то есть, ~~[illegible]~~ что это неверно лишь для конечного числа n / /согласно определению

∘ 1.2 Верно ли для почти всех n, что $n/2$ - целое

∘ 1.3 ... что $n > 100$

∘ 1.4 ... что $n < 100$

1.5 ...что $0,1\, n^2 > 100\, n$

1.6 ... что $1000\, n^2 < 2^n$

1.7 ... что $100\, n^3 > 0,1\, n^4$

1.8 ... что $100^n \geq n!$

∘ 1.9 ... что n - составное

∘ 1.10. Докажите, что следующие свойства равносильны:
1/ $A(n)$ верно почти для всех n
2/ Существует такое m, что для всех $n \geq m$ верно $A(n)$

1.11. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что для любого натурального N верно утверждение: "почти все члены последовательности делятся на N "?

ТЕМА 2 "Последовательности"

Определение. Последовательность $a: a_1, a_2, \ldots$ действительных (чисел) называется ограниченной сверху числом A, если $a_n \leq A$ для всех n и ограниченной снизу числом B, если $a_n \geq B$ для всех n. Если последовательность ограничена и сверху, и снизу, то она называется ограниченной.

∘ 2.1 Ограничены ли сверху или снизу следующие последовательности:
1,2,3,4,5,6,...

∘ 2.2 1,0,1,0,1,0,1,0,...

∘ 2.3 1,-1,1,-1,1,-1,...

∘ 2.4 1, 1/2 , 1/3 , 1/4 , 1/5 ,...

*) Пусть $a: a_1, a_2, a_3, \ldots$ -последовательность. a_k называется наибольшим /наименьшим/ членом последовательности, если при всех l $a_l \leq a_k$ /соответственно $a_l \geq a_k$/. Заметим, что по этому определению у последовательности 1,1,1,... -все члены наибольшие и наименьшие одновременно.

∘ 2.6 Придумайте ограниченную последовательность, которая имеет наибольший и наименьший члены /не обязательно единственные/

∘ 2.7 ...которая имеет наибольший, но не имеет наименьшего члена.

∘ 2.8 ...которая имеет наименьший, но не имеет наибольшего члена.

∘ 2.9 ...которая не имеет ни наибольшего, ни наименьшего членов.

∘ 2.10 Пусть известно, что последовательность почти вся лежит в отрезке $[0, 1]$. /Согласно определению в теме 1, это означает, что вне этого отрезка находится лишь конечное число ее членов/. Например, последовательность 0,2,0,2,0,2,... не лежит почти вся в $[0, 1]$, а 10, 1, 0.1 , 0.01 , 0.001 , ... - лежит.

Какие из следующих утверждений всегда истинны, какие всегда ложны, а какие могут быть и истинными, и ложными ?

- все члены последовательности лежат в отрезке $[-100, 100]$

∘ 2.11 -почти все члены последовательности лежат в $[0, 2]$

∘ 2.12 -почти все члены последовательности лежат в $[0,5 , 1,5]$

∘ 2.13 -почти все члены последовательности лежат в $[2, 3]$

∘ 2.14 -в отрезке $[2, 3]$ лежит бесконечное число членов последовательности

2.15 - последовательность ограничена /определение в начале темы 2/

*) Задача 2.5 по техническим причинам отсутствует

Продолжение темы 2 "Последовательности"

∘ 2.16 Суммой последовательностей $a: a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b: b_1, b_2, b_3\ldots$ называется последовательность $c: c_n = a_n + b_n$
Верно ли, что если a и b ограничены сверху, то c ограничена сверху ?

∘ 2.17 ...что если а ограничена сверху, а b –снизу, то c ограничена сверху ?

∘ 2.18 ...что если c ограничена сверху, то a ограничена сверху ?

∘ 2.19 ... что если c ограничена сверху, а b снизу, то a ограничена сверху ?

ТЕМА 3 "Ловушки и кормушки"

Определение. Назовем множество М ловушкой для последовательности, если почти все члены ее лежат в М /= вне М лишь конечное число членов последовательности/.

∘ 3.1 Какие из следующих множеств являются ловушками для последовательности 0,1,0,1,0,1,...?
а/ $]0,1[$ б/ $]0,1]$ в/ $[0,1]$ г/ $[1/2, 3]$ д/ $[-5,-1[$ е/ $[-2,2]$

∘ 3.2. Какие из следующих множеств являются ловушками для последовательности + 1, –1/2, +1/3, –1/4, +1/5, ...
а/ $]0,1]$ б/ $[0,1]$ в/ $[-1,1]$ г/ $[-1/100, 1/100]$ д/ $\{x \mid x>0\}$ е/ $[1/1000, 1]$

Определение. Назовем множество М кормушкой для последовательности, если в нем находится бесконечное число ее членов.

∘ 3.3 Заменить в 3.1 слово "ловушками" на "кормушками".

∘ 3.4 Заменить в 3.2 слово "ловушками" на "кормушками".

∘ 3.5 Может ли ловушка не быть кормушкой? /для [redacted] той же последовательности/ /Если да, то приведите пример, то есть постройте последовательность и множество, которое является для нее ловушкой, но не является кормушкой/.

∘ 3.6 Может ли кормушка не быть ловушкой ? /См. замечания к 3.5/

∘ 3.7 Существует ли последовательность, для которой никакой отрезок $[a, b]$ не является ловушкой ?

∘ 3.8 Существует ли последовательность, для которой никакой отрезок $[a, b]$ не является кормушкой ?

∘ 3.9 Существует ли последовательность, для которой всякий отрезок $[a, b]$ / с $a < b$ / является ловушкой ?

3.10 Существует ли последовательность, для которой всякий отрезок $[a, b]$ / с $a < b$ / является кормушкой ?/кормушкой/

∘ 3.11 Известно, что отрезок $[0, 1]$ является [redacted] последовательности. Может ли отрезок $[2, 3]$ быть а/ловушкой ; б/кормушкой ?

∘ 3.12 Верно ли, что если M_1 и M_2 –ловушки для последовательности, то $M_1 \cap M_2$ –тоже ловушка ?

∘ 3.13 Верно ли, что если M_1 и M_2 –кормушки для последовательности, то $M_1 \cap M_2$ –тоже кормушка ?

∘ 3.14 Верно ли, что если M_1 –ловушка, а M_2 –не ловушка, то $M_1 \setminus M_2$ –ловушка ?

∘ 3.15 Верно ли, что если M_1 –кормушка, а M_2 –не кормушка, то $M_1 \setminus M_2$ –кормушка ?

∘ 3.16 Рассмотрим последовательность 1,1/2,1/3,1/4,... Докажите, что каково бы ни было положительное действительное число ε, отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ является ловушкой для этой последовательности.

∘ 3.17 Верно ли, что если $[\alpha, \beta]$ –ловушка для последовательности, то эта последовательность ограничена снизу числом α, а сверху –[redacted] числом β ? /это значит, что при всех n $\alpha \le x_n \le \beta$ /

3.18. Верно ли, что если $[\alpha, \beta]$ –ловушка для последовательности, то эта последовательность ограничена ? /Это значит, что существуют такие действительные A и B, что при всех n $A \le x_n \le B$ /.

∘ 3.19. Верно ли, что если M_1 и M_2 –не ловушки, то $M_1 \cup M_2$ –не ловушка ?

∘ 3.20. Верно ли, что если M_1 и M_2 –не кормушки, то $M_1 \cup M_2$ –не кормушка ?

ТЕМА 4 "Умеете ли Вы складывать ? "

Определение. Пусть A и B -множества действительных чисел. определим множество C , которое будем называть с у м м о й множеств A и B . А именно, включим в него все числа, которые могут быть получены при сложении какого-то элемента A с каким-то элементом B.

$$C = A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Например, если A= $\{0, 1\}$, B= $\{5, 17\}$, то A+B = $\{5, 6, 17, 18\}$

4.1 Найдите A+B , если $A = \{0\}$, $B = [0, 1]$
4.2 ...если $A = \{1\}$, $B = [0, 1]$
4.3 ...если $A = \{0, 1\}$, $B = [0, 1]$
4.4 ...если $A = \{0, 2\}$, $B = [0, 1]$
4.5 ...если $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$
4.6 ...если $A =]0, 1[$, $B =]0, 1[$
4.7 ...если $A =]0, 1[$, $B = [0, 1]$
4.8 ...если $A =]0, 1]$, $B = [0, 1]$
4.9 ...если $A =]0, 1]$, $B =]0, 1]$
4.10 ...если $A =]0, 1]$, $B = [0, 1[$
4.11 ...если $A =]-1, 0]$, $B = [5, 7]$
4.12 ...если $A = [0, +\infty[$ (усл. обозн. для $\{x \mid x > 0\}$; $B = [0, 1]$
4.13 ...если $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$ (усл. обоз. для $\{x \mid x < 0\}$)

4.14 Верен ли закон A+B = B+A для сложения множеств ?
4.15 Верен ли закон A+ (B+C) = (A+B) + C
4.16 В этой задаче под 2A понимаем множество, которое получится, если все элементы A умножить на 2. Верно ли , что A+A = 2A?
4.17 Можно ли придумать операцию вычитания множеств так, чтобы она была обратна сложению, то есть выполнялось бы тождество

$$(A - B) + B = A$$

ТЕМА 5 "О порядке в множестве действительных чисел"

5.1 Верна ли теорема: у всякого непустого множества M действительных чисел есть наибольший элемент, то есть такой элемент x , что в нашем множестве нет большего элемента: не существует элемента x_1 в нашем множестве, такого, что $x_1 > x$?

5.2 Верна ли эта теорема, если дополнительно предположить, что все числа из M не превосходят числа 100.

5.3 Даны числа a и b . Известно, что если некоторое действительное число x меньше a , то оно меньше b :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (x < a) \Rightarrow (x < b)$$

Следует ли отсюда, что $a \le b$? А что $a < b$?

5.4 Даны числа a и b . Известно, что если некоторое действительное число X [redacted] меньше [redacted] a , то оно меньше или равно b : $\forall x \in \mathbb{R} \ (x < a) \Rightarrow (x \le b)$

Следует ли отсюда, что $a < b$? А что $a \le b$?

ТЕМА 6 "Ограниченные множества"

Определение. Множество M ограничено сверху числом C , если все элементы M меньше или равны C.

Множество M ограничено сверху, если существует число C , которым оно ограничено сверху.

Множество M ограничено снизу числом C, если...

6.1 Придумайте определение сами.

Множество M ограничено снизу, если ...

6.2 Придумайте определение сами.

Множество M ограничено , если существует такое C , что для всякого $x \in M$ $|x| \le C$

∘6.3 Сформулируйте, что означает, что множество M не ограничено сверху.

∘6.4 Докажите, что свойства: а/ быть ограниченным сверху и снизу; б/ быть ограниченным — равносильны.

∘6.5 Пусть M -ограниченное сверху множество, x -действительное число. Рассмотрим множество M_1, которое получится, если ко всех элементам M прибавить x. /Например, если $M=[0,1]$, а $x = 1/10$, то $M_1 = [1/10, 1\,1/10]$ /
Обязательно ли M_1 а/ ограничено сверху
б/ ограничено снизу ?

∘6.6 Пусть M -ограниченное сверху множество. Рассмотрим множество M_1, которое получится, если у всех элементов M изменить знак. /умножить все элементы M на -1/. Например, если $M = \{0, 1, 2\}$, то $M_1 = \{-2, -1, 0\}$. Обязательно ли M_1:
а/ ограничено сверху б/ ограничено снизу ?

∘6.7 /Посмотрите определение суммы множеств в теме 4/
Верно ли, что если A и B ограничены сврху, то A+B ограничено сверху?

•6.8 Верно ли, что если A ограничено сверху, а B ограничено снизу, то A+B ограничено сверху ?

∘6.9 Верно ли, что если A+B ограничено сверху, то A ограничено сверху ? /Можно при решении этой задачи ограничиться случаем непустых множеств A и B /

∘6.10 Верно ли, что если A и B ограничены, то A+B ограничено ?

•6.11 Верно ли, что если A+B ограничено, то A и B ограничены ? /Снова ограничьтесь случаем непустых множеств A и B/

ТЕМА 7 " Свободные вариации на темы 1-6"

7.1 Гармоническим рядом называется последовательность

$$1,\ 1+(1/2),\ 1+(1/2)+(1/3),\ 1+(1/2)+(1/3)+(1/4),\ \ldots$$

Докажите, что 500 -ый член гармонического ряда больше 5

7.2 Докажите, что эта последовательность /гармонический ряд/ не ограничена.

7.3 Рассмотрим последовательность

$$\frac{1}{1^2},\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2},\ \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2},\ \ldots$$

Докажите, что эта последовательность ограничена.

7.4 Выкинем из всех членов гармонического ряда все слагаемые, в записи которых участвует цифра 9. Докажите, что после этого получится ограниченная последовательность.

7.5 Докажите, что если последовательность ограничена, то у нее есть кормушка длины не больше 0.001/ т.е. существует отрезок длины не больше 0.001, являющийся для нее кормушкой.

7.6 Докажите, что если последовательность не имеет наибольшего элемента, то можно вычеркнуть некоторые члены так, чтобы осталаеь бесконечнаая последовательность, у которой каждый элемент больше предыдущего.

7.7 Докажите, что если множество M -кормушка для последовательности, то можно вычеркнуть некоторые элементы так, чтобы для оставшейся последовательности множество M было ловушкой.

Знаком ∘ помечены задачи, которые не требуют для решения ничего, кроме четкого понимания определений

Тема 8. Разные задачи о последовательностях.

Рассмотрим последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

8.1. Докажите, что эта последовательность убывает /то есть что при всех n $a_n \geqslant a_{n+1}$/

8.2. Очевидно, что эта последовательность ограничена снизу /например, 0 является ее нижней границей/. Имеет ли она положительную нижнюю границу ?

8.3. Является ли последовательность, заданная формулой $a_n = n/(\sqrt{n}+1)$, возрастающей ?

8.4. Монотонна ли последовательность $a_n = 10^n/n!$ /последовательность называется монотонной, если она возрастает или если она убывает/ и есть ли у нее наибольший и наименьший члены ?

8.5. Последовательность a называется подпоследовательностью последовательности b , если a можно получить из b , вычеркнув в некоторые члены. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая последовательность целых чисел является ее подпоследовательностью ? То же, но вместо целых – все действительные.

8.6. Верно ли , что если некоторая подпоследовательность данной последовательности ограничена, то и вся данная последовательность ограничена ?

8.7. Верно ли утверждение предыдущей задачи , если дополнительно предположить, что данная последовательность монотонна?

8.8. Существует ли последовательность, у которой нет ограниченной подпоследовательности ?

8.9. Верно ли , что у всякой последовательности есть монотонная подпоследовательность ?

8.10. Пусть a -некоторая последовательность. Рассмотрим последовательность b , определенную формулой: $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ Эта последовательность называется "последовательностью сумм последовательности a ".

8.10. Верно ли , что если последовательность ограничена, то последовательность сумм ограничена ?

8.11. Верно ли , что если последовательность сумм ограничена, то и исходная последовательность ограничена ?

8.12. Верно ли , что если последовательность сумм ограничена сверху, то и исходная последовательность ограничена сверху ?

8.13. Для каких из следующих последовательностей последовательности их сумм ограничены : $a_n = 1/(n\cdot(n+1))$

8.14 $a_n = 1/n^2$

8.15. При каких q последовательность $a_n = q^n$ ограничена ?

8.16. При каких q последовательность сумм последовательности, рассмотренной в 8.15, ограничена ?

Тема 9. Разное.

9.1. Докажите, что бесконечная десятичная дробь 0,1234567891011121314151617181920... -непериодическая.

9.2. Верно ли , что если в арифметической прогрессии есть два рациональных числа, то все числа в ней рациональны ?

9.3. Известно , что в арифметической прогресси есть 2 иррациональных числа. Сколько может быть в ней рациональных чисел ?

9.4. Известно, что в бесконечной геометрической прогрессии есть 2 рациональных числа. Сколько всего в ней может быть рациональных чисел?

9.5. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(y)| \leqslant (x-y)^2$ Докажите, что f -константа, то есть всюду равна одному и тому же числу.

9.6. Функция f называется четной , если $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x)$ и нечетной, если $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$. Какие из следующих функций четны, а какие нечетны:
$x \mapsto 1$ 9.7 $x \mapsto x$ 9.8 $x \mapsto x^2$ 9.9 $x \mapsto x^3$
9.10 $x \mapsto |x|$ 9.11 $x \mapsto x^2+x$ 9.12 $x \mapsto x^3+x$ 9.13 $x \mapsto x^3-2x$
9.14 $x \mapsto (|x|)^3$...

9.15. Верно ли , что если f четная , а g любая , то $g \circ f$ -четная? А $f \circ g$?

9.16. Пусть f, g -нечетные. Что можно сказать о $f \circ g$ и $f+g$?

9.17. Докажите, что всякая функция есть сумма четной и нечетной.

Математическии анализ : тема 10.

Последовательности, становящиеся как угодно большими по модулю.

Определение. Последовательность $a = a_1, a_2, \dots$ становится как угодно большой по модулю, если, каково бы ни было число $A \geqslant 0$, почти при всех n $|a_n| \geqslant A$.

o 10.1. Какие из предлагаемых последовательностей становятся к.у.б.п.м.?
а) $1, 2, 3, 4 \dots$ б) $1, 0, 2, 0, 3, 0 \dots$ в) $1, -1, 2, -2, \dots$
г) $1, 0, -1, 0, 2, 0, -2, 0, \dots$

o 10.2. Докажите, что условия 2-4 равносильны условию 1/если это так/
1. Последовательность $a = a_1, \dots$ с.к.у.б.п.м.
2. Во всяком отрезке содержится конечное число членов последовательности.
3. Каково бы ни было число $A \geqslant 0$, множество $]-\infty, -A] \cup [A, +\infty[$ является ловушкой последовательности.
4. Каково бы ни было $A \geqslant 0$, существует такое N, что все члены последовательности, начиная с N-го, по модулю больше A : $|a_N|, |a_{N+1}|, \dots \geqslant A$

Символическая запись условия 4: $\forall A \geqslant 0 \, \exists N \, \forall k \geqslant N \, (|a_k| \geqslant A)$

Таким образом, если Вы утверждаете, что последовательность a с.к.у.б.п.м., то это означает, что Вы гарантируете, что какое бы я не пред"явил A, Вы сможете указать N такое, что все члены, начиная с N-го, по модулю больше A.

o 10.3. Пусть последовательность a монотонно возрастает ($a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots$). Докажите, что она с.к.у.б.п.м. тогда и только тогда, когда она не ограничена сверху.

o 10.4. Верно ли, что если a становится к.у.б.п.м., а при всех n $b_n \geqslant a_n$, то b становится к.у.б.п.м.? А если вместо $b_n \geqslant a_n$ читать $|b_n| \geqslant |a_n|$?

o 10.5. Докажите, что последовательность $a_n = \sqrt{n}$ с.к.у.б.п.м.

o 10.6. Докажите, что последовательность $a_n = 2^n$ с.к.у.б.п.м.
Указание: Докажите по индукции, что $2^n \geqslant n$, далее 10.4.

o 10.7. Докажите, что каково бы ни было $\alpha > 0$, последовательность $a_n = n \cdot \alpha$ с.к.у.б.п.м.
Решение следует начинать словами: " Пусть $A \geqslant 0$ -произвольное. Покажем, что существует такое N, что все числа $|a_N|, |a_{N+1}|, \dots \geqslant A$ В самом деле, в качестве N надо брать ...."

o 10.8. Верно ли, что если a и b с.к.у.б.п.м., то $a+b$ с.к.у.б.п.м.? (a, b - последовательности, а не числа!)

o 10.9. Верно ли, что если a с.к.у.б.п.м., а b ограничена, то $a+b$ с.к.у.б.п.м.?

10.10. Докажите, что если $q > 1$, то последовательность a: $a_n = q^n$ с.к.у.б.п.м.
Указание. Докажите по индукции или как хотите, что если $\alpha \geqslant 0$, то $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$. Примените 10.7 и 10.4.

10.11. Докажите, что последовательность $n!/100^n$ с.к.у.б.п.м.

10.12. Докажите, что последовательность $n^2/n+3$ с.к.у.б.п.м.
Указание: $n^2/n+3 = n/(1+3/n)$

10.13. Докажите, что последовательность $(n^3+2n-7)/(n^2+3n-5)$ с.к.у.б.п.м.

10.14. Докажите, что последовательность $2^n/n$ с.к.у.б.п.м.
Указание. При почти всех n $2^n \geqslant n^2$ /почему ?/

10.15. Докажите, что последовательность $2^n/n^2$ с.к.у.б.п.м.

* 10.16. Докажите, что каково бы ни было $q > 1$, последовательность q^n/n с.к.у.б.п.м.
Указание. $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n + \alpha^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

* 10.17. Докажите, что каково бы ни было $q > 1$, последовательность q^n/n^2 с.к.у.б.п.м. Указание: $q^n/n^2 = [\sqrt{q}^n/n]^2$

Математический анализ : тема 11.

Последовательности, стремящиеся к 0.

Определение. Последовательность $a = a_1, a_2, \ldots$ стремится к 0 , если для всякого $\varepsilon > 0$ почти все члены последовательности лежат в интервале $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

11.1. Какие из предлагаемых последовательностей стремятся к 0 ?

а) $1, 1/2, 1/3, 1/4 \ldots$ б) $1, -1, 1/2, -1/2 \ldots$ в) $1, 0, 1, 0, \ldots$

г) $0, 0, 0, \ldots$ д) $0, 1, 0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, \ldots$

11.2. Докажите, что условия 2-6 равносильны условию 1 /если это так/

1. Последовательность $a = a_1, a_2, \ldots$ стремится к 0.
2. Всякий отрезок , не содержащий 0 , не является кормушкой для последовательности.
3. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, интервал $]-\varepsilon, \varepsilon[$ является ловушкой.
4. Всякий интервал, содержащий 0 , является ловушкой.
5. Всякий отрезок , содержащий 0, является ловушкой.
6. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k \geq N \ |a_k| \leq \varepsilon$

11.3. ~~Пусть~~ дана убывающая последовательность неотрицательных чисел $a = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \geq 0$

Докажите, что условия: " a стремится к 0" и " a не имеет положительной нижней границы" равносильны.

11.4. Докажите, что $a = a_1, a_2, \ldots$ стремится к 0 тогда и только тогда , когда $|a| = |a_1|, |a_2|, \ldots$ стремится к 0.

11.5. Докажите, что если a стремится к 0 , а $|b_n| \leq |a_n|$ при всех n , то b стремится к 0. Верно ли будет утверждение этой задачи, если слова "для всех n " заменить на "для почти всех n " ?

11.6. Докажите, что если последовательность $a = a_1, a_2 \ldots$, становится к.у.б.п.м. , то последовательность $1/a = 1/a_1, 1/a_2, \ldots$ стремится к 0.

11.7 Пользуясь 11.6 , установите, что если $0 < q < 1$, то последовательность $n \longmapsto q^n$ стремится к 0. Верно ли это при всех q из интервала $]-1, 1[$?

11.8. Докажите, что последовательности

$$1/n, \ 1/2^n, \ n+5/n^2-2, \ n^2+10n-3/n^3-4, \ \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \frac{n}{2^n}, \ \frac{n^2}{2^n}, \ \frac{n!}{n^n}, \ \frac{100^n}{n!}$$

стремятся к 0.

11.9. Докажите, что если последовательности a и b стремятся к 0, то последовательности $a+b$ и $a-b$ стремятся к 0. Указание. Если $|x| < \varepsilon$ и $|y| < \varepsilon$, то $|x+y| < 2\varepsilon$ и $|x-y| < 2\varepsilon$ /почему?/

11.10. Докажите, что если a стремится к 0 , а b ограничена, то $ab : n \longmapsto a_n \cdot b_n$ стремится к 0.

11.11./Теорема " о двух милиционерах"/. Если a и c стремятся к 0 , а b такова, что при всех n верно $a_n \leq b_n \leq c_n$, то b стремится к 0.

11.12. Верна ли предыдущая теорема , если вместо "при всех n " читать "при почти всех n " ?

11.13. Докажите, что последовательность $n \longmapsto \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ стремится к 0.

Указание. $1/(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Тема 12. Пределы последовательностей.

Вместо "последовательность a стремится к 0 " часто говорят " 0 есть предел последовательности a ." Сейчас [redacted] мы определим , что значит фраза "число x есть предел последовательности a " / при этом при $x = 0$ получим определение, совпадающее со старым определением " a стремится к 0"/

Продолжение темы I2 : пределы последовательностей.

Определение. Число x есть предел последовательности a $(a \to x)$ если для всякого $\varepsilon > 0$ верно утверждение: "почти все члены последовательности a лежат в интервале $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$"

I2.I Докажите, что это определение равносильно любому из следующих:
1. последовательность $b: b_n = x - a_n$ стремится к 0.
2. последовательность $b: b_n = |x - a_n|$ стремится к 0.
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k \geq N\ |a_n - x| \leq \varepsilon$
4. любой интервал, содержащий x, является ловушкой для a.

I2.2. Верно ли, что если $a \to x$, а M – отрезок, не содержащий x, то M – не кормушка для a.

I2.3. Верно ли это, если слово "отрезок" заменить на слово "интервал"?

I2.4. Может ли последовательность иметь 2 различных предела: существует ли такая последовательность a и такие числа x, y, что $a \to x$, $a \to y$, $x \neq y$?

I2.5. Может ли –I быть пределом последовательности с неотрицательными членами ?

I2.6. Может ли 0 быть пределом последовательности с положительными членами ?

I2.7. Пусть a и b – две последовательности, $a \to x$, $b \to y$. Докажите, что если $c: c_n = |a_n - b_n| \to 0$, то $x = y$. Верно ли обратное : если $x = y$, то $c \to 0$?

I2.8. Пусть $a \to x$, $y > x$. Докажите, что почти все члены последовательности меньше y. Верно ли это, если $y > x$ заменить на $y \geq x$?

I2.9. Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена.

I2.I0. Верно ли обратное : всякая ли ограниченная последовательность имеет предел ?

Тема I3. Арифметические операции и пределы.

Теперь покажем, как иногда можно вычислять пределы сумм, разностей и т.д. и т.п. Если Вам задачи I3.I–I3.I3 покажутся слишком трудными, то прочтите ф о р м у л и р о в к и задач I3.2, I3.5, I3.8, I3.I3 и переходите к I3.I4 и дальнейшим.

I3.0. Вес /строго говоря – массу/ двух предметов измеряли на весах, имеющих погрешность до I кг./Это означает, что весы дают показание, отличающееся от истинного веса не более чем на I кг./ Затем результаты сложили. Насколько полученный результат может отличаться от истинного суммарного веса ? Может ли ошибка быть больше 3 кг? А больше I.5 кг?

I3.I. Докажите, что если $|x - \alpha| < \varepsilon_1$ и $|y - \beta| < \varepsilon_2$, то $|(x+y) - (\alpha+\beta)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $|(x-y) - (\alpha-\beta)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

I3.2. Докажите, что если a, b –последовательности, x, y –числа, $a \to x$, $b \to y$, c –последовательность: $c = a + b$ то $c \to x + y$ /Сравните с задачей II.9/

I3.3 Докажите, что если в предыдущей задаче $c = a - b$ то $c \to x - y$ /Сравните с задачей II.9/

I3.4. Дайте другое решение задач I3.2 и I3.3, использующее II.9 и определение предела, данное в I2.I, п.I

I3.5. Докажите, что если $a \to x$, а c –число, то последовательность ca /ее n-ый член есть ca_n/ имеет пределом число cx. Верно ли это также и при $c = 0$?

I3.6. Длины сторон классной комнаты, имеющей форму прямоугольника, измерили с точностью I см. После этого приближенно вычислили площадь, перемножив полученные результаты. Могли ли при этом ошибиться больше чем на I кв.см.? А на I кв.м. /=I0000 кв.см./

<u>Продолжение темы 13: Арифметические операции и пределы.</u>

13.7. Докажите неравенство:
$|x'y' - xy| \le |x' - x||y'| + |x||y' - y|$

13.8. Докажите, что если $a \to x$, $b \to y$, то $ab \to xy$ / ab -последовательность, n -ый член которой равен $a_n b_n$/

13.9. Дайте другое доказательство 13.8, основанное на применении определения предела из 12.1, пункт 1, 11.10 и 12.9.

13.10. Докажите, что если $a \to x$ и $x \ne 0$, то почти все члены последовательности a не равны 0.

13.11. Докажите, что если $a \to x$, $x \ne 0$ и <u>все</u> члены последовательности a не равны 0, то последовательность $1/a$ ($(1/a)_n = 1/a_n$) -ограничена.

13.12. Докажите, что если $a \to x$, $x \ne 0$ и <u>все</u> члены последовательности a не равны 0, то последовательность $1/a$ имеет пределом $1/x$.

Замечание к 13.11 и 13.12. Условие "все члены последовательности a не равны 0" не очень существенно, так как из задачи 13.10 следует, что почти все члены последовательности a не равны 0. Как правильно сформулировать 13.11 и 13.12 без этого предположения ? А можно ли в них выбросить условие $x \ne 0$?

УКАЗАНИЕ к 13.12.

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \le \frac{|x-y|}{|x|\cdot|y|}$$

13.13. Докажите, что если $a \to x$, $b \to y$, $y \ne 0$ и все члены $b \ne 0$, то $a/b \to x/y$

Указание. Сочетайте 13.12 и 13.8.

13.14. Придумайте последовательности a и b так, чтобы все члены b были не равны 0, $a \to 0$, $b \to 0$ и
а/ $a/b \to 0$ б/ $a/b \to 1$ в/ a/b с.к.у.б.п.м.

13.15. Вычислить пределы: $n \mapsto (2 + 1/n)/(3 - 5/n)$

13.16. $n \mapsto (2n+1)/(3n+5)$ /Чем это отличается от 13.15 ?/

Верно ли такое рассуждение: $2n+1 \to \infty$, $3n+5 \to \infty$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$, поэтому $\frac{2n+1}{3n+5} \to 1$ (13.13)

13.17. $n \mapsto n(n+2)/(n+1)(n+3)$

13.18. $n \mapsto 10n / n^2 + 1$

13.19. $n \mapsto (2^n - 1)/(2^n + 1)$

13.20. Известно, что $a \to 1$ и что все $a_n \ne 1$.
Найти пределы: $n \mapsto (2a_n - 1)/(a_n + 1)$

13.21. $n \mapsto (a_n^2 + a_n - 2)/(a_n - 1)$

13.22. $n \mapsto (a_n^{10} - 1)/(a_n - 1)$

13.23. Найти предел a, если $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$

13.24. $a_n = (3^n + 4^n + 5^n)/(2^n + 6^n)$

Тема I4. Разные задачи о пределах.

I4.I. Пусть a имеет предел. /В этом случае a называется сходящейся/. Докажите, что $b: b_n = a_{n+1} - a_n$ имеет пределом 0.

I4.2. Верно ли обратное: если $b: b_n = a_{n+1} - a_n \to 0$, то a имеет предел?

I4.3. Докажите, что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности / определение см. I4.I/ сходится.

I4.4. Верно ли, что всякая подпоследовательность несходящейся последовательности не сходится ?

I4.5. Докажите, что если члены последовательности a неотрицательны и $a \to x$, то $\sqrt{a} \to \sqrt{x}$ $(\sqrt{a} : n \mapsto \sqrt{a_n})$

I4.6. Докажите, что если последовательность сходится к x, то, переставив ее члены, мы снова получим последовательность, сходящуюся к x.

I4.7. Сходится ли последовательность $\sqrt[n]{n}$? Если да, то чему равен ее предел?

Инструкции по решению задач. ______
ф. и.

выбросить 1. Ваше индивидуальное задание по листкам 1977-8 уч. года:
1-ой очереди
2-ой очереди.

выбросить 2. Порядок выполнения: темы 1-6 мат. анализа, индив. задание по листкам 1977-8 уч. года 1-ой очереди, листки тем 10-14, "Алгоритм Евклида и теория целых чисел", индив. задание 2-ой очереди, дополнительные задачи.

3. Оценка работы. Вам следует решить ______ задач. За летнее задание выставляется оценка, приравниваемая (нами) к четвертной по важности.

Сдано $\geq 80\%$ правильно $\geq 50\%$ (всех) $\Rightarrow 5$
Сдано $\geq 50\%$ правильно $\geq 25\%$ (всех) $\Rightarrow \geq 4$
Сдано $\geq 30\%$ правильно $\geq 20\%$ (всех) $\Rightarrow \geq 3$.

выбросить 4. Дополнения.

Тема 15. Точные верхние грани.

Определение. Число a называется <u>точной верхней гранью</u> множества А, если выполнены следующие 2 условия:

1. А ограничено сверху числом a.
2. Если a_1 -любое меньшее a число, то А <u>не</u> ограничено сверху числом a_1.

Заметим, что точная верхняя грань /твг/ может быть только у ограниченных множеств.

Задачи.

1. Докажите, что число 1 является твг множества всех иррациональных чисел, лежащих в отрезке $[0,1]$.
2. Пусть a -твг А, b -твг В. Чему равна твг $A \cup B$? Дайте обоснованный ответ.
3. Докажите, что если a -твг А, а b -твг В, то $\min(a,b)$ /меньшее из чисел a и b/ есть твг $A \cap B$.
4. Пусть a -твг А, b -твг В, С = А + В $C=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$ Докажите, что $a+b$ есть твг С.
5. Сформулируйте разумное определение точной нижней грани.
6. Могут ли 2 различных числа a_1 и a_2 быть твг одного множества А ?
7. Известны, что все числа множества А меньше или равны 0. Докажите, что его твг меньше или равна 0. Можно ли "меньше или равно" заменить /в обоих местах/ на "меньше" ?

Тема 16. Аксиома полноты и ее следствия.

Определение. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$; говорят, что А <u>левее</u> В, если $\forall a\in A\ \forall b\in B\ (a\le b)$ /любой элемент А не больше любого элемента В/

1. Докажите, что если существует число c, являющееся верхней границей А /<u>не</u> обязательно твг А/ и нижней границей В одновременно, то А левее В.

Определение. Число c <u>разделяет</u> А и В, если $\forall a\in A\ (a\le c)$ и $\forall b\in B\ (c\le b)$./Иначе говоря, если c является верхней границей А и нижней границей В./

<u>Мы примем без доказательства следующее утверждение.</u>
<u>АКСИОМА ПОЛНОТЫ</u>. Если А лежит левее В, то существует число c, разделяющее А и В

2. Покажите, что в некоторых случаях этот факт все-таки можно доказать. А именно, докажите /не используя аксиомы полноты, конечно/, что если А левее В и a -максимальный элемент в А, то разделяет А и В.
3. Используя аксиому полноты, докажите следующую теорему.

<u>ТЕОРЕМА О ТВГ.</u> Всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань.

4. Докажите, что если А лежит левее В и c есть твг А, то c разделяет А и В. Отсюда следует, что теорема о твг равносильна аксиоме полноты и может быть использована вместо нее как "аксиома".
5. Используя аксиому полноты, докажите, что всякая возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел. /Указание. Этот предел равен точной в.г. множества ее значений./
6. Используя аксиому полноты, докажите, что всякое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.
7. Пусть $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ... -последовательность вложенных отрезков, то есть каждый последующий отрезок содержится в предыдущем. $([a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots)$ Иначе говоря, последовательность $a_1, a_2, \ldots$ -возрастающая, а $b_1, b_2, \ldots$ - убывающая. Докажите, что эти отрезки имеют общую точку x. / $x\in[a_i,b_i]$ для любого i /
8. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ называется <u>фундаментальной</u>, если для любого $\varepsilon>0$ существует отрезок длины $\le\varepsilon$, являющийся для нее ловушкой. Докажите, что всякая фундаментальная последовательность имеет предел. /Обратное: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна - очевидно/
9. Можно ли в 7 заменить "отрезки" на "интервалы"?

Тема 17. Аксиома полноты /продолжение/

Эта тема состоит из 2 частей. Вначале сформулированы основные задачи. Далее для тех, кому эти задачи покажутся трудными, даны указания и вспомогательные задачи.

1.Докажите, что множество действительных чисел не счетно. /Эта задача не случайно включена в эту тему, так как она использует аксиому полноты./

2. /Компактность по Больцано - Веиерштрассу/. У всякой ограниченной последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

3. /Компактность по Гейне - Борелю./ Из всякого покрытия отрезка $[a, b]$ интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.
Разъяснение. Покрытием отрезка $[a, b]$ называется такое множество интервалов, что всякая точка отрезка содержится хотя бы в одном из них; надо доказать, что у любого множества интервалов, удовлетворяющего свойству "быть покрытием", имеется конечное подмножество, также удовлетворяющее этому свойству.

4. Докажите, что существует $\sqrt{2}$. А именно, покажите, что если z разделяет множества $\{x>0 \mid x^2\leq 2\}$ и $\{x>0 \mid x^2\geq 2\}$, то $z^2=2$.
Предупреждение. При решении этой задачи ,конечно, нельзя использовать то, что у всякого действительного числа есть квадратный корень, так как задача предназначена именно для обоснования этого факта.

Методические указания и вспомогательные задачи.

К 1. На выбор предлагаю 2 указания. А. Докажите, что существует вложение множества последовательностей 0 и 1 в множество действительных чисел. Для этого каждой последовательности 0 и 1 сопоставьте последовательность вложенных отрезков удачным образом и возьмите их общую точку. Б. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ -все действительные числа /рассуждаем от противного/. Покажите, что существует последовательность вложенных отрезков такая, что $x_n \notin n$ -му отрезку, и что общая точка этих отрезков не равна ни одному x_n.

К 2. Вспомогательная задача. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ -последовательность. Точка x называется предельной точкой последовательности a если при всех $\varepsilon>0$ интервал $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ -кормушка. Докажите, что x есть предельная точка последовательности a тогда и только тогда,когда некоторая подпоследовательность последовательности a сходится к x. Указание. Докажите, что всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.А именно, покажите, что существует последовательность отрезков $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots$ такая, что: а/ каждый следующий является одной из половин предыдущего; б/каждый из них является кормушкой. Докажите затем, что эти отрезки имеют единственную общую точку, являющуюся предельной точкой последовательности.

К 3. А. Назовем отрезок $[x,y]\subset[a,b]$ -хорошим, если существует конечное подмножество данного нам покрытия, являющееся покрытием $[x,y]$. Надо доказать, что $[a,b]$ -хороший. Б. Докажите, что если отрезок плох, то одна из его половин плоха. В. Предположив, что $[a,b]$ плох, постройте последовательность вложенных плохих отрезков, длины которых стремятся к 0./имеют пределом 0/ Г. В этом же предположении докажите, что их общая точка не входит ни в одно из множеств исходного покрытия, что противоречит определению покрытия. Таким образом, $[a,b]$ не может быть плохим, что и требовалось доказать.

К 4. Докажите, что если $x_0^2>2$, то и в некоторой окрестности x_0 также $x^2>2$. Это означает, что существует ε такое, что для всех $x\in\,]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ выполнено $x^2>2$.

Замените в этой задаче неравенства $x_0^2>2$ и $x^2>2$ на $x_0^2<2$ и $x^2<2$. Решите измененный вариант.

Непрерывные функции: сводка результатов.

В этом листке формулируются определения и основные теоремы, касающиеся непрерывных функций. Эти теоремы в основном довольно трудны и будут доказаны в ходе решения задач наших листков.

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, $x \in M$. Говорят, что f <u>непрерывна в точке x</u>, если для любой последовательности $x_1, x_2, x_3 \dots$, такой, что $x_1, x_2, \dots \in M$ и $x_1, x_2, \dots \to x$ верно $f(x_1), f(x_2), \dots \to f(x)$.

ТЕОРЕМЫ.

<u>А. Определение непрерывности по Коши.</u> f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap M$ верно $f(x) \in \,]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

<u>Б. Непрерывность элементарных функций.</u> Функции $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \to a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sqrt{x}$ непрерывны во всех точках $x \in \mathbb{R}$. /Последняя – во всех точках, где она определена, то есть во всех точках $x \geqslant 0$./

<u>В. Операции над непрерывными функциями.</u> Если $f, g: M \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x \in M$, то функции $f+g$, $f \cdot g$ непрерывны в x. Если при этом $g(y) \neq 0$ для всех $y \in M$, то и f/g непрерывна в точке x.

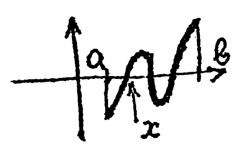
<u>Г. Локальность понятия непрерывности.</u> Если $f, g: M \to \mathbb{R}$, $x \in M$, f непрерывна в x и f и g "совпадают в окрестности x" /то есть существует интервал I, содержащий x, такой, что во всех точках $I \cap M$ функции f и g равны/, то g непрерывна в точке x.

<u>Д. Композиция непрерывных функций.</u> Пусть $f_1: M_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: M_2 \to \mathbb{R}$, причем образ M_1 при f_1 лежит в M_2. Тогда определена функция $f_2 \circ f_1$. Если $x \in M_1$, $y = f_1(x_1)$, f_1 непрерывна в x, f_2 непрерывна в y то $f_2 \circ f_1$ непрерывна в x.

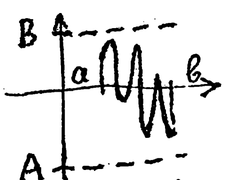
<u>Е. Сохранение знака.</u> Если $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывна в $x \in M$ и $f(x) \neq 0$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что во всех точках y из множества $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap M$ выполнено: $f(y)$ не равно 0 и имеет тот же знак, что $f(x)$.

<u>Ж. Локальная ограниченность.</u> Если $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x \in M$ то "f ограничена в некоторой окрестности точки x". Это означает, что существуют такие $\varepsilon > 0$ и $A \geqslant 0$, что при всех $y \in \,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\, \cap M$ верно $|f(y)| \leqslant A$.

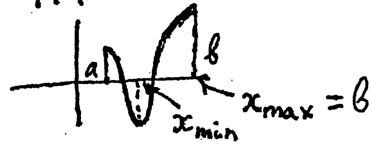
<u>З. Промежуточные значения.</u> Если $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, f непрерывна во всех точках $[a, b]$, $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, то f имеет корень на $[a, b]$: $\exists x \in [a, b]$ $(f(x) = 0)$



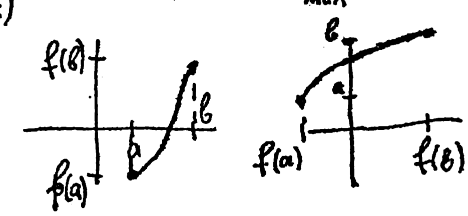
<u>И. Ограниченность.</u> Если $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках $[a, b]$, то f ограничена сверху и снизу: существуют такие A и B, что при всех $x \in [a, b]$ выполнено
$$A \leqslant f(x) \leqslant B$$



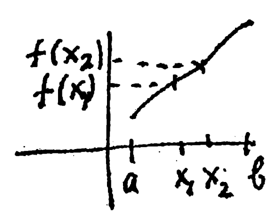
<u>К. Достижение максимума и минимума.</u> Если $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках $[a, b]$, то существуют такие точки x_{min} и x_{max} /принадлежащие $[a, b]$/, что для всех $x \in [a, b]$ верно $f(x_{min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{max})$



<u>Л. Обратная функция.</u> Если $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках $[a, b]$ и монотонно возрастает, то f есть взаимно однозначное отображение отрезка $[a, b]$ на отрезок $[f(a), f(b)]$. Кроме этого, обратная функция, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$, непрерывна во всех его точках.



<u>М. Равномерная непрерывность.</u> Если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках $x \in [a, b]$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x_1, x_2 \in [a, b]$, $|x_2 - x_1| \leqslant \delta$, то $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon$.



Тема 18. Примеры.

1. В каких точках непрерывна и в каких разрывна функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: $f(x) = 0$ при $x > 0$ и 1 при $x \le 0$

2. ... $f(x) = [x]$ / $[x]$ -целая часть x, то есть наибольшее целое число, меньшее или равное x, например: $[1]=1$, $[1,2]=1$, $[-1,2]=-2$

3. $f: M \to \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = 1/x$

4. M -множество рациональных чисел, $f(x) = 1$ при всех $x \in \mathbb{Q}$

5. Докажите, что $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках, если при всех $x \in \mathbb{R}$ верно $f(x) = 1$.

6. ...при всех x $f(x) = x$.

7. ...при всех x $f(x) = |x|$.

8. ...при всех x $f(x) = x^2$.

9. ...при всех x $f(x) = x^2 - 3x - 15$

10. Докажите, что функция $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально} \\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$ разрывна во всех точках $\mathbb{R}$.

11. В каких точках непрерывна функция $f(x) = x \cdot \mathcal{D}(x)$? Дайте обоснованный ответ.

12. Приведите пример функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ разрывной во всех целых точках и непрерывной во всех остальных.

13. Приведите пример функции, разрывной во всех нецелых точках и непрерывной во всех целых.

14. Может ли функция быть разрывной во всех рациональных точках и непрерывной во всех иррациональных ?

15. Может ли функция быть разрывной во всех иррациональных точках и непрерывной во всех рациональных ?

16. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывна во всех точках М. Докажите, что существует $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, продолжающая f, непрерывная во всех точках M.

Тема 19. Определение непрерывности и его переформулировки.

1. Сформулируйте, что значит, что функция $f: M \to \mathbb{R}$ не является непрерывной /разрывна/ в точке $x \in M$. При этом нельзя употреблять фраз :"не существует" и "не для всех"

2. Сделайте то же, но применяя определение непрерывности по Коши.

3. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ является непрерывной по Коши в точке $x = 1$. В частности, какое можно взять δ, если $\varepsilon = 1/1000$?

4. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию : для всех $x, y \in \mathbb{R}$ $|f(y) - f(x)| \le |y - x|$. Докажите, что f непрерывна во всех точках / по любому, удобному Вам, определению/

5. Пусть $x \in M$ -изолированная точка M, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что в интервале $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ нет /кроме x/точек M. Докажите, что любая функция $f: M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x, применяя исходное определение непрерывности.

6. Докажите то же, применяя определение непрерывности по Коши.

7. Докажите, что функция

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ рационально} \\ 1, \text{ если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

является разрывной во всех точках, применяя определение непрерывности по Коши.

8. Докажите, что непрерывная по Коши в точке x функция непрерывна (в точке x)

9. Докажите, что разрывная по Коши в точке x функция разрывна.(в точке x)

10. Докажите теорему А.

Тема 20. Простейшие свойства непрерывных функций.

1. Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в 0, $f(0)=2$. Докажите, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ верно $1,99 < f(x) < 2.01$
2. Докажите теорему о сохранении знака. Предупреждение. В ней функция определена не на всем $\mathbb{R}$, а только на M.
3. Докажите, что если $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f непрерывна в 0 и при $|x| < 1/1000$ верно $f(x) = g(x)$, то и g непрерывна в 0.
4. Докажите теорему о локальности понятия непрерывности. /То же предупреждение, что и в 2/.
5. Приведите пример функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такой, что для всех $x \in \mathbb{R}$ неверно, что f ограничена в окрестности x.
6. Докажите теорему о локальной ограниченности непрерывных функций.

Тема 21. Доказательства непрерывности некоторых функций.

1. Докажите, что функция $x \longmapsto 2x$ непрерывна. Дайте 2 доказательства, используя определения непрерывности по Коши и с последовательностями.
2. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в 0 и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в 0, то $f+g$ также непрерывна в 0.
3. Докажите, что если $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f ограничена в окрестности 0, g непрерывна в 0 и $g(0)=0$, то $f \cdot g$ непрерывна в 0.
4. Может ли сумма двух разрывных в 0 функций быть непрерывной в 0 ?
5. Может ли сумма разрывной в 0 функции и непрерывной в 0 функции быть непрерывной в 0 ?
6. Докажите теорему об операциях над непрерывными функциями.
7. Пусть $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0)=1$, f непрерывна в 0, g непрерывна в 1. Докажите, что $g \circ f$ непрерывна в 0.
8. Пусть $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0)=1$, $g \circ f$ непрерывна в 0. Можно ли из этого заключить, что:
   а/ f непрерывна в 0
   б/ g непрерывна в 1 ?
9. Докажите теорему о композиции непрерывных функций.
10. Докажите, что любой многочлен непрерывен во всех точках.
11. Докажите, что функция $x \mapsto \sqrt{x}$ непрерывна в 1. Указание:
$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = (b-a)/(\sqrt{b}+\sqrt{a})$$
12. Докажите, что функция $x \mapsto \sqrt{x}$ непрерывна во всех точках, где она определена /при всех $x \geqslant 0$ /
13. Докажите, что функция $x \mapsto |x|$ непрерывна во всех точках.

Тема 22. Разные задачи о непрерывности.

1. Пусть $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ и f строго возрастает. /Это значит, что если $x<y$, то $f(x) < f(y)$./
   Рассмотрим свойства :
   а/ f непрерывна на $[0,1]$. /во всех точках $[0,1]$ /
   б/ f принимает все значения из отрезка $[0,1]$
   / для всякого $y \in [0,1]$ существует $x \in [0,1]$ такое, что $f(x)=y$ /
   Докажите, принимая без доказательства теорему о корнях непрерывной функции, что из а/ следует б/. Докажите, что из б/ следует а/.

Тема 22. Продолжение.

2. Пусть $f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ -функции. Говорят, что f_n сходится к f $(f_n \to f)$, если при любом $x\in\mathbb{R}$ последовательность $f_n(x)$ имеет пределом $f(x)$. Существует ли последовательность непрерывных функций $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такая, что $f_n\to f$, где

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x=0\\ 0 & \text{при } x\neq 0\end{cases}$$

3. То же для функции $f(x)=[x]$

4.* То же для функции Дирихле $f(x)=\mathcal{D}(x)$.

5. Пусть $f_1,\ldots,f_n\ldots$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Говорят, что f_n равномерно сходится к f, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

Приведите пример последовательности функций f_n и функции f таких, что f_n сходится, но не равномерно сходится к f.

6. Докажите, что если f_n равномерно сходится к f и все функции f_n непрерывны в точке x, то и f непрерывна в точке x.

7.* Докажите, что если $f_1, f_2, \ldots$; $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ f_n сходится к f, f, f_n непрерывны и при всех x $f_1(x)\le f_2(x)\le\ldots$ то f_n равномерно сходится к f.

Тема 23. Доказательства основных теорем.

1. Пусть f определена на $[a,b]$. Отрезок $[x,y]\subset[a,b]$ называется отрезком изменения знака, если $f(x)\le 0$ и $f(y)\ge 0$ или, напротив, $f(x)\ge 0$ и $f(y)\le 0$. Докажите, что у любой функции $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)\le 0$, $f(1)\ge 0$ существует отрезок изменения знака длины меньше 0,001.

2. Пусть f определена и непрерывна на $[a,b]$. Пусть $[x_1,y_1]\supset[x_2,y_2]\supset\ldots$ -последовательность вложенных отрезков, причем каждый из них есть отрезок изменения знака и $y_n-x_n\to 0$. Тогда общая точка α этих отрезков является корнем функции f : $f(\alpha)=0$

3. Докажите теорему о промежуточных значениях.

4. Докажите существование $\sqrt{a}$ для любого $a>0$.

5. Докажите теорему об ограниченности непрерывных функциях на отрезке по следующему плану:

/1/ Предположим, что $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна, но не ограничена сверху.

/2/ Тогда существует /почему?/ последовательность $x_n\in[a,b]$ такая, что $f(x_n)>n$.

/3/ У этой последовательности есть сходящаяся к некоторому $y\in[a,b]$ подпоследовательность y_n /почему?/

/4/ Тогда $f(y_n)$ с.к.у.б.п.м., $y_n\to y$ что противоречит непрерывности f в y /почему?/

6. Докажите теорему об ограниченности непрерывных функций другим способом.

Лемма. Всякая локально ограниченная функция на отрезке ограничена.

Указание. Воспользуйтесь компактностью по Гейне – Борелю.

7. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена сверху, S -множество значений f /образ $[a,b]$ при f /, $M=\sup S$ /точная верхняя грань S /. Докажите, что существует сходящаяся к некоторому $X\in[a,b]$ последовательность X_n такая, что $f(x_n)\to M$.

8. Докажите теорему о достижении непрерывной функцией максимума и минимума на отрезке

9. Докажите, что строго возрастающая непрерывная функция, определенная на отрезке $[a,b]$, является взаимно-однозначным отображением отрезка $[a,b]$ на отрезок $[f(a),f(b)]$.

10. Докажите, что функция, обратная к рассмотренной в задаче 9, является непрерывной. /См. также тему 22, задачу № 1/

11. Докажите с помощью этой теоремы существование и непрерывность функции $x\mapsto\sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$.

12. Докажите теорему о равномерной непрерывности.

Тема 24. Разные задачи

В данной теме собраны различные задачи. Часть из них является подготовительными задачами к понятию производной, часть -просто интересными, по нашему мнению, задачами. Последние отмечены * и являются дополнительными, хотя многие из них довольно просты.

1. Функция f называется <u>возрастающей</u> на отрезке $[a,b]$, если $\forall x,y \in [a,b] \quad (x \le y) \Rightarrow (f(x) \le f(y))$
Дайте определение убывающей функции.

2. Приведите пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такой, что ни на каком отрезке $[a,b]$ она не является ни возрастающей, ни убывающей.

3.* Может ли быть функция Дирихле равна разности двух возрастающих функций ?

4. Пусть $f: M \to \mathbb{R}$. Точка a называется точкой <u>локального максимума</u>, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех x из $M \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ верно $f(x) \le f(a)$. Дайте определение точки локального минимума.

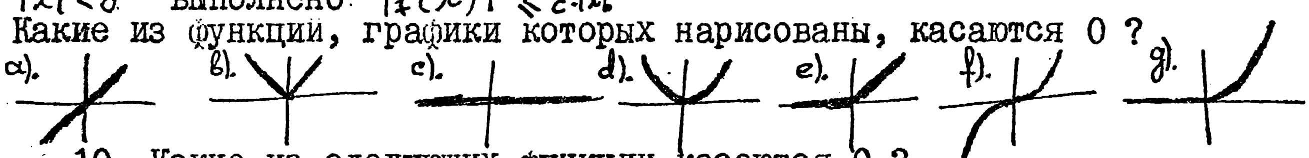
5. Точка a называется точкой <u>строгого</u> локального максимума, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех x из $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap M$, таких, что $x \ne a$, верно $f(x) < f(a)$.
Постройте функцию $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, имеющую бесконечное число точек строгого локального максимума.

6. Приведите пример функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой каждое рациональное число было бы точкой строгого локального максимума.

7.* Существует ли функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой каждое иррациональное число было бы точкой строгого локального максимума ? /Указание. Докажите, что множество точек строгого максимума всегда конечно или счетно/

8.* Для точек простого /не строгого/максимума нельзя утверждать, что их множество конечно или счетно./Приведите соответствующий пример./Однако множество всех <u>значений</u> функции во всех точках локального максимума конечно или счетно. Докажите это.

9. Пусть функция f определена на некотором интервале, содержащем 0. Говорят, что она <u>касается 0X в точке 0</u> /коротко-<u>касается 0</u>/, если верно следующее:
1/ $f(0)=0$
2/ каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что при $|x| < \delta$ выполнено $|f(x)| \le \varepsilon \cdot |x|$
Какие из функций, графики которых нарисованы, касаются 0 ?



10. Какие из следующих функций касаются 0 ?
а) $f(x) = x^2$ б/ $f(x) = 0{,}01 \cdot x$ в) $f(x) = 1 + x^2$
Дать обоснованный ответ /если да - то как выбирать δ по ε, если нет- то для какого ε нельзя подобрать δ !/

11. Доказать, что если f, g касаются 0, то $f+g$ касается 0.

12. Доказать, что если f касается 0, а g ограничена в окрестности 0 /что это значит ?/, то $f \cdot g$ касается 0.

13. Две функции f и g, определенные на интервалах, содержащих 0, называются <u>касающимися</u> друг друга в точке 0,если их разность $f-g$ касается 0. Доказать, что если функция f касается функции $g: g(x) = x$, то 0 не является точкой максимума функции f.

14. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Составим функцию Δf_a:
$\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$
Δf_a можно назвать изменением функции f в a и читать $\Delta f_a(h)$ как "изменение функции f при изменении ее аргумента на h в точке a"
Нарисуйте график и напишите формулу, задающую Δf_a, если

а) $a=1$; $f(x)=x^2$ б) $a=-1$; $f(x)=x^2$

в) $a=1$; $f(x)=|x|$

Тема 25. Производная.

Определение. Говорят, что число A является производной функции f в точке a, если функция Δf_a касается функции $x \mapsto Ax$ в 0 /Говорить о производной можно, если f определена на некотором интервале, содержащем a /

1. Докажите, что f имеет в точке a производную A тогда и только тогда, когда функция $h \mapsto f(x+h) - f(x) - Ah$ касается 0 в точке 0.

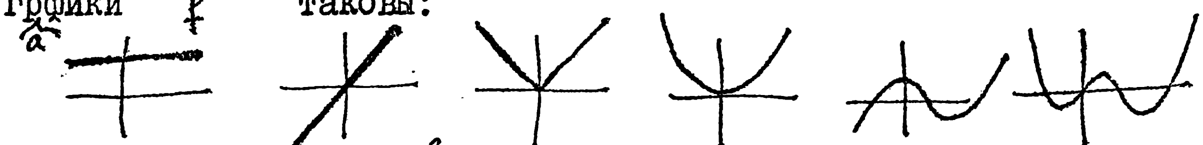
2. Докажите, что функция g касается 0 в точке 0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ верно $f(h_n)/h_n \to 0$

3. Докажите, что f имеет в точке a производную A тогда и только тогда, когда для любой последовательности h_n: $h_n \to 0$, $h_n \neq 0$ верно $\frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n} \to A$

Замечание о механической интерпретации производной.
Пусть некоторое тело движется; через $f(x)$ обозначим путь, пройденный телом за x секунд. Тогда $[f(a+h) - f(a)]/h$ есть средняя скорость движения тела на отрезке времени $[a, a+h]$; как Вам известно из физики, если средняя скорость стремится к некоторому числу A при уменьшении отрезка времени, то это число A называется мгновенной скоростью. Таким образом производная в нашем примере есть мгновенная скорость.

4. Докажите, что 2 разных числа A_1 и A_2 не могут быть производными одной и той же функции f в одной и той же точке a

5. Производная функции f в точке a /если она существует/ обозначается через $f'(a)$; через f' обозначается функция $a \mapsto f'(a)$; f' называется производной функцией функции f. Нарисуйте графики функции f', если графики f таковы:



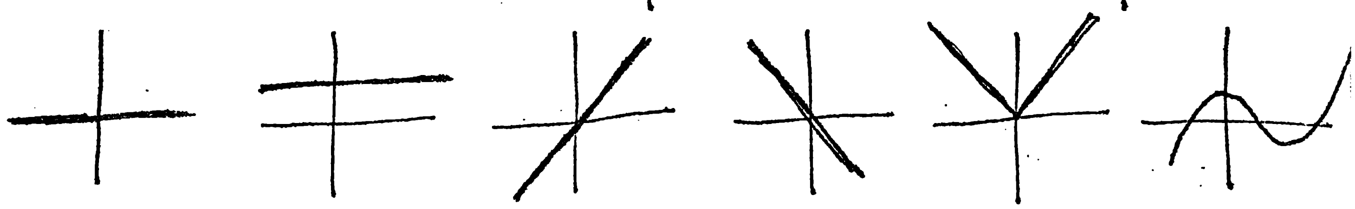
/Перерисуйте график f и на той же картинке нарисуйте график f'/

6. Доказать, что если функция f дифференцируема в точке a /имеет производную в точке a/, то она непрерывна в этой точке.

7. Докажите, что производная функции $x \mapsto x^2$ в точке 1 равна 2.

8. Дифференцируема ли функция $x \mapsto x \cdot \mathcal{D}(x)$ в точке 0 ?

9. Известны графики функции f'. Нарисовать график f.



Замечание. Существует теорема, утверждающая, что всякая непрерывная функция есть производная некоторой всюду дифференцируемой функции. /Мы ее докажем, когда изучим понятие интеграла/. Однако существуют всюду дифференцируемые функции, производные которых не являются непрерывными в некоторых точках.

10. Приведите пример функции, дифференцируемой во всех точках, такой, что ее производная разрывна в 0.

11. Приведите пример функции, не дифференцируемой ни в одной точке.

12. Приведите пример непрерывной функции, не дифференцируемой в точке 0.

13. Приведите пример непрерывной функции, дифференцируемой во всех нецелых точках и недифференцируемой во всех целых.

14. Приведите пример непрерывной функции, дифференцируемой во всех целых точках и недифференцируемой во всех нецелых точках.

Тема 26. Правила дифференцирования функции.

Существуют правила, которые позволяют почти механически продифференцировать любую функцию, заданную формулой, получив формулу для ее производной. /Существуют соответствующие программы для вычислительных машин/. Вы также должны научиться это делать.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
4. В формуле 3 число n может быть и отрицательным. В частности, если $n = -1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
5. В формуле 3 число n может быть и не целым. В частности, если $n = \frac{1}{2}$, $f(x) = \sqrt{x}$, то $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$
6. Если $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = \cos x$
   $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$
7. Если $f(x) = e^x$, где $e = 2{,}718\ldots$, то $f'(x) = e^x$
8. Если $f(x) = \log_e x$, то $f'(x) = 1/x$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А. Если $h(x) = f(x) + g(x)$, то $h'(a) = f'(a) + g'(a)$; если $h(a) = c \cdot f(a)$, то $h'(a) = c \cdot f'(a)$

Б. Если $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, то $h'(a) = f(a) \cdot g'(a) + f'(a) \cdot g(a)$

В. Если $h(x) = f(x)/g(x)$ и $g(a) \neq 0$, то $h'(a) = \dfrac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$

Г. Если $h(x) = f(g(x))$, то $h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Правая часть есть произведение производной f в точке $g(a)$ на производную g в точке a

Смысл формул А–В таков: если функции f и g определены в некотором интервале, содержащем точку a, и дифференцируемы в точке , то функция h /определенная в том же интервале/ дифференцируема в a и имеет производную, заданную соответствующей формулой. Формула Г имеет следующий смысл: если g определена в интервале, содержащем a и дифференцируема в a, а f определена в интервале, содержащем $g(a)$ и дифференцируема в $g(a)$, то выражение $f(g(x))$ имеет смысл при x, достаточно близких к a, и получающаяся функция /определенная в интервале, содержащем a/, дифференцируема в a и имеет указанную производную.

<u>Задачи</u> Пользуясь таблицей, продифференцировать: 1. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 2. $f(x) = x \cdot \sin x$ 3. $f(x) = (\sin x)^2$ 4. $f(x) = \sin(x^2)$ 5. $f(x) = (x+1)^{100}$ 6. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (в $]-1, 1[$) 7. $f(x) = 2^x$ 8. $f(x) = \log_5 x$ 9. $f(x) = x^x$

Написать точные формулировки и доказать: 10. формулу А 11. формулу Б 12. формулу В Доказать: 13. формулу 3 14. формулу 4 15. Продифференцировать функцию $f(x) = \sqrt{x}$ 16. Доказать формулу Г. Доказать формулу 3 для произвольного действительного n, применяя без доказательства формулы 7 и 8.

Тема 27. Производная /другой подход/

Предел функции.

Пусть $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$, $a\notin M$. Говорят, что f имеет предел A в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\,]a-\delta, a+\delta[$ верно $|f(x)-A|\leq\varepsilon$.

1. Могут ли 2 разных числа быть пределом одной и той же функции в одной и той же точке ?

2. Докажите, что если $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$, a -точка касания М, /напоминаем: это значит, что любой интервал, содержащий a, пересекается с М /,то 2 разных числа не могут быть пределами функции f в точке a.

3. Докажите, что f имеет предел A в точке a тогда и только тогда, когда для любой последовательности f $x_n: x_n\in M$, $x_n\to a$ верно $f(x_n)\to A$.

4. Докажите, что f имеет предел A в точке a тогда и только тогда, когда функция $g: M\cup\{a\}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\in M\\ A, \text{ если } x=a\end{cases}$$

непрерывна в a.

Производная функции.

Пусть $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ и a является внутренней точкой M /это означает, что некоторый интервал, содержащий a, содержится в M /. Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-f(a)/x-a$

определенную в $M\setminus\{a\}$. Ее предел в точке a /если таковой существует/ называется производной функции f в точке a. Он обозначается $f'(a)$.

5. Может ли у одной функции быть 2 разных производных в одной точке ?

6. Докажите, что $f'(a)=A$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $h_n\to 0$, $h_n\neq 0$ верно $(f(a+h_n)-f(a))/h_n\to A$

7. Докажите формулу А дифференцирования суммы.

Указание: сначала докажите лемму о сууме пределов функций, надлежащим образом сформулировав ее.

8. Докажите, что если функция f определена и возрастает на интервале $]p,q[$, $x\in\,]p,q[$ и f дифференцируема в x, то $f'(x)\geq 0$. Можно ли утверждать $f'(x)>0$, если известно, что f строго возрастает?

9.* Докажите обратное: если f определена на $]p,q[$, дифференцируема во всех точках $]p,q[$ и ее производная во всех точках больше или равна 0, то функция возрастает. Можно ли утверждать, что f строго возрастает, если производная всюду больше 0 ?

10. Докажите, что дифференцируемая в точке a функция непрерывна в точке a.

11. Докажите, что функция f, определенная на интервале $]-a,a[$, касается 0 /то есть $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(|x|\leq\delta\Rightarrow|f(x)|\leq\varepsilon\cdot|x|)$/ тогда и только тогда, когда $f'(0)$ существует и равна 0.

12. Докажите, что $f'(a)=A$ тогда и только тогда, когда функция $\Delta_a f=f(a+h)-f(a)-Ah$ касается 0.

13.* Докажите, что если f дифференцируема во всех точках интервала $]p,q[$ и $f'(x)=0$ для всех $x\in\,]p,q[$, то f постоянна.

14. /Теорема Ферма/. Если x -точка локального максимума для f и f дифференцируема в x, то $f'(x)=0$.

15. /Теорема Ролля./ Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(a)=f(b)$, f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в $]a,b[$ /т.е. во всех точках $x\in\,]a,b[$ /. Докажите, что существует $x\in\,]a,b[$ такое, что $f'(x)=0$

Указание. Использовать 14 и теорему о достижении максимума.

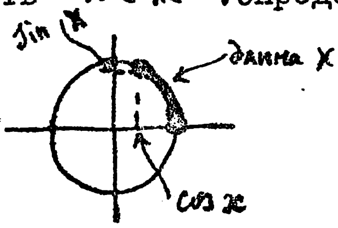
16. /Теорема о конечном приращении Лагранжа/. Докажите, что если f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема в $]a,b[$ и во всех точках $|f'(x)|\leq C$, то $|f(b)-f(a)|\leq C\cdot(b-a)$. Механический смысл таков: если автобус от момента a до b едет со скоростью не больше C, то он проедет не больше $C\cdot(b-a)$.

Вспомогательная задача к задачам 9,13,16.
Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема во всех точках $]a,b[$. Тогда существует точка $x\in]a,b[$ такая, что $f'(x)=(f(b)-f(a))/(b-a)$.
Механическая интерпретация: на любом отрезке движения существует момент, в который мгновенная скорость ($f'(x)$) равна средней за весь отрезок движения ($f(b)-f(a)/b-a$).
Указание к доказательству. Теорема Ролля является частным случаем при $f(a)=f(b)$.

Тема 28. Тригонометрические функции.

Мы не претендуем в этой теме на математическую строгость и стремимся дать лишь убедительные геометрические аргументы.

Определение функций $\cos$ и $\sin$.
Пусть $x\in\mathbb{R}$.Определим $\cos x$ и $\sin x$.Рассмотрим единичную окружность на координатной плоскости. Возьмем веревочку длиной x и намотаем ее на окружность против часовой стрелки. Тогда конец веревочки попадет в некоторую точку. Ее координаты назовем $(\cos x, \sin x)$. /Если x отрицательно, то надо наматывать по часовой стрелке веревочку длиной $|x|$ ./



Перечислим основные свойства функции
А.Периодичность. При всех $x\in\mathbb{R}$ верно $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
Б.Ограниченность. При всех $x\in\mathbb{R}$ верно $|\cos x|\le 1$, $|\sin x|\le 1$
В. При всех x и y верно: $|\cos x-\cos y|\le|x-y|$, $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.
Г. Формулы сложения:

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Их можно запомнить так: обозначим формально $M(x)=\cos x+\sqrt{-1}\cdot\sin x$, тогда выполнено $M(x+y)=M(x)\cdot M(y)$
Д.Функция $\cos$ четна , функция $\sin$ нечетна: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$
Е. При всех $x\in\mathbb{R}$ верно $\sin^2x+\cos^2x=1$
Для всякой точки (a,b) на единичной окружности /то есть такой, что $a^2+b^2=1$ / существует $x\in\mathbb{R}$ такое, что $\cos x=a$, $\sin x=b$
Ж. Следствием Г и Д являются всевозможные формулы "приведения" /синуса и косинуса любого угла к синусу и косинусу острого/ , например: $\cos(x+\pi/2)=-\sin x$; $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$

1. Докажите А.
2. Докажите В.
3. Докажите Г. /Указание. См. учебник алгебры/
4. Нарисуйте графики функций $\sin$ и $\cos$.
5. Выведите формулы п. Ж ($\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$) из Г.
6. Нарисуйте график функции tg : $x\mapsto\sin x/\cos x$
7. Докажите , что при любых a,b существуют A,φ такие, что для всех x верно $a\cos x+b\sin x=A\sin(x+\varphi)$.Нарисуйте с помощью этой теоремы график функции $x\mapsto\cos x+\sin x$.
8. Докажите непрерывность функции $\cos$ и $\sin$.
9. Докажите, что при $0<|x|<\pi/2$ выполнено неравенство: $1/\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$
10. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)=1$. Нарисуйте график функции $x\mapsto\frac{\sin x}{x}$
11. Докажите, что функция $\sin$ дифференцируема в 0. Чему равна ее производная ?
12. Докажите, что функция $\cos$ дифференцируема в 0. Чему равна ее производная ?
13. Докажите, что функции $\cos$ и $\sin$ всюду дифференцируемы и найдите их производные. Указание. См.формулу Г.
14. Найдите производную функции tg .

Тема 29. Упражнения.

В данной теме приведены некоторые задания, заимствованные из школьного учебника алгебры для 9 класса. Умение быстро и безошибочно выполнять их совершенно необходимо как для изучения математики, так и для поступления в ВУЗ'ы.

I. Определите промежутки возрастания и убывания функций:

/Это означает, что надо представить область определения указанных функций в виде объединения конечного числа отрезков и интервалов так, чтобы на каждом из них функция была монотонна. Это возможно не для любой функции, но предлагаемые Вам допускают это./

а) $f(x)=|x-2|$ в) $f(x)=-x^{-\frac{1}{2}}$

б) $f(x)=-2x^2+6x-7$ г) $f(x)=|\lg x|$ д) $f(x)=\lg|x|$

2. При помощи производной постройте графики функций:

а) $y=x^3-3x^2-2$ б) $y=x^4-2x^2$

3. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}-3x)$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}+1}{3+x}$ в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x^3+x^2-2x}$

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+x-1}$ д) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

ж) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

4. Постройте графики приведенных ниже функций, укажите точки разрыва:

а) $y=\begin{cases}3/x & \text{при } x\le -3\\ x+2 & \text{при } x>-3\end{cases}$ б) $y=\begin{cases}(1/2)^x & \text{при } x\le -1\\ 2 & \text{при } x>-1\end{cases}$

в) $y=\begin{cases}2-x & \text{при } x<1\\ \lg x & \text{при } x\ge 1\end{cases}$

5. Найдите производные следующих функций f:

а) $x\mapsto\sqrt{8x}+2$

б) $x\mapsto x^2+\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

в) $x\mapsto\left(\frac{3}{5}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)\left(\frac{1}{3}x+3\right)$

г) $x\mapsto 7-2x^3+x^4-3x^9$

д) $x\mapsto\dfrac{1+2x}{1+3x}$

е) $y=(3-5x+x^2)^{100}$

ж) $y=\sqrt{x+2}\,(x^2+7)^{12}$

6. Из всех цилиндров заданного объёма V найдите цилиндр с наименьшей полной поверхностью.

7. Найдите уравнения касательных к гиперболе $y=\frac{3}{x}$ в точках с абсциссами $x=-1$, $x=1$

8. Маховик, задерживаемый тормозом, за t (сек) поворачивается на угол $\varphi(t)=4t-0{,}3t^2$ (рад) Определите: 1/ угловую скорость вращения маховика в момент времени $t=2$ (сек) 2/ в какой момент времени вращение маховика прекратится.

9. Используя производную, определить промежутки монотонности функций:

а) $h(x)=x^3-27x$ в) $v(x)=5x^2-3x+1$

б) $y(x)=x-x^3$ г) $u(x)=x^2(x-3)$

Тема 30. Упражнения /продолжение/

I. Исследуйте на монотонность и экстремумы следующие функции:

а) $v(x) = 4x^2 - 6x$ г) $v(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$

б) $y(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ д) $u(x) = \sqrt[3]{x^2}$

в) $g(x) = x^2(x-12)^2$ е) $s(t) = \sqrt{t-1}$

2. Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

а) $f(x) = x^2 - 7x + 6$ г) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

б) $g(x) = 4x^2 + 12x + 9$ д) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$

в) $v(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$ е) $f(x) = \dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

на отрезках: а/ $[-2; -0{,}5]$ б/ $[0{,}5; 1]$ в/ $[1; 3[$

4. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

5. Данное положительное число разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

6. Открытый бак с квадратным основанием должен вмещать V литров жидкости. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала ?

7. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки на шоссе. /считаем шоссе прямой линией/ Если курьер на велосипеде проезжал по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч, то к какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта? Так

8. Вычислите угловую скорость часовой и минутной стрелок в радианах в час.

9. Постройте на единичной окружности точку, на которую отображается единичная точка M_0 оси ординат при повороте R^α, если:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ б) $\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ в) $\alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$

10. Найдите α, если

а) $R^\alpha \cdot R^\pi = R^{3\pi/4}$; б) $R^{\frac{\pi}{2}} \cdot R^\alpha = R^{-1}$

11. Угловая величина дуги [illegible] равна $5\pi/4$, а ее длина 10 см. Найдите радиус дуги.

12. Радиус сектора $r = 5$ см, а его площадь равна 75 см^2. Найдите радианную меру дуги сектора.

13. Упростите следующие выражения:

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ б) $(2\sin^2\alpha - 1)/(\cos\alpha + \sin\alpha)$

в) $(1 - 2\sin^2\alpha)/(2\cos^2\alpha - 1)$

13. По данному значению одной из тригонометрических функций и интервалу, в котором находится α, найдите значения остальных трех функций.

а) $\sin\alpha = 5/13$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$, $0 < \alpha < \pi$

в) $\operatorname{ctg}\alpha = -8/15$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; г) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

14. Вычислите $\sin 57^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 57^\circ \cdot \sin 12^\circ$

15. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = -8/17$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. α в III четверти, а β в IУ четверти

16. Упростите выражение

$$\left[\sin\left(\pi/6 + \alpha\right) - \cos\left(\pi/3 + \alpha\right)\right] / \left[\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right]$$

Теорема. Существует способ, позволяющий так сопоставить каждой непрерывной функции f, заданной на любом отрезке $[a,b]$, некоторое число, называемое интегралом f по отрезку $[a,b]$ и обозначаемое $\int_a^b f$ или $\int_{[a,b]} f$, что:

/I/ $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b c\cdot f = c\cdot\int_a^b f$ /линейность/

/2/ Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f \le \int_a^b g$ (монотонность)

/3/ Если $f(x) = c$ при всех $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f = c\cdot(b-a)$

/4/ Если $a\le b\le c$, f непрерывна на $[a,c]$, то

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad \text{(аддитивность)}$$

/Если f определена на $[a,c]$, то можно рассматривать f на меньших отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$; она непрерывна на них и, таким образом, определены интегралы $\int_a^b f$ и $\int_b^c f$ /

Мы докажем сформулированную теорему позже, а пока будем применять ее. При записи решений, используя свойства /I/ - /4/, указывайте, какое свойство Вы используете в данный момент.

I. Дайте геометрическое "доказательство" сформулированной теоремы. А именно: Через интеграл от функции f, по отрезку $[a,b]$ обозначим площадь S под графиком функции f /рис.I/. Если f отрицательна, то надо брать площадь со знаком "минус", /рис.2/, если f меняет знак, то интеграл равен разности площадей под положительной и над отрицательной частями графика /рис.3/. Объясните, почему определенный так интеграл удовлетворяет свойствам /I/-/4/; при этом опирайтесь на принцип Кавальери, который утверждает, что если длины сечений двух фигур любыми вертикальными прямыми равны /отличаются в k раз/, то площади фигур S_1 и S_2 равны /отличаются в k раз/. См. рис. 4. Можете ограничиться случаем неотрицательных f и g, так как это все не доказательство, а пояснение.

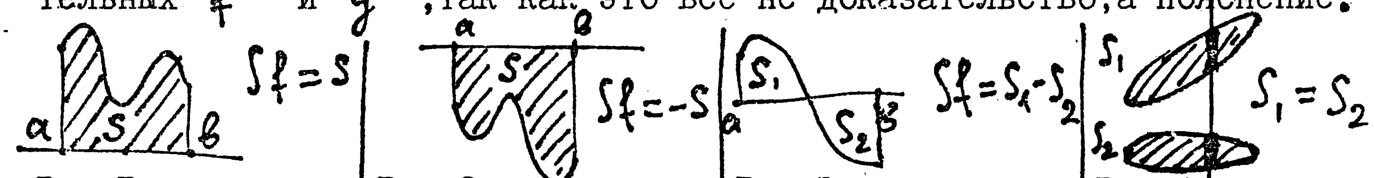


Рис.I Рис.2 Рис.3 Рис.4

А теперь приступим к выводу различных свойств интеграла из /I/-/4/.

2. Выведите из /I/-/4/, что $\int_a^a f = 0$ для любой f.

3. Докажите, что если $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ ограничена сверху числом c, то $\int_a^b f \le c\cdot(b-a)$.
Если f ограничена снизу числом c, то имеет место обратное неравенство.

4. Докажите, что если $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)\le 1$ при $x\in[0,1]$ и $f(x)\le 2$ при $x\in[1,2]$, то $\int_0^2 f \le 3$

5. Теорема о среднем. Для всякой непрерывной на $[a,b]$ функции существует такое $c\in[a,b]$, что $\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$

6. Пусть $f(x) = x$ при $x\in[0,1]$. Интеграл $\int_0^1 f$, видимо, равен I/2 по соображениям площади. Выведите из свойств /I/-/4/, что

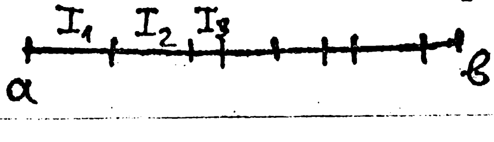
а/ $0 \le \int_0^1 f \le 1$

б/ $1/4 \le \int_0^1 f \le 3/4$

7. Обычный способ оценки $\int_a^b f$ состоит в том, чтобы разбить $[a,b]$ на большое число отрезков $I_1, I_2, \ldots$, на которых функция f не меньше $c_1, c_2, \ldots$ и затем использовать, что

$$\int_a^b f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f + \ldots \geqslant \int_{I_1} c_1 + \int_{I_2} c_2 + \ldots = c_1\cdot \text{длина}(I_1) + c_2\cdot \partial(I_2) +$$

Так мы получаем оценку снизу, аналогично можно получить и оценку сверху. Докажите, используя эту идею, что интеграл предыдущей задачи равен I/2.



Тема 3I /продолжение/.

8. Вычислите $\int_0^1 f$, если $f(x)=x^2$.

Указание. Разделите отрезок $[0,1]$ на n равных частей и примените идею, описанную в задаче 7.

9. Найдите формулы для интегралов $\int_0^1 f$, если
а/ $f(x)=px+q$; б/ $f(x)=x^2+px+q$.

I0*. Докажите однозначность определения интеграла. Это означает, что если имеется 2 способа ввести интеграл, удовлетворяющих свойствам /I/-/4/, то на самом деле они совпадают.
Указание. Использовать идею задачи 7 и теоремы о равномерной непрерывности и о достижении максимума и минимума на отрезке.

II. Пусть $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция. Определим функцию If так: $If(x)=\int_a^x f$ Докажите, что функция If непрерывна на $[a,b]$, и, более того, "удовлетворяет условию Липшица с константой C ", то есть $|If(y)-If(x)|\leq C|y-x|$, где C - такое число, что $|f(x)|\leq C$ при всех $x\in[a,b]$.

I2. Докажите, что функция задачи II дифференцируема в любой точке $x\in\,]a,b[$, причем $(If)'(x)=f(x)$

I3. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - непрерывная функция. Рассмотрим функцию

$$If(x)=\left\{\int_0^x f,\text{ если } x\geq 0;\ -\int_x^0 f,\text{ если } x<0\right.$$

/Иногда пишут еще $If(x)=\int_0^x f$, понимая $\int_a^b f$ при $a>b$ как $-\int_b^a f$/
Докажите, что If дифференцируема в любой точке и $If'=f$.

I4. Определение. Пусть $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Говорят, что g есть <u>первообразная</u> функции f , если g дифференцируема и $g'=f$
Принимая без доказательства теорему о существовании интеграла, докажите следующую важную теорему:

<u>Теорема. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.</u>

I5. Пусть g_1 и g_2 - 2 первообразные функции f . Докажите, что g_1-g_2 - константа. / Эта задача не имеет отношения к интегралу, а является следствием известных Вам фактов о производных/

Тема 32. Учитесь интегрировать!

Основной теоремой, используемой при интегрировании, является

> ТЕОРЕМА /НЬЮТОН-ЛЕЙБНИЦ/. Если f непрерывна на $[a,b]$, g непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема в $]a,b[$ и $g'=f$ при всех $x\in[a,b]$, то
> $$\int_a^b f = g(b)-g(a)$$

I. Докажите эту теорему.
2. Дайте с её помощью новое доказательство однозначности определения интеграла.
3. Вычислите с помощью этой теоремы $\int_0^1 f$, если:
а/ $f(x)=x$ б/ $f(x)=x^2$ в/ $f(x)=x^n$
4. Вычислить $\int_0^\pi f$, если а/ $f(x)=\cos x$ б/ $f(x)=\sin x$
Таким образом, вычисление интегралов сводится к нахождению первообразных, то есть, в конечном счете, к дифференцированию.

Введем теперь некоторые традиционные обозначения. $\int_a^b f$ иногда обозначается через $\int_a^b f(x)\,dx$ $\left(= \int_a^b f(y)\,dy = \ldots\right)$
Таким образом, $\int_a^b x^2 dx = \int_a^b t^2 dt = \int_a^b f$, где $f : t \mapsto t^2$
(Однако нельзя этот интеграл обозначать через $\int_a^b x^2 dt$!)

Найти следующие интегралы. (Допустимо давать ответ в форме $\int_a^b x^2 dx = (x^3/3)\,\Big|_{x=a}^{x=b}$ вместо более ясного $b^3/3 - a^3/3$)

5) $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$ $(a,b>0)$ 6) $\int_a^b 1/x\,dx$ (разобрать разные случаи знаков a и b)

7) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $(a,b>0)$ 8) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$ $\left(= \int_a^b f, \text{ где } f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$, $a,b>0$

9) $\int_a^b (x/\sqrt{x+2})\,dx$ $(a,b>-2)$ 10) $\int_a^b dx/x(x+1)$ $(a,b>0)$

11) $\int_a^b \sin 2x\,dx$ 12) $\int_a^b \sin^2 x\,dx$ 13) $\int_a^b (1/\sin^2 x)\,dx$ $(0<a<b<\pi)$

14. Теорема об интегрировании по частям. Если f и g определены и непрерывно дифференцируемы (то есть имеют производную, являющуюся непрерывной функцией) на интервале, содержащем $[a,b]$ то $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

Используя, если нужно, эту теорему, найти следующие интегралы:

15) $\int_a^b x\cdot\cos x\,dx$ 16) $\int_a^b x\cdot e^x\,dx$ 17) $\int_a^b e^x\cdot\sin x\,dx$

18. Теорема о замене переменной. Пусть g определена и непрерывно дифференцируема на некотором интервале, содержащем $[a,b]$ f определена и непрерывно дифференцируема на некотором интервале, содержащем образ $g([a,b])$ множества $[a,b]$ при функции g . Тогда $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$

Применяя эту формулу, если нужно, найти следующие интегралы:

19) $\int_a^b (x^2+1)^{100}\cdot 2x\,dx$ 20) $\int_a^b (\sin x)^{10}\cos x\,dx$ 21) $\int_a^b \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ $(a,b>0)$

22. Докажите формулу: если $g(x) = f(kx+q)$, то
$$\int_a^b g(x)\,dx = (1/k)\cdot\int_{ka+q}^{kb+q} f(t)\,dt$$

23) $\int_a^b \sin(2x+5)\,dx$

24. Найдите площадь круга единичного радиуса путем интегрирования. Указание. Площадь четверти круга равна $\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$ (почему?) Примените формулу замены переменной с $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $g(x) = \sin x$ и подходящими a и b.

Пользуясь любым известным Вам методом, найдите интегралы:

25) $\int_a^b \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$ 26) $\int_a^b \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ 27) $\int_a^b tg^2 x\,dx$ 28) $\int_a^b \sqrt[3]{1-3x}\,dx$

29) $\int_a^b \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$ 30) $\int_a^b x\cdot\sqrt{2-5x}\,dx$ 31) $\int_a^b \ln x\,dx$ 32) $\int_a^b \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$

33) $\int_a^b \sin(\ln x)\,dx$

34) $\int_a^b x^2\cdot\sin 2x\,dx$ 35) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

36) $\int_a^b dx/1+\sqrt{x}$ 37) $\int_a^b \sin 5x\cdot\cos x\cdot dx$.

Тема 33. Построение интеграла.

Наша цель – доказать теорему листка 31, то есть определить $\int_a^b f$ так, чтобы были выполнены свойства (1)-(4). Введем некоторые понятия.

Разбиением отрезка $[a,b]$ называется набор чисел $x_0,\dots,x_n$ такой, что $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

Функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется постоянной на интервалах разбиения $x_0,\dots,x_n$ если существуют такие числа $C_0,\dots,C_{n-1}$, что f постоянна и равна C_i на интервале $]x_i,x_{i+1}[$

Функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называется ступенчатой, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$, что f постоянна на его интервалах. (Таких разбиений, конечно, много: если f постоянна на интервалах разбиения R и мы устроим новое разбиение R', добавив в R какие-то точки, то f будет постоянна на интервалах R'

1. Докажите, что если f и g ступенчатые, что $f+g$ – ступенчатая.

Пусть f – ступенчатая функция, определенная на $[a,b]$ Квазиинтегралом f называется сумма $\sum c_i(x_{i+1}-x_i)$, где $x_0,\dots,x_n$ – разбиение $[a,b]$, на интервалах которого f постоянна, а c_i – значение f на интервале $]x_i,x_{i+1}[$.

2. Докажите, что это определение корректно, то есть что квазиинтеграл f не зависит от выбора разбиения.

3. Докажите, что квазиинтеграл, обозначаемый через $\bar{\int}_a^b f$ удовлетворяет свойствам (1)-(4). Напомним их: (1) $\bar{\int}_a^b f+g=\bar{\int}_a^b f+\bar{\int}_a^b g$ $\bar{\int}_a^b cf=c\bar{\int}_a^b f$; (2) $f\le g\to\bar{\int}_a^b f\le\bar{\int}_a^b g$; (3) $\bar{\int}_a^b c=c(b-a)$; (4) $\bar{\int}_a^c f=\bar{\int}_a^b f+\bar{\int}_b^c f$
Однако это, конечно, не доказывает теоремы, так как настоящий интеграл должен быть определен для непрерывных функций, а не для ступенчатых!

4. Пусть f – ограниченная функция на $[a,b]$. Рассмотрим всевозможные ступенчатые g, такие, что $g\le f$ (то есть $\forall x\; g(x)\le f(x)$). Рассмотрим множество квазиинтегралов таких g. Докажите, что это множество ограничено сверху, то есть $\exists C\;\forall g\,(g\text{-ступ.}, g\le f\Rightarrow\bar{\int}g\le C)$

Точная верхняя грань этого множества называется нижним интегралом функции f и обозначается $\int_{a*}^b f$: $\int_{a*}^b f=\sup\{(\bar{\int}_a^b g)\mid g\text{-ступ.}, g\le f\}$
Аналогично определяется верхний интеграл: $\int_a^{b*} f=\inf\{\bar{\int}_a^b g\mid g\text{-ступ.}, g\ge f\}$

5. Докажите, что $\int_{a*}^b f\le\int_a^{b*} f$. Всегда ли они равны?

6. Докажите, что для ступенчатых функций верхний, нижний и квазиинтегралы равны.

7. Чему равны $\int_{a*}^b\mathcal{D}$ и $\int_a^{b*}\mathcal{D}$, если $\mathcal{D}$ – функция Дирихле?

8. Докажите, что для непрерывной функции верхний и нижний интегралы совпадают. (Указание. См. теорему о равномерной непрерывности)

Общее значение верхнего и нижнего интегралов и называется интегралом непрерывной функции. Теперь докажем свойства (1)-(4)

9. Докажите свойство (2): $(\forall x\in[a,b]\; f(x)\le g(x))\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$.

Тема 33 (продолжение)

I0. Докажите свойство (3): $\int_a^b c = c(b-a)$

II. Докажите часть свойства (I): $\int_a^b cf = c\int_a^b f$
(не забудьте случай $c<0$.)

I2. Докажите, что если f и g – ограниченные функции, то
$$\int_{a*}^{b}(f+g) \geq \int_{a*}^{b} f + \int_{a*}^{b} g \ ; \ \int_a^{b*}(f+g) \leq \int_a^{b*} f + \int_a^{b*} g.$$

I3. Докажите для непрерывных f и g свойство (I):
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

I4. Приведите пример (разрывных) функций f и g, для которых в задаче I2 имеют место строгие неравенства.

I5. Докажите, что если f – ограниченная на $[a,b]$ функция, то
$$\int_{a*}^{b} f = \int_{a*}^{c} f + \int_{c*}^{b} f$$

I6. Докажите свойство (4) для непрерывных функций: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Итак, теорема о существовании интеграла доказана.

Тема 34. Разные задачи про интеграл.

I. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f = 0$

2. Докажите, что если f – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$

3. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – периодическая функция с периодом a, то $\int_x^{x+a} f$ не зависит от выбора x.

Часто определяют интеграл для более широкого класса функций (не только для непрерывных). А именно, назовем f интегрируемой по Риману (Риман Бернгард, I826-I866), если она имеет равные верхний и нижний интегралы. Их общее значение и называется интегралом (Римана).

4. Докажите, что сумма двух интегрируемых по Риману функций интегрируема по Риману и верно свойство (I). Свойства (2)-(4) легко следуют из уже доказанного, так что для интегрируемых по Риману функций также верны все свойства (I)-(4).

5. Докажите, что любая монотонная функция интегрируема по Риману.

6. Докажите, что любая ограниченная функция с конечным числом точек разрыва интегрируема по Риману.

7. Докажите, что любая ограниченная функция со счетным множеством точек разрыва интегрируема по Риману.

8. Докажите, что для любой непрерывной функции f
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

9. В этой задаче в формулировке нет понятия интеграла, но удивительным образом интегрирование оказывается полезным при ее решении. Доказать, что не существует таких чисел $C_1 \dots C_{100}$, что для всех x верно $C_1 \cos x + \dots + C_n \cos nx + \dots + C_{100} \cos 100x > 0.$

I0. Пусть $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, при всех $x \in [0,1]$ $f(x) = f(1-x)$. Доказать, что $\int_0^1 x f(x)\,dx = 1/2 \int_0^1 f(x)\,dx$

II. Докажите, что если $f_1, \dots, f_n, \dots, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, последовательность f_n равномерно сходится к f, то $\int_a^b f_1, \int_a^b f_2, \dots \to \int_a^b f$

I2. Можно ли заменить в задаче II равномерную сходимость на сходимость во всех точках $x \in \mathbb{R}$?

13. Доказать, что $\int_a^b 1/x\,dx = \int_{10a}^{10b} 1/x\,dx$ а) вычислением; б) с помощью формулы замены переменных.

Тема 35. Показательная функция и ее свойства.

Напомним аксиомы показательной функции.

0. a^x определено при $a>0$, x – любых из $\mathbb{R}$.
I. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ 2. $(ab)^x=a^x\cdot b^x$ 3. $(a^x)^y=a^{x\cdot y}$
4. $1^x=1,\ a^0=1$
5. При $a>1$ функция $x\mapsto a^x$ строго возрастает, при $a<1$ эта функция строго убывает.

Мы докажем впоследствии, что такая функция действительно существует, а пока выведем некоторые ее свойства.

I. Докажите, что $(a/b)^x=a^x/b^x$

2. Докажите, что при любом $x>0$ функция $a\mapsto a^x$ возрастает.

3. Докажите, что если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.
/Это означает, что для всякого N существует M такое, что при $x>M$ верно $a^x>N$./

4. Сформулируйте точно и докажите , что $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

5. Докажите, что функция $x\mapsto a^x$ непрерывна в точке I.
/Указание. Докажите сначала, что последовательность $a^{1/n}$ стремится к I/

6. Докажите, что функция $x\mapsto a^x$ непрерывна всюду.

7. Докажите, что функция $x\mapsto a^x$ при $a\neq1$ является взаимно однозначной функцией $\mathbb{R}\to\,]0,+\infty[$, то есть:
I. всегда $a^x\in\,]0,+\infty[$; 2. если $x\neq y$, то $a^x\neq a^y$ /вложение/
3. если $z\in\,]0,+\infty[$ – любое, то существует x такое, что $a^x=z$ /наложение/.

Это позволяет определить <u>логарифм</u> по основанию a как функцию, обратную к $x\mapsto a^x$:
$\log_a:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$; он определен при $a\neq1$.

8. Докажите тождества: $a^{\log_a x}=x$; $\log_a(a^x)=x$

9. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$

I0. $\log_b x=\log_a x/\log_a b$

Это свойство позволяет находить логарифмы по любому основанию с помощью таблиц десятичных логарифмов /как?/

II. Докажите, что $\log_a$ является монотонной функцией
При каких a он возрастает, при каких убывает ?

I2. Докажите, что $\log_a$ является непрерывной функцией.

ПОСТРОЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ.

Мы будем строить показательную функцию косвенно. А именно, мы сначала построим функцию $\ln$, которая окажется на самом деле $\log_e x$, где $e=2{,}7I\ldots$ и затем уже определим a^x при всех a и x.

Определение. $\ln x=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt$. Это определяет $\ln x$ при $x>0$.

Докажите, что:

I3. функция $\ln$ монотонно возрастает
I4. функция $\ln$ непрерывна
I5. функция $\ln$ дифференцируема и $\ln'(x)=1/x$
I6. $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$
I7. $\ln(x/y)=\ln x-\ln y$
I8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$. /дайте точную формулировку/
I9. Докажите, что $\ln$ является взаимно однозначной функцией $]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ Обратную функцию назовем $\exp$ /На самом деле $\exp x=e^x$ /

20. Докажите, что $\exp(0)=1$, $\exp(x+y)=\exp x\cdot\exp y$

2I. Докажите, что $\exp$ монотонно возрастает и непрерывна.

22. Определим a^x как $\exp(x\ln a)$ / $a>0$, x -любое/
Докажите, что $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

23. ...что $(ab)^x=a^x\cdot b^x$
24. ...что $(a^x)^y=a^{xy}$
25. ...что $a^0=1,\ 1^x=1$
26. ...что при $a>1$ функция $x\mapsto a^x$ возрастает, а при $a<1$ функция $x\mapsto a^x$ убывает.

Итак, существование функции, удовлетворяющей аксиомам 0-5 показательной функции, доказано.