Пусть M – некоторое множество. Функция ρ, которая сопоставляет каждой паре x, y элементов M некоторое число, называется <u>функцией расстояния</u> или <u>метрикой</u>, если выполнены следующие свойства:

1. $\rho(x,y)$ всегда неотрицательно. При этом, если $x=y$, то $\rho(x,y)=0$, если же $x \neq y$, то $\rho(x,y)>0$
2. ρ симметрична: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. /"неравенство треугольника"/: $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)+\rho(y,z)$

<u>Метрическим пространством</u> назовем множество M с заданной на нем метрикой. Задавая разные метрики на одном и том же множестве, получаем р а з н ы е метрические пространства.

Задачи.

1. Придумайте множество и 2 различные метрики на нем.
2. Какие из следующих множеств и заданных на них функций являются метрическими пространствами? /если являются – докажите, если нет – покажите, какое условие из числа 1 – 3 не выполнено/

а/ $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=x-y$ б/ $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=(x-y)^2$

в/ $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$ г/ $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\max(1,|x-y|)$

д/ $M=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=\min(1,|x-y|)$

е/ M = множество всех станций метро г. Москвы, $\rho(x,y)$ – время, необходимое для поезда от станции x до станции y.

ж/ $M=\{a,b,c\}$, $\rho(a,a)=\rho(b,b)=\rho(c,c)=0$, $\rho(a,b)=\rho(b,a)\cong 7$, $\rho(a,c)=\rho(c,a)=5$, $\rho(b,c)=\rho(c,b)=1$

з/ M = поверхность шара, $\rho(x,y)$ – кратчайшее расстояние от x до y по п о в е р х н о с т и шара.

и/ M = поверхность шара, $\rho(x,y)$ – кратчайшее расстояние от x до y по п р я м о й.

Элементы метрического пространства часто называют <u>точками</u>, а $\rho(x,y)$ называют <u>расстоянием</u> от точки x до точки y.

3.Т. Метрическое пространство $\mathbb{R}$.

Рассмотрим на множестве $M=\mathbb{R}$ функцию $\rho(x,y)=|x-y|$. Докажите, что мы получим метрическое пространство. Это метрическое пространство мы будем иметь в виду, если будем говорить "метрическое пространство $\mathbb{R}$" без специального указания метрики.

4.Т. Метрические пространства $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим множество $M=\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^2$ есть множество всех пар вида $\langle x,y\rangle$, где $x,y\in\mathbb{R}$, так, $\langle 0,1\rangle$ и $\langle 1,0\rangle$ – 2 различных элемента $\mathbb{R}^2$. Если на плоскости введена система координат, то $\mathbb{R}^2$ находится во взаимнооднозначном соответствии с плоскостью: паре $\langle x,y\rangle$ соответствует точка плоскости с координатами x, y /.

Рассмотрим теперь 3 функции:

1/ $\rho_{\sqrt{}}(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$ = расстояние между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$.

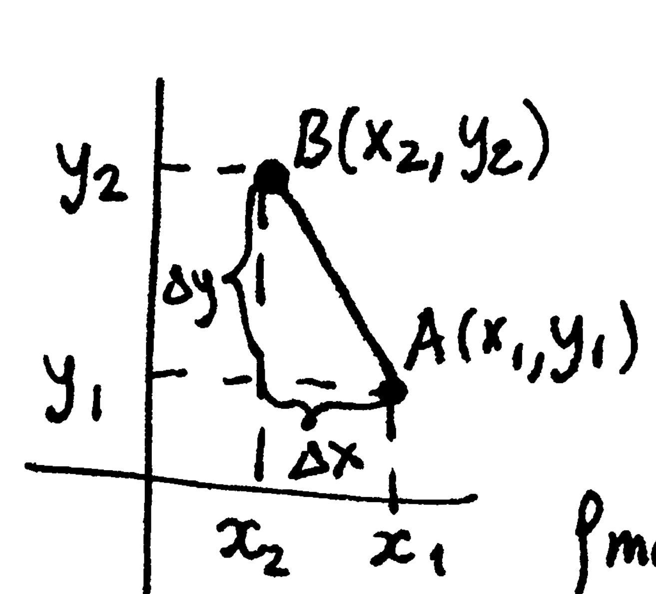
2/ $\rho_{max}(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$

3/ $\rho_{\Sigma}(\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

Докажите, что все эти 3 функции – метрики. Для первой из них "неравенство треугольника" можно получить из геометрических соображений /как?/; постарайтесь дать и строгое доказательство.

5.Т. На любом множестве M можно ввести <u>дискретную</u> метрику так: $\rho(x,y)=0$, если $x=y$ и 1, если $x\neq y$. Докажите, что это действительно метрика. Множество с такой метрикой называется <u>дискретным</u> метрическим пр-вом.

К задаче 4.Т.



$\Delta x=|x_2-x_1|$

$\Delta y=|y_2-y_1|$

$\rho_{\sqrt{}}(A,B)=|AB|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$;

$\rho_{max}(A,B)=\max(\Delta x,\Delta y)$;

$\rho_{\Sigma}(A,B)=\Delta x+\Delta y$

Метрические пространства: основные определения - 2

6.Т. Пусть M - множество, ρ_1 и ρ_2 - 2 метрики на нем. ρ_1 и ρ_2 назовем <u>мало отличающимися</u>, если существуют такие числа C и D, что для любых $x, y \in M$ верно

$$\rho_1(x,y) \le C\cdot\rho_2(x,y)\ ;\ \rho_2(x,y) \le D\cdot\rho_1(x,y)$$

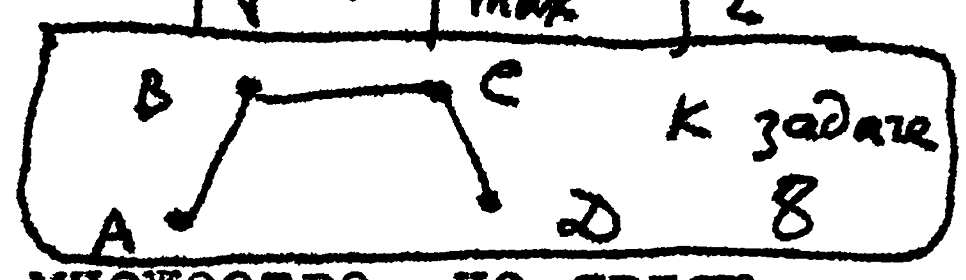
Докажите, что если ρ_1 мало отличается от ρ_2, а ρ_2 мало отличается от ρ_3, то ρ_1 мало отличается от ρ_3.

7.Т. Докажите, что любые 2 метрики из числа $\rho_{\sqrt{}}$, ρ_{max} и ρ_Σ мало отличаются друг от друга.

8.Т. Докажите "неравенство 4-угольника":

$$\rho(A,D) \le \rho(A,B)+\rho(B,C)+\rho(C,D)$$

в произвольном метрическом пространстве.



9. Приведите пример двух метрик на одном множестве, не являющихся мало отличающимися.

Указание. Рассмотрите в $\mathbb{R}$ обычную и дискретную метрики.

Дополнительная часть.

10.Т. В множестве $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы из n чисел, введем метрики $\rho_{\sqrt{}}$, ρ_{max} и ρ_Σ по аналогичным формулам:

$$\rho(\langle x_1\ldots x_n\rangle, \langle y_1\ldots y_n\rangle) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}\ ;\ \rho_{max}(\langle x_1\ldots x_n\rangle, \langle y_1\ldots y_n\rangle) = \max(|x_1-y_1|,\ldots,|x_n-y_n|)\ ;\ \rho_\Sigma(\langle x_1\ldots x_n\rangle, \langle y_1\ldots y_n\rangle) = |x_1-y_1|+\ldots+|x_n-y_n|$$

Докажите, что это - действительно метрики, причем мало отличающиеся друг от друга.

11. На конечном множестве любые 2 метрики мало отличаются.

12. Докажите, что в определении метрики свойство $\rho(x,y)\ge 0$ можно вывести из свойств $\rho(x,x)=0$, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$, $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

13. Докажите, что если ρ -метрика, то функция $\tilde\rho$: $\tilde\rho(x,y)=\min(1, \rho(x,y))$ -тоже метрика.

14. То же, если

$$\tilde\rho(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

Шары и сферы в метрическом пространстве.

Пусть М - метрическое пространство, $x \in M$, r -положительное число.

Открытым шаром с центром в x радиуса r называется множество $\{y \mid \rho(x,y) < r\}$, обозначается $ОШ_r(x)$

Замкнутым шаром с центром в x радиуса r называется множество $\{y \mid \rho(x,y) \le r\}$, обозначается $ЗШ_r(x)$

Сферой с центром в x радиуса r называется множество $\{y \mid \rho(x,y) = r\}$, обозначается $C_r(x)$

1. Какие подмножества $\mathbb{R}$ являются открытыми шарами, замкнутыми шарами, сферами ?

2. Нарисуйте открытые шары, замкнутые шары и сферы с центром в $\langle 1,2 \rangle_2$ радиуса 2, в пространстве
а/ $\mathbb{R}^2_r$ б/ $\mathbb{R}^2_{max}$ в/ $\mathbb{R}^2_\Sigma$ г/ $\mathbb{R}^2$ с дискретной метр.?

3. Известно, что М - метрическое, $x, y \in M$, $\rho(x,y) = 1$. Можно ли утверждать, что:
а/ $ОШ_{1/2}(x) \cap ОШ_{1/2}(y) = \varnothing$? б/ $ЗШ_{1/2}(x) \cap ЗШ_{1/2}(y) = \varnothing$?
в/ $ЗШ_{1/2}(x) \cap ЗШ_{1/2}(y) \ne \varnothing$?

4. Докажите, что если $\rho(x,y) \le 1$, то $ОШ_1(x) \subset ОШ_2(y)$
Верно ли, что $ЗШ_1(x) \subset ЗШ_2(y)$?

Дополнительная часть.

5. Что можно сказать о $\rho(x,y)$, если известно, что $ОШ_1(x) \subset ОШ_2(y)$?

6. Может ли $ОШ_1(x) = ОШ_2(x)$?

7. Могут ли в метрическом пространстве существовать 2 шара, таких, что шар большего радиуса является подмножеством шара меньшего радиуса и не совпадает с ним ? /Центры могут быть различны/

8. Пусть даны 2 замкнутых шара радиусов R_1 и R_2, причем $R_1/R_2 = 10$. Известно, что шары пересекаются. Рассмотрим теперь шары с теми же центрами и вдвое увеличенными радиусами. Докажите, что полученный шар радиуса $2R_2$ содержится в полученном шаре радиуса $2R_1$.

Последовательности и пределы в метрических пространствах.

Пусть M – метрическое пространство.
Множество A называется ловушкой последовательности x, если почти все члены последовательности x лежат в A.
Элемент a метрического пространства называется пределом последовательности x /а x –сходящейся к a последовательностью/, если любой открытый шар с центром в a является ловушкой для x.

В этом случае пишут $x \to a$ или $\lim x = a$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
Последовательность называется сходящейся, если существует такое a, что она сходится к a.

1.Т. Докажите, что в $\mathbb{R}$ определение сходящейся к a последовательности совпадает с прежним.

2.Т. Докажите, что $x_1 \dots x_n \dots \to a$ тогда и только тогда, когда $\rho(x_1, a), \dots, \rho(x_n, a) \dots \to 0$ /как числовая последовательность/.

3.Т. Докажите, что последовательность не может сходиться к 2 разным точкам: невозможно $x \to a$, $x \to b$ и $a \neq b$.

4. Докажите, что если почти все члены x равны a, то $x \to a$

5. Докажите, что в дискретном метрическом пространстве верно и обратное: если $x \to a$, то почти все члены x равны a.

6. Докажите, что если $x \to a$, $y \to b$, то числовая последовательность $\rho(x_1, y_1), \dots, \rho(x_n, y_n), \dots \to \rho(a, b)$

7.Т. Докажите, что если ρ_1 и ρ_2 –мало отличающиеся метрики и $x \to a$ по метрике ρ_1, то $x \to a$ и по метрике ρ_2. /Поэтому определение сходимости не меняется, если заменить метрику на мало отличающуюся./

8.Т. Докажите, что последовательность точек $\mathbb{R}^2$ $\langle x_1, y_1\rangle, \dots, \langle x_n, y_n\rangle, \dots$ сходится к $\langle a, b\rangle$ по метрике $\rho_{\sqrt{}}$, ρ_{max} или ρ_{Σ} /в силу 7 это все равно/ тогда и только тогда, когда $x_1, \dots, x_n \to a$ и $y_1, \dots, y_n \to b$. Иногда это выражают словами: сходимость в $\mathbb{R}^2$ –покоординатная.

9.Т. Докажите, что любой замкнутый шар V обладает следующим свойством: если все члены сходящейся последовательности лежат в V, то ее предел лежит в V. /См. далее о замкнутых множествах/

10.Т. Докажите, что любой открытый шар V обладает следующим свойством: если предел сходящейся последовательности принадлежит V, то почти все члены этой последовательности принадлежат V. /См. далее об открытых множествах/

11. Докажите, что если $x \to a$, а $\rho(x_n, y_n) \to 0$, то $y \to a$.

Дополнительная часть.

12. Верно ли обратное утверждение к 7: если сходимость в метриках ρ_1 и ρ_2 одинаковая, то они мало отличаются?
Указание. Докажите, что сходимость в метрике ρ и $\rho' = \min(1, \rho)$ –одинаковая.

13.Т. Последовательность называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует шар радиуса ε, являющийся для нее ловушкой. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

14. Верно ли обратное: всякая ли фундаментальная последовательность во всяком метрическом пространстве сходится?

15. Если у фундаментальной последовательности есть сходящаяся к a подпоследовательность, то и вся последовательность сходится к a.

Подпоследовательности и предельные точки.

Определения. 1. Последовательность y называется подпоследовательностью последовательности x, если y может быть получена из x вычеркиванием некоторых членов x /в конечном или бесконечном числе/.

2. Множество А называется кормушкой последовательности x, если бесконечное число членов x лежит в А.

3. Точка a называется предельной точкой последовательности x, если любой открытый шар, содержащий a, является кормушкой для x.

1.Т. Если $x \to a$, y -подпоследовательность x, то $y \to a$.

2.Т. Если $x \to a$, то a -предельная точка последовательности x.

3.Т. Докажите, что точка a является предельной для последовательности x тогда и только тогда, когда существует такая подпоследовательность y последовательности x, что $y \to a$.

4. Могут ли 2 разные точки быть предельными для одной последовательности ?

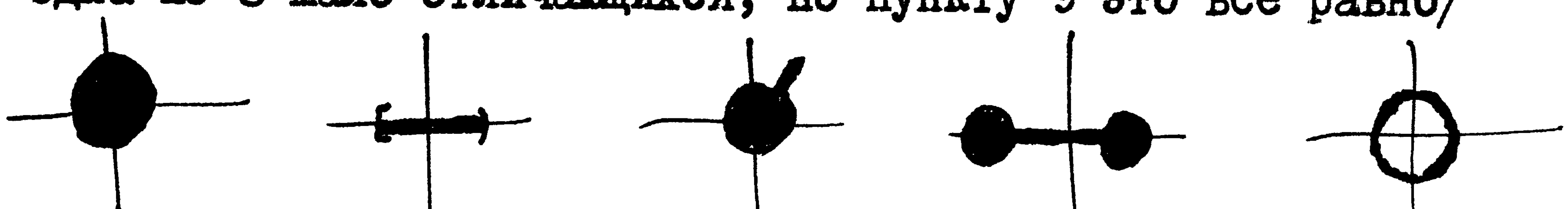
5. Докажите, что если все члены последовательности x лежат в замкнутом шаре, а a -ее предельная точка, то a также лежит в этом шаре.

6.Т. Докажите, что определение предельной точки не меняется при замене метрики на мало отличающуюся.

Внутренние точки. Открытые множества. – 1

Определения. 1. Пусть M -метрическое пространство, $A\subset M$, $x\in A$
x - внутренняя точка A, если некоторый открытый шар с центром в x целиком лежит в A.
2. $A\subset M$ -открыто, если все его точки внутренние.

1.Т.Докажите, что любой открытый шар - открытое множество.
2. Докажите, что дополнение к конечному множеству всегда открыто.
3. Пусть x -внутренняя точка для A и для B . Докажите, что x -внутренняя точка для $A\cap B$.
4.Т. Докажите, что пересечение двух открытых множеств открыто. Верно ли это про 3,4 и т.д. множества ?
Замечание. Это пересечение может быть пустым. Пустое множество также является открытым, ибо не открытое множество - это множество, имеющее невнутреннюю точку, а у пустого множества таких точек нет, так как вообще никаких точек нет.
5.Т. Докажите, что об"единение любого числа /конечного или нет/ открытых множеств - открыто.
6. Всегда ли открыты бесконечные пересечения открытых множеств?
7.Т. Пусть A - произвольное множество. Через Вн A /внутренность A/ обозначим множество всех внутренних точек A. Докажите:
1/ Вн A - открытое подмножество A
2/ если B -открытое подмножество A , то $B\subset$ Вн A
3/ если A открыто, то Вн A = A
8. Верны ли равенства $\text{Вн}(A\cap B)=\text{Вн}A\cap\text{Вн}B$, $\text{Вн}(A\cup B)=\text{Вн}A\cup\text{Вн}B$, $\text{Вн}(A\setminus B)=\text{Вн}A\setminus\text{Вн}B$
9.Т. Докажите, что определения внутренней точки и открытого множества не изменятся, если заменить метрику на мало отличающуюся.
10. Нарисуйте Вн A для следующих множеств в $\mathbb{R}^2$ /метрика - одна из 3 мало отличающихся, по пункту 9 это все равно/



11. Какие множества открыты в дискретном метрическом пространстве ? /Ответ:все/
12. Известно, что $A\subset\mathbb{R}$, A -открыто, причем $\mathbb{Q}\subset A$. Следует ли отсюда, что $A=\mathbb{R}$?
13. Известно, что $A\subset\mathbb{R}$, A -открыто, $\mathbb{Q}\cap A=\varnothing$. Следует ли отсюда, что $A=\varnothing$?
14. Приведите примеры подмножеств $\mathbb{R}$:
а/ не имеющих внутренних точек
б/ состоящих только из внутренних точек
в/ имеющих как внутренние, так и невнутренние точки
г/ таких A , что ни A , ни его дополнение $\mathbb{R}\setminus A$ не имеют внутренних точек.

Дополнительная часть.

15. В конечном метрическом пространстве все множества открыты.

16. Рассмотрим $\mathbb{Q}$ с метрикой $|x-y|$ /как говорят, с "индуцированной" из $\mathbb{R}$ метрикой/. Докажите, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ открыто в $\mathbb{R}$, то $A \cap \mathbb{Q}$ открыто в метрическом пространстве $\mathbb{Q}$ с указанной метрикой. Докажите, что верно и обратное: если $B \subset \mathbb{Q}$ - открытое подмножество метрического пространства $\mathbb{Q}$, то существует $A \subset \mathbb{R}$ такое, что A -открытое подмножество $\mathbb{R}$ и $A \cap \mathbb{Q} = B$.

17. В любом метрическом пространстве всякое открытое множество является об"единением открытых шаров. Доказать.

18. Всякое открытое в $\mathbb{R}$ множество является счетным об"единением шаров. Указание. Всякое открытое в $\mathbb{R}$ множество является об"единением шаров с рациональным центром и радиусом.

19. Верно ли это про $\mathbb{R}^2_{max}$, $\mathbb{R}^2_{\sqrt{}}$ и $\mathbb{R}^2_{\Sigma}$?

20. Верно ли это во всяком метрическом пространстве ?

21. Докажите, что условия 1 и 2 на метрическое пространство M равносильны.

1. Существует счетное <u>всюду плотное</u> множество $X \subset M$ /Множество в метрическом пространстве называется <u>всюду плотным</u>, если оно пересекается со всяким открытым шаром/

2. Существует такое счетное семейство открытых множеств, что любое открытое множество равно об"единению некоторых множеств из этого семейства /в конечном или бесконечном числе/.

/Такие метрические пространства называются сепарабельными./

22. Какие из известных Вам пространств сепарабельны ? Приведите пример несепарабельного пространства.

*23. Равносильна ли сепарабельность метрического пространства условию: всякое открытое множество есть счетное об"единение открытых шаров ?

Точки касания. Замкнутые множества.

Определения. 1. Точка x касается множества A $(x \in M, A \subset M,$ M–метрическое пространство $)$, если любой открытый шар, содержащий x, пересекается с A. /Например, любая точка A касается A/ 2. A замкнуто, если A содержит все точки, касающиеся A: $\forall x \in M\ ((x \text{ касается } A) \Rightarrow (x \in A))$

1.Т. Докажите, что x не касается A $\Leftrightarrow$ x–внутренняя для $M \setminus A$

2.Т. Докажите, что A замкнуто $\Leftrightarrow$ $M \setminus A$ открыто.

3.Т. Обозначим через $\bar{A}$ множество $\{x \mid x \text{ касается } A\}$ Это множество иногда называют замыканием множества A. Докажите:

1. Замыкание любого множества замкнуто.
2. Замыкание замкнутого множества совпадает с ним самим.
3. Если B замкнуто, $B \supset A$, то $B \supset \bar{A}$
4. Замыкание множества связано с внутренностью его дополнения следующим образом: $\bar{A} = M \setminus \text{Вн}(M \setminus A)$

4. Укажите верные и неверные равенства среди $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \setminus B} = \bar{A} \setminus \bar{B}$

5. Известно, что замкнутое в $\mathbb{R}$ множество содержит все рациональные точки. Может ли оно не содержать $\sqrt{2}$?

6. Найдите $\bar{A}$ для всех множеств из задачи "Открытые множества и внутренние точки", № 10

7. Докажите, что всякое конечное множество замкнуто.

8.Т. Докажите, что об"единение двух /или конечного числа/ замкнутых множеств замкнуто. Верно ли это для бесконечных об"единений ?

9.Т. Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

10. Всегда ли внутренность замыкания A равна A ?

11. Всегда ли замыкание внутренности A равно A ?

12. Всегда ли замыкание внутренности равно внутренности замыкания A ?

Дополнительная часть.

13. Докажите, что любое метрическое пространство "нормально": если Z_1 и Z_2 –непересекающиеся замкнутые множества, то существуют непересекающиеся открытые множества O_1, O_2, "отделяющие" Z_1 и Z_2: $Z_1 \subset O_1$, $Z_2 \subset Z_2$

Указание. /Для тех, кто знает, что такое нижняя грань/. Определим расстояние от точки x до множества A как нижнюю грань расстояний от x до элементов A. Теперь в качестве O_1 надо взять такие точки, что их расстояние до Z_1 более чем в 3 раза меньше, чем их расстояние то Z_2 ; O_2 –аналогично.

Если Вы не знаете, что такое нижняя грань, то можно выразить то же соображение так: возьмите

$$O_1 = \{x \mid \exists z_1 \in Z_1\ \exists \varepsilon > 0\ \forall z_2 \in Z_2\ \rho(x, z_1) < 1/3\, \rho(x, z_2)\}$$

и O_2 – аналогично

Связь между пределами, внутренними точками и точками касания.

1.Т. Докажите, что x тогда и только тогда является внутренней точкой множества A, когда любая последовательность, сходящаяся к x , почти вся лежит в A.

2.Т. Докажите, что x тогда и только тогда касается A, когда существует последовательность точек A, сходящаяся к x.

3.Т. Докажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит предел любой сходящейся последовательности точек A.

4.Т. Докажите, что A открыто тогда и только тогда, когда любая сходящаяся последовательность, предел которой лежит в A , почти вся лежит в A.

Дополнительная часть

5. Докажите с помощью новых определений замкнутых и открытых множеств известные Вам свойства /например, что пересечение замкнутых замкнуто и т.п. /.