## Лекция I

### Метрические пространства

#### А. Определение

Метрическим пространством называется множество М вместе с функцией "расстояния" $\rho : M\times M \to \mathbb{R}$, сопоставляющей каждой паре элементов x, $y \in M$ /точек М/ некоторое действительное число /называемое расстоянием между x и y/ и удовлетворяющей таким требованиям:

/$P_I$/ $\rho/x, y/ \geqslant 0$ при всех x и y;
$\rho/x, y/ = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$

/$P_2$/ $\rho/x, y/ = \rho/y, x/$ для всех x и y /симметричность/;

/$P_3$/ $\rho/x, z/ \leqslant \rho/x,y/ + \rho/y, z/$ для всех x, y, z /неравенство треугольника/

#### Б. Примеры

I. Введем в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел метрику, положив $\rho/x, y/ = |x - y|$. Это метрическое пространство также обозначается $\mathbb{R}$

2. В любом множестве можно ввести дискретную метрику, положив $\rho/x, y/ = 0$ при $x = y$ и $\rho/x,y/ = I$ при $x \neq y$.

3. В множестве $\mathbb{R}^n$, элементами которого являются наборы $\langle x_1 \dots x_n\rangle$ из $n$ действительных чисел, можно ввести такие метрики: $\rho_1(\langle x_1 \dots x_n\rangle\langle y_1 \dots y_n\rangle) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

$$\rho_2(\langle x_1 \dots x_n\rangle\langle y_1 \dots y_n\rangle) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_\infty(\langle x_1 \dots x_n\rangle\langle y_1 \dots y_n\rangle) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1 \dots n\}.$$

Полученные метрические пространства мы будем обозначать $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_2$, $\mathbb{R}^n_\infty$ соответственно.

4. Пусть X – произвольное множество. Введем в множестве ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$ метрику, положив

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \; x \in X\}.$$

Полученное метрическое пространство мы будем обозначать Огр./X/.

То, что в перечисленных примерах действительно выполняются свойства /$P_I$/ – /$P_3$/, почти очевидно; исключением является лишь неравенство треугольника в пространстве $\mathbb{R}^n_2$; это стандартный факт из теории евклидовых пространств.

#### В. Простейшие понятия

Пусть задано метрическое пространство М.

Открытым шаром ОШ$_\varepsilon$/x/ с центром в точке $x \in M$ радиуса $\varepsilon > 0$ называется множество

$$\{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

Если заменить неравенство $\rho(x,y)<\varepsilon$ на неравенство $\rho(x,y)\leq\varepsilon$, получим определение замкнутого шара ЗШ$_\varepsilon$ /x/. Пусть $\{x_n\}$ - последовательность точек из М, а - точка М. Говорят, что а есть предел последовательности $x$, если в любом открытом шаре с центром в а лежат почти все /=все, кроме конечного числа / члены последовательности х. Говорят, что а есть предельная точка последовательности х, если в любом открытом шаре с центром в $a$ лежит бесконечно много членов последовательности.

Очевидно, всякий предел есть предельная точка. У последовательности может быть ~~быть~~ только один предел: если а и в - пределы, а $\neq$ в, то $\varepsilon=\rho(a,b)>0$ и непересекающиеся шары ОШ$_{\frac{\varepsilon}{3}}(a)$ и ОШ$_{\frac{\varepsilon}{3}}(b)$ должны оба содержать почти все члены последовательности.

Если а - предел последовательности х, то говорят, что х сходится к а и пишут х $\rightarrow$ а; последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Подмножество А метрического пространства называется открытым, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторый шар с центром в ней: $(\forall x\in A)(\exists\varepsilon>0)(\text{ОШ}_\varepsilon(x)\subset A)$.
Подмножество, дополнение которого/до всего метрического пространства/ открыто, называется замкнутым.

Следующая лемма показывает, что наша терминология согласована.

Лемма. Открытый шар открыт, а закрытый-замкнут.

Доказательство. Пусть $x\in \text{ОШ}_\varepsilon(a)$. Тогда $\rho(x,a)<\varepsilon$ и $\delta=\varepsilon-\rho(x,a)>0$. Тогда ОШ$_\delta(x)\subset$ ОШ$_\varepsilon(a)$. Замкнутость замкнутого шара доказывается аналогично. ▨

## Г. Свойства открытых и замкнутых подмножеств. Топологические пространства.

Лемма. Открытые подмножества метрического пространства М обладают такими свойствами:

/01/ $\varnothing$ и М открыты;

/02/ пересечение двух / и,следовательно, любого конечного числа/ ~~конечных~~ открытых множеств открыто;

/03/ объединение любого семейства открытых множеств открыто.

Доказательство 01 очевидно. Докажем 02. Если А и В открыты, $x\in A\cap B$, то $x\in A$ и /А открыто/ ОШ$_{\varepsilon'}$ /x/ $\subset$ A при некотором $\varepsilon'$. Аналогично ОШ$_\varepsilon$ /x/ $\subset$ B при некотором $\varepsilon$. Взяв в качестве $\delta$ наименьшее из $\varepsilon'$ и $\varepsilon$, мы имеем ОШ$_\delta$ /x/ $\subset A\cap B$. Докажем 03. Пусть $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$, множества $A_\alpha$ открыты. Тогда $x\in A_{\alpha_0}$ при некотором $\alpha_0$ и / $A_{\alpha_0}$ открыто / ОШ$_\varepsilon$ /x/$\subset A_{\alpha_0}$ для некоторого $\varepsilon>0$. Очевидно, $\text{ОШ}_\varepsilon(x)\subset\bigcup_\alpha A_\alpha$. ▨

Если X – произвольное множество, $\mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств X, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ и выполнены свойства /OI/ – /O3/, если открытыми считать элементы $\mathcal{O}$, то $\mathcal{O}$ называется топологией в X, а пара $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ – топологическим пространством. Согласно лемме, по каждому метрическому пространству можно построить топологическое, взяв в качестве $\mathcal{O}$ семейство открытых / в смысле определения из п.В/ множеств. Топологические пространства, полученные из метрических, называются метризуемыми.

Д. Топология и сходимость.

Пусть дано метрическое пространство M.

Лемма I. Последовательность $x = \{x_n\}$ точек M сходится к $a \in M$ тогда и только тогда, когда любое открытое /в M/ множество, содержащее a, содержит почти все члены последовательности.

Лемма 2. Множество $A \subset M$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит предел любой сходящейся последовательности своих точек.

Доказательства. I. Если x сходится к a, $V$ – открытое множество, $a \in V$, то при некотором $\varepsilon$ имеет место включение $ОШ_\varepsilon(a) \subset V$ и, раз $ОШ_\varepsilon(a)$ содержит почти все члены последовательности x, то и $V$ содержит почти все ее члены. Обратное утверждение вытекает из того, что открытый шар открыт.

2. Пусть $A \subset M$ замкнуто, $x = \{x_n\}$ – последовательность точек A, $x \longrightarrow a$, $a \notin A$. Тогда a лежит в открытом множестве $M \setminus A$ вместе с некоторым шаром; этот шар должен содержать почти все члены последовательности /так как $x \longrightarrow a$ /, но не может содержать ни одного / так как не пересекается с A/. Противоречие. Обратно, пусть A не замкнуто и a – точка $M \setminus A$, для которой нет шара $Ш_\varepsilon(a)$, целиком лежащего в $M \setminus A$. Тогда любой шар $Ш_{\frac{1}{n}}(a)$ пересекается с A. Построим последовательность $x = \{x_n\}$, взяв в качестве $x_n$ любую точку $Ш_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$. Тогда $x \longrightarrow a$, $x_n \in A$ при всех $n$, a A, то есть A не содержит предела сходящейся последовательности своих элементов. ⊠

Эти леммы позволяют определить сходимость через топологию и топологию через сходимость. Из них следует, что для двух метрик $\rho$ и $\rho'$ на одном множестве M условия

а/ классы открытых в метриках $\rho$ и $\rho'$ множеств совпадают

и б/ для любой последовательности $x = \{x_n\}$ и $a \in M$ свойства "$x \longrightarrow a$ в $\rho_1$" и "$x \longrightarrow a$ в $\rho_2$" равносильны эквивалентны. Если эти условия выполнены, то метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ именуют эквивалентными.

## Лекция 2

Конструкции метрических пространств.

Мы рассмотрим две простейшие конструкции, позволяющие получать новые метрические пространства из уже имеющихся.

А. Произведение двух метрических пространств.

Пусть $\langle M_1, \rho_1\rangle$ и $\langle M_2, \rho_2\rangle$ – два метрических пространства. Определим на множестве $M_1 \times M_2$, элементами которого являются пары $\langle x_1, x_2\rangle$ при $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$ метрику, положив

$$\rho(\langle x_1, x_2\rangle\langle y_1, y_2\rangle) = \max(\rho_1(x_1, y_1)\rho_2(x_2, y_2)).$$

Легко проверить, что получено новое метрическое пространство. Именно так $\mathbb{R}^2_\infty$ получается из двух экземпляров $\mathbb{R}$. Можно было бы определить расстояние в $M_1 \times M_2$ и как $\rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$ или $[\rho_1^2(x_1, y_1) + \rho_2^2(x_2, y_2)]^{1/2}$ – это дало бы эквивалентные метрики. В дальнейшем когда мы будем говорить о метрическом пространстве – произведения, можно понимать под этим произведение $M_1 \times M_2$ с любой из этих метрик.

Б. Подпространства

Пусть $\langle M, \rho\rangle$ – метрическое пространство и $A \subset M$. Тогда А становится метрическим пространством, если расстояние между точками х, у из А считать равным расстоянию между ними в М / индуцированная из М метрика/. Выполнение свойств метрики очевидно.

В. Топология и сходимость в произведении

Лемма I. Множество $A \subset M_1 \times M_2$ открыто тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде объединения / возможно, бесконечного/ множеств вида $A_1 \times A_2$, где $A_1$ открыто в $M_1$, а $A_2$ – в $M_2$

Доказательство. Докажем вначале, что если $A_1$ открыто в $M_1$, а $A_2$ – в $M_2$, то $A_1 \times A_2$ открыто в $M_1 \times M_2$. В самом деле, если $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, $ОШ_\varepsilon(a_1) \subset A_1$, $ОШ_{\varepsilon'}(a_2) \subset A_2$, $\delta = \min(\varepsilon, \varepsilon')$ то $ОШ_\delta(\langle a_1, a_2\rangle) \subset A_1 \times A_2$.

Таким образом, если А представлено в виде объединения множеств вида $A_1 \times A_2$, то оно есть объединение открытого множества и, следовательно, открыто. Напротив, пусть А открыто. Объединим все множества вида $A_1 \times A_2$ / $A_1$, $A_2$ – открытые/, вложенные в А. Докажем, что получится все А. Больше получиться не может. Но и меньше не может: если $\langle x_1, x_2\rangle \in A$, то существует $\varepsilon > 0$, для которого $ОШ_\varepsilon(\langle x_1, x_2\rangle) = ОШ_\varepsilon / x_1/ \times ОШ_\varepsilon / x_2 / \subset A$. Осталось взять в качестве $A_1$ и $A_2$ шары $ОШ_\varepsilon(x_1)$ и $ОШ_\varepsilon(x_2)$. ■

Лемма 2. Последовательность $\langle x_1 y_1\rangle$ ..., $\langle x_n, y_n\rangle$... точек $M \times M$ / $x_i \in M$, $y_i \in M$ / сходится в $M \times M$ к точке $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда последовательность $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2$, сходятся к а и в соответственно.

Доказательство. Легко видеть, что сходимость последовательности $x_n$ к точке $a$ в метрическом пространстве $A$ равносильна сходимости последовательности вещественных чисел $\rho(x_n, a)$ к 0. Осталось вспомнить, что $\rho_{M_1 \times M_2}(\langle x_i, y_i\rangle \langle a, b\rangle) = max(\rho_{M_1}(x_i, a), \rho_{M_2}(y_i, b))$ и что для последовательностей $p_n$ и $q_n$ неотрицательных чисел свойства "$p_n \longrightarrow 0$ и $q_n \longrightarrow 0$" и "$max(p_n, q_n) \longrightarrow 0$" равносильны. ▨

Леммы I и 2 показывают, что для определения топологии /или сходимости/ в произведении достаточно знать топологию /сходимость/ в сомножителях. Это позволяет определить понятие произведения топологических пространств $X_1$ и $X_2$, считая открытыми в $X_1 \times X_2$ множества, являющиеся объединениями произведений $A_1 \times A_2$, где $A_i$ открыто в $X_i$.

Г. Топология и сходимость в подпространстве

Пусть $\langle M, \rho\rangle$ – метрическое пространство. $A$ – подмножество $M$. Введем в $A$ индуцированную метрику.

Лемма I. Множество $X \subset A$ является открытым подмножеством метрического пространства $A$ тогда и только тогда, когда $X$ есть пересечение с $A$ некоторого некоторого открытого в $M$ множества $Y$.

Доказательство. Пусть $X = A \cap Y$, $Y$ открыто в $M$.

Докажем, что $X$ открыто в $A$. Пусть $x \in X$. Тогда $x \in Y$ и /$Y$ открыто/ при некотором $\varepsilon > 0$ имеет место включение $ОШ_\varepsilon(x, M) \subset Y$ /в обозначение для шара мы добавили указание, в каком пространстве он берется/.

Тогда $ОШ_\varepsilon(x, A) = ОШ_\varepsilon(x, M) \cap A \subset Y \cap A = X$.

Напротив, пусть $X$ открыто в $A$. Для каждой точки $x \in X$ найдем шар $ОШ_{\varepsilon(x)}$ /$x$, $A$/, содержащийся в $X$. Тогда объединение шаров $ОШ_{\varepsilon(x)}$ /$x$, $M$/ будет открытым в $M$ множеством, пересечение которого с $A$ – объединение всех шаров $ОШ_{\varepsilon(x)}$ / $x$, $A$ / – будет совпадать с $X$ / будет не меньше его, так как все точки $x \in X$ в него входят, не больше – так как все шары $ОШ_{\varepsilon(x)}$/ $x, A$/ содержатся в $X$ /. ▨

Эта лемма наводит на мысль ввести топологию в подмножестве $A$ топологического пространства $T$, считая открытыми в $A$ пересечения с $A$ открытых в $T$ множеств.

Лемма 2. Пусть $\langle M, \rho\rangle$ – метрическое пространство, $A \subset M$, $x_n$ – последовательность точек из $A$, $a \in A$. Тогда свойства

а/ $x_n \longrightarrow a$ в $M$

б/ $x_n \longrightarrow a$ в $A$ с индуцированной метрикой равносильны.

Доказательство. Оба свойства равносильны свойству

$$\rho(x_n, a) \longrightarrow 0. ▨$$

Лекция 3. Сепарабельность и счетная база.

Теперь нам следовало бы ввести понятие непрерывной функции. Но у нас и так было много определений и простых лемм и не было ни одной содержательной теоремы. Поэтому мы сегодня рассмотрим некотрые важные (хотя и простые) факты, связанные с метрическими пространствами.

Определение Метрическое пространство M наз. сепарабельным, если существует такая последовательность точек M $x_1, x_2, \ldots$, для которой любая точка M - предельная.

Пример: $\mathbb{R}$ сепарабельно. Действительно, в качестве нужной последовательности можно взять последовательность, содержащую все рациональные числа.

Вариант определения: Пространство M сепарабельно, если найдется конечное или счетное множество $S \subset M$, которое плотно в M (т.е. имеет непустое пересечение с любым открытым шаром.

Эквивалентность этого варианта исходному определению почти очевидна: желая построить $S$, имея последовательность определения надо взять в качестве $S$ множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$; желая построить последовательность по $S$, надо взять такую последовательность, в которой каждый элемент $S$ встречается бесконечно много раз.

Оказывается, для метрических пространств сепарабельность равносильна другому свойству - наличию счетной базы...

Определение. Семейство $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ открытых подмножеств $B_\alpha$ метрического пространства M называется базой топологии пространства M (сокращенно базой M), если всякое открытое множество представимо в виде объединения некоторого набора множеств из семества B (возможно, бесконечного, в частности, несчетн.)

Лемма. Семейство $\mathcal{B}$ открытых множеств является базой метрического пространства M $\Longleftrightarrow$ для всякой точки x и $\forall$ открытого множества $V$, содержащего x, $\exists$ множество B из семейства $\mathcal{B}$, для которого $x \in B \subset V$.

Доказательство: I. Пусть $\mathcal{B}$ - база, $x \in V$. Тогда $V$ является объединением множеств из $\mathcal{B}$, и в качестве B возьмем то из них, которое содержит x.

2. Пусть выполнено указанное в формулировке леммы свойство. Докажем, что $\mathcal{B}$ - база. Пусть $V$ - произвольное открытое множество. Объединим все множества из $\mathcal{B}$, являющиеся подмножествами $V$. Надо доказать, что получится всё $V$. В самом деле, пусть x - любая точка $V$. Тогда по условию найдется такое $B \in \mathcal{B}$, что $x \in B \subset V$; оно является одним из объединяемых множеств.

Пример. Семейство всех открытых шаров метрического пространства M является базой M. (Очевидно следует из леммы.)

Теорема. Метрическое пространство M сепарабельно $\Longleftrightarrow$ оно имеет счетную базу.

Доказательство. I. Пусть оно имеет счетную базу. В каждом непустом базовом множестве возьмем по точке. Получим счетное множество $S$. Это мн-во плотно: любой открытый шар есть объединение базовых множеств, в каждом из которых есть точки из $S$.

2. Пусть оно сепарабельно и $S$ - счетное плотное подмножество. Рассмотрим все шары рациональных радиусов с центрами в точках $S$. Докажем, что они образуют базу. Пусть x - точка, $V$ - содержащее ее открытое множество. Т.к. $V$

открыто, то $\exists$ рациональное $\varepsilon>0$, для которого $ОШ_{\varepsilon}(x)\subset V$. В шаре $ОШ_{\varepsilon/3}(x)$ выберем точку $s\in S$. Тогда шар $ОШ_{2\varepsilon/3}(s)$ содержит x и содержится в $V$. Осталось воспользоваться предыдущей леммой.

В следующей теореме нам потребуются понятия покрытия и подпокрытия.

Покрытием метрического пространства M называется семейство открытых множеств, объединение которых равно M. Подпокрытием данного покрытия называется любое покрытие, получающееся отбрасыванием некоторых множеств (т.е. любое покрытие, являющееся подсемейством исходного).

Теорема Линделефа. Пусть метрическое пространство M имеет счетную базу (или, что то же самое, сепарабельно). Тогда всякое покрытие M имеет счетное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ - счетная база. Для каждого множества B из $\mathcal{B}$, содержащегося целиком в некотором множестве покрытия, выберем одно из таких покрывающих его множеств и обозначим его $V_B$. Докажем, что семейство $\{V_B \mid B\in\mathcal{B}$, B целиком содержится в одном из множеств покрытия$\}$ является искомым подпокрытием. Ясно, что оно есть часть исходного покрытия. Докажем, что в объединении оно дает все M. Пусть x - любая точка M. Пусть $V$ - множество исходного покрытия, содержащее x. Тогда $\exists$ множество $B$ из $\mathcal{B}$, для которого $x\in B\subset V$. Тогда B целиком содержится в одном из множеств покрытия; значит $V_B$ определено и $x\in B\subset V_B$. Значит, x содержится в объединении всех множеств построенного семейства.

Осталось выяснить, что происходит с сепарабельностью при произведениях и переходах к подпространству.

Лемма. I. Произведение двух сепарабельных пространств сепарабельно.
2. Подпространство сепарабельного пространства сепарабельно.

Доказательство. I. Пусть $M_I$ и $M_2$ - сепарабельны. $S_1$ и $S_2$ - их счетные плотные подмножества. Тогда, легко видеть, $S_1\times S_2$ - счетное плотное подмножество $M_I\times M_2$.

2. Пусть M - сепарабельно, $A\subset M$ - его подпространство с индуцированной метрикой. Рассмотрим счетную базу $\mathcal{B}$ в M. Докажем, что семейство $\{B\cap A \mid B\in\mathcal{B}\}$ является счетной базой в A. В самом деле, любое открытое в A множество $U$ является пересечением с A открытого в M множества $V$. Множество $V$ является объединением некоторых множеств из $\mathcal{B}$. Тогда $U$ является объединением их пересечений с A.

---

Задачи к лекции 3.

I. Доказать, что пространства $\mathbb{R}^n_I$, $\mathbb{R}^n_2$, $\mathbb{R}^n_\infty$ - сепарабельны. Указать в них счетную базу.

2. При каких X пространство Огр(X) сепарабельно?

3. Доказать сепарабельность подпространства сепарабельного пространства, не пользуясь понятием счетной базы.

4. Привести пример подпространства и его покрытия, не имеющего счетного подпокрытия.

5. Построить счетную базу в произведении двух пространств, если задана счетная база в сомножителях.

## ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИИ 4.

I. Дать определение непрерывности в точке, пользуясь лишь понятием открытого множества /а не пользуясь расстоянием/.

2. Пусть A–подмножество метрического пространства M. Доказать, что функция "расстояние до A", определяется по формуле

$$\rho_A(x) = \inf\{\rho(x,a) \mid a \in A\}$$ непрерывна

3. Доказать, что функция расстояния в метрическом пространстве M является непрерывной функцией из MxM в $\mathbb{R}$.

4. Пусть $A_1, A_2$ –непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства M. Доказать, что существуют непересекающиеся открытые множества $U_1$; $U_2$, содержащие $A_1, A_2$ соответственно : $U_i \supset A_i$
/ Указание. Построить непрерывную вещественную функцию на M, равную 0 на $A_1$ и I на $A_2$ /.

5.* Пусть A–замкнутое подмножество метрического пространства M, $f: A \to \mathbb{R}$ непрерывная / на A/ функция. Доказать, что существует непрерывная функция $F: M \to \mathbb{R}$, совпадающая с $f$ на A /непрерывное продолжение $f$ с A на M/

6.* Может ли множество $\mathbb{Q}$ быть множеством всех точек непрерывности функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Тот же вопрос про множество $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Как описать множества, являющиеся множеством всех точек непрерывности некоторых функций?

7. Построить непрерывную, но не равномерно непрерывную функцию.

8. Говорят, что функция $f: X \to Y$ удовлетворяет <u>условию Липшица с константой</u> C, если для всех $X_1$, $X_2 \in X$ выполнено неравенство

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \le C\rho(x_1, x_2)$$

Доказать, что любая функция, удовлетворяющая условию Липшица, равномерно непрерывна. Верно ли обратное?

9. Какие функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют свойству $\rho(f(x), f(y)) \le \rho(x,y)^2$ ?

I0. Если $f: X \times Y \to Z$ непрерывна, то все её сечения / функции $f_x: y \mapsto f(x,y)$ и $f_y: x \mapsto f(x,y)$/ непрерывны. Верно ли обратное?

II. Непрерывна ли функция $\Phi: \mathbb{R} \to O_{\text{гр}}(\mathbb{R})$ сопоставляющее числу a функцию $\Phi(a): x \mapsto \operatorname{arctg}(ax)$?

I2.** Существует ли непрерывная функция из круга Д в его граничную окружность $S$, тождественная на $S$ ?

I3.* Доказать, что функция $F: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ непрерывна тогда и только тогда, когда функция $G: [0,1] \to O_{\text{гр}}([0,1])$, определенная формулой $G(t): x \mapsto F(t,x)$, непрерывна и принимает только непрерывные значения.

## Лекция 4. Непрерывные функции

Понятие непрерывной функции – пожалуй, одно из самых важных в математике.

### А. Определения

I. Пусть X,У – метрические пр-ва, $f: X \to У$, $a \in X$. Говорят, что $f$ непр. в точке а, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что $\forall$ $x \in ОШ_\delta(a)$ значение $f(x) \in ОШ_\varepsilon(f(a))$.

Формальная запись: $f$ непр. в а $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x \in X)(\rho(x,a)<\delta \Rightarrow \rho(f(x), f(a))<\varepsilon)$

Лемма Следующие свойства равносильны:

а) $f$ непрерывно в а

б) для всякой последовательности $x_I, x_2, \ldots$, сходящейся к а, последовательность $f(x_I), f(x_2), \ldots$ сходится к $f(a)$.

Док-во. а) $\Rightarrow$ б) Пусть $f$ непрерывно в а, и $x_I, x_2, \ldots$ сходится к а. Докажем, что $f(x_I), f(x_2), \ldots$ сходится к $f(a)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta$ согласно определению непрерывности. Почти все члены последовательности $x_I, x_2, \ldots$ лежат в $ОШ_\delta(a)$, поэтому почти все члены последовательности $f(x_I), f(x_2), \ldots$ лежат в $ОШ_\varepsilon(f(a))$. Теперь б) $\Rightarrow$ а). Пусть для некоторого $\varepsilon$ не существует $\delta$, требуемого условием непрерывности. Тогда в качестве $\delta$ не годятся числа I, I/2, I/3, ... и поэтому существуют такие $x_I, x_2, \ldots$, что $\rho(x_к, a) < I/к$, и $\rho(f(x_к), f(a)) \geq \varepsilon$. Это противоречит условию б).

Пусть X,У – метрич.пр-ва. Функция $f: X \to У$ наз. непрерывной, если она непрерывна во всех точках X. Следующая лемма дает определение непрерывности в терминах открытых множеств.

Лемма. Функция $f: X \to У$ непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз при $f$ всякого открытого мн-ва (в У) открыт в пр-ве X.

Док-во. А. Пусть $f$ непрерывно, $A \subset У$ – открыто. Докажем, что мн-во $f^{-I}(A)$ открыто в X. Пусть $a \in f^{-I}(A)$. Тогда $f(a) \in A$ и (т.к. A открыто) при некотором $\varepsilon > 0$ шар $ОШ_\varepsilon(f(a))$ целиком содержится в A. Выбирая $\delta$ согласно определению непрерывности, мы видим, что $ОШ_\delta(a)$ целиком содержится в $f^{-I}(A)$.

Б. Пусть прообраз всякого открытого мн-ва открыт, $a \in A$, $\varepsilon > 0$. Прообраз открытого шара $ОШ_\varepsilon(f(a))$ открыт и содержит а, поэтому содержит и некоторый шар $ОШ_\delta(a)$, чего и требует определение непрерывности в точке а.

Замечая, что замкнутые мн-ва – дополнения открытых и что прообраз дополнения есть дополнение прообраза, получаем такое

Следствие Функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества замкнут.

Часто говорят о непрерывности функции, определенной не на всем метрическом пространстве M, а на его подмн-ве A с индуцированной из M метрикой. При этом, разумеется, имеет смысл говорить лишь о ее непрерывности в точках из A, так что вопрос "непрерывна ли функция $f(x) = I/x$ в точке $x = 0$ ?" лишен смысла.

### Б. Операции над непрерывными функциями

I. Сужение. Отметим такой очевидный факт: если $f: X \to У$ была непр. в точке а, то и сужение функции $f$ на подмн-во $A \subset X$, содержащее а, непрерывно в а.

2. Произведение. Пусть $f_I: X \to У_I$ и $f_2: X \to У_2$ – две ~~непрерывные~~ функции.

Образуем функцию $f : X \to Y_1 \times Y_2$, положив $f(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$. Ее можно назвать декартовым произвдением функций $f_1$ и $f_2$.

Лемма Декартово произведение двух непрерывных в точке а функций непрерывно в точке а. Декартово произведение двух непр.ф-ций непрерывно.

Доказательство просто и предоставляется читателю.

3. Композиция

Лемма. Пусть $X, Y, Z$ – метрические пр-ва, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Если $f$ непр. в точке а, а $g$ непр. в точке $f(a)$, то $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ непрерывна в а.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Т.к. $g$ непр. в $f(a)$, то существует такое $r$, что $g(Ош_r(f(a))) \subset Ош_\varepsilon(g(f(a)))$. Т.к. $f$ непр. в а, то $\exists\, \delta$, такое, что $f(Ош_\delta(a)) \subset Ош_r(f(a))$. Это $\delta$ и будем искомым.

Из леммы следует, что композиция двух непр. ~~отображ.~~ функций будет непрерывной. Это, впрочем, очевидно, вытекает также из определения непрерывности в терминах открытых множеств.

4. Пример. Как известно, функция сложения $\Sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, сопоставляющая числам x и y их сумму x + y, непрерывна. Поэтому сумма $f_1 + f_2$ двух непр. ф-ций $f_1$ и $f_2$ из X в $\mathbb{R}$ непрерывна: в самом деле, она есть композиция декартова произведения $f_1$ и $f_2$ и функции $\Sigma$.

Аналогично можно доказать непрерывность разности, произведения и частного непрерывных функций (в последнем случае надо требовать, чтобы делитель не обращался в нуль). Подобным же образом можно доказать непрерывность всех элементарных функций.

## В. Равномерная непрерывность.

Равномерная непрерывность является более сильным свойством, чем просто непр.

Определение. Пусть $X, Y$ – метрические пр-ва, $f : X \to Y$. Говорят, что $f$ равномерно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, что образы любых двух точек, отстоящих друг от друга меньше, чем на $\delta$, отстоят друг от друга меньше, чем на $\varepsilon$.

Формальная запись: ($f$ равномерно непрерывна) $\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X)$ $(\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$.

В отличие от непрерывности, равномерная непрерывность не является локальным свойством – говорить о "равномерной непрерывности в точке" нельзя.

Записывая определение непрерывности (во всех точках) в виде: $(\forall x_1 \in X)$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_2 \in X)(\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$, мы замечаем, что оно отличается от определения равномерной непрерывности порядком кванторов: вместо $\exists \delta\, \forall x_1$ стоит $\forall x_1\, \exists \delta$. Всякая равномерно непрерывная функция непрерывна. Обратное верно не всегда.

# Лекция 5. Компактность

Компактность – одно из самых важных свойств метрических (и не только метрических) пространств.

## А. Определения

Определение. Метрическое пространство X компактно, если всякое его покрытие имеет конечное подпокрытие.

Напомним, что покрытием пространства X называется любое семейство $\alpha$ открытых подмножеств пространства X, объединение которых равно X. Покрытие $\beta$ является подпокрытием покрытия $\alpha$, если всякое множество, входящее в $\beta$, входит и в $\alpha$.

Следующие теоремы позволяют сформулировать определение компактности метрического пространства в терминах сходимости последовательностей.

Теорема: следующие свойства равносильны:

(1) Метрическое пространство X компактно.
(2) Всякая последовательность точек X имеет предельную точку.

Прежде, чем доказывать эту теорему сделаем несколько замечаний.

1. Свойство (2) можно переформулировать так: всякая последовательность точек X имеет сходящуюся подпоследовательность.
2. Определение компактности, данное выше, автоматически без изменений переносится на топологические пространства. Но для них аналогичные теоремы не имеют места.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $x = x_1, x_2, \dots$ – последовательность точек компактного пространства X, не имеющая предельной точки. Тогда для каждой точки $a \in X$ можно найти открытый шар $V_a$, содержащий лишь конечное число точек последовательности x. Шары $V_a$ образуют покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие. В каждом из конечного числа шаров подпокрытия лежит конечное число членов последовательности x. Противоречие.

Доказательство обратной импликации гораздо сложнее. Два таких доказательства мы сейчас приведем. Попутно мы докажем несколько важных фактов.

Б. Первое доказательство.

Будем для краткости называть пространства, обладающие свойством (2) $\omega$ – компактными. (Как мы уже знаем, всякое компактное пространства $\omega$– компактно)

Определение. Назовем метрическое пространство X вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечное покрытие пространства X шарами радиуса $\varepsilon$. Другими словами, должна существовать конечная $\varepsilon$ – сеть для всякого $\varepsilon$. (т.е. такое конечное множество $S$ точек пространства X, что всякая точка X отстоит менее, чем на $\varepsilon$ хотя бы от одной из точек из $S$).

Лемма о полной ограниченности. Всякое $\omega$ – компактное пространство вполне ограничено.

Доказательство. Пусть X не вполне ограничено (при некотором $\varepsilon > 0$ не существует конечной $\varepsilon$ – сети). Построим последовательность точек $x_1, x_2, \dots$, в которой две любые точки будут отстоять друг от друга не менее, чем на $\varepsilon$: $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$ при $m \neq n$. Такая последовательность, очевидно, не может иметь сходящейся подпоследовательности. Точку $x_1$ можно выбрать любой. В качестве $x_{n+1}$ нужно выбрать точку, отстоящую от $x_1, x_2, \dots, x_n$ не менее, чем на $\varepsilon$. Такая точка всегда найдется, т.к. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ не образуют $\varepsilon$-сети.

Лемма Лебега. Пусть $\alpha$ – покрытие $\omega$ – компактного пространства X. Тогда $\exists \varepsilon > 0$, что всякий шар радиуса $\varepsilon$ целиком содержится хотя бы в одном из множеств покрытия $\alpha$.

Доказательство. Пусть такого $\varepsilon$ нет. Тогда числа $1, 1/2, 1/3, \dots$ не годятся в качестве $\varepsilon$. Значит, $\exists$ последовательность $x_1, x_2, \dots$, для которой ни один из шаров $ОШ_{1/n}(x_n)$ не содержится ни в одном из множеств покрытия. Пусть x – предельная точка этой последовательности, V – множество покрытия $\alpha$, содержащее x, $ОШ_\delta(x)$ – шар, целиком лежащий в V. Рассмотрим точку $x_k$ последовательности, входящую в $ОШ_{\delta/2}(x)$ и притом такую, что $1/k < \delta/2$ (такая точка найдется, т.к. x – предельная точка). Тогда шар $ОШ_{1/k}(x_k)$ целиком содержится в $ОШ_\delta(x)$ и, следовательно, в одном из множеств покрытия. Противоречие. ▫

Докажем теперь обещанное: всякое $\omega$-компактное метрическое пространство компактно. Пусть $\alpha$ – покрытие $\omega$-компактного пространства X. Выберем $\varepsilon$ по лемме Лебега. Всякий шар радиуса $\varepsilon$ содержится в одном из множеств покрытия $\alpha$. Воспользуемся полной ограниченностью X и выберем конечное покрытие пр-ва X шарами радиуса $\varepsilon$. Заменяя каждый из шаров на то множество покрытия $\alpha$, в котором он содержится, мы получаем искомое конечное покрытие (подпокрытие $\alpha$).

В. Второе доказательство.

Лемма I. Из всякого счетного покрытия $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ $\omega$ – компактного пространства X можно выбрать конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть это не так. Тогда для всякого n $\exists$ точка $x_n$, не принадлежащая $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$. Пусть a – предельная точка последовательности $\{x_k\}$. Пусть $\mathcal{U}_k$ – множество покрытия, содержащее a. Тогда оно должно содержать бесконечно много членов последовательности, в том числе с $n \geq k$, что противоречит тому, что $x_n \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n$.

Лемма 2. Всякое вполне ограниченное пространство сепарабельно (т.е. имеет счетную базу).

Доказательство. Для каждого n выберем конечную I/n – сеть. Счетным плотным множеством будет объединение всех этих сетей.

Докажем теперь компактность $\omega$-компактного пространства X. По лемме о полной ограниченности X вполне ограничено и, следовательно, сепарабельно и имеет счетную базу. Теперь теорема Линделефа позволяет из всякого покрытия выбрать счетное, и остается сослаться на лемму I. Второе док-во импликации (2) $\Rightarrow$ (I) закончено.

Г. Компактность в индуцированной метрике и замкнутость.

Пусть A – подмножество метрич. пр-ва X. Говоря о компактности A, мы будем иметь в виду компактность его как метрического пространства с индуцированной из X метрикой.

Теорема. Компактное подмножество метрического пространства замкнуто. (А)
Замкнутое подмножество компактного пространства компактно. (Б)

Эта теорема устанавливает связь между внутренним свойством пространства – компактностью – и его замкнутостью в объемлющем пространстве.

Доказательство. Лемма. Любое метрическое пространство – хаусдорфово. (Топологическое пространство наз. хаусдорфовым, если для всякой пары его точек x и y существуют непересекающиеся открытые множества, содержащие их.)

Доказательство. Очевидно: в качестве искомых множеств достаточно взять шары радиуса $1/3\ \rho(x,y)$ с центрами в x и y.

/Таким образом, лемма утверждает, что всякое метризуемое пространство – хаусдорфово./

Теперь докажем (А). Пусть K – компактное подмн-во метрич. пр-ва M, не являющееся замкнутым, $a \in M \setminus K$. $\forall\, b \in K$ выберем по лемме непересекающиеся открытые множества $V_b$ и $\mathcal{U}_a$, содержащие b и a соответственно. Пересечения $\mathcal{U}_b \cap K$ образуют открытое покрытие K (с индуцированной метрикой). Выберем из него конечное подпокрытие: $\mathcal{U}_{b_1} \cap K, \ldots, \mathcal{U}_{b_n} \cap K$. Каждое из этих множеств не пересекается с соответствующим $V_{b_i}$. Значит, их объединение – все K – не пересекается с открытым множеством $V_{b_1} \cap V_{b_2} \cap \ldots \cap V_{b_n}$, содержащим a, и, следовательно, точка a – внутренняя.

Докажем (Б). Пусть Z – замкнутое подмножество компактного пр-ва K. Докажем компактность Z. Пусть дано покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ пространства Z открытыми в Z множествами. Каждое из них ($\mathcal{U}_\alpha$) есть пересечение с Z некоторого открытого в K множества $V_\alpha$. Множества $V_\alpha$, дополненные открытым множеством $K \setminus Z$, образуют покрытие K. Выберем из него конечное подпокрытие. Выбрасывая из него (если нужно) $K \setminus Z$, и пересекая каждое из мн-в с Z, получаем искомое конечное покрытие.

## Д. Компактность произведения

Теорема. Произведение двух компактных метрических пространств компактно.

Доказательство. Эту теорему проще доказывать, пользуясь определением компактности в терминах сходящихся последовательностей. Пусть $X, Y$ – компактные пространства, $\alpha$ – последовательность точек пространства $X \times Y$. Т.к. $X$ – компактно, то у этой последовательности есть подпоследовательность $\beta$, первые координаты которой образуют сходящуюся последовательность точек $X$. Т.к. $Y$ компактно, то у $\beta$ есть подпоследовательность $\gamma$, у которой вторые координаты также сходятся. Последовательность $\gamma$ и будет искомой подпоследовательностью последовательности $\alpha$.

## Е. Компактность в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно (в индуцированной из $\mathbb{R}^n$ метрике) $\Longleftrightarrow$ оно замкнуто и ограничено.

Замечания. I. Ограниченными называются подмножества $\mathbb{R}^n$, содержащиеся в некотором параллелепипеде (произведении отрезков). Эквивалентное определение: $M$ ограничено, если $\sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in M\} < \infty$.

2. Мы не указываем, какая именно из трех рассмотренных выше метрик $\mathbb{R}^n$ имеется в виду, т.к. они эквивалентны, и следовательно, понятия замкнутости, компактности не меняются при переходе от одной к другой. (Это относится и к ограниченности, см. предыдущее замечание.)

Доказательство. Пусть $A$ – компактно. Тогда оно замкнуто (см.п. Г.). Чтобы доказать его ограниченность, рассмотрим покрытие его открытыми множествами $\mathcal{U}_n = A \cap \text{ОШ}_n(\bar{o})$. /Здесь $\bar{o} = (0,0,\ldots,0)$/ Так как $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \ldots$, то наличие конечного подпокрытия означает, что $A \subset \mathcal{U}_n$ при некотором $n$. Поэтому $A$ ограничено.

Обратно, пусть $A$ замкнуто и ограничено. Как известно из стандартного курса анализа, отрезки компактны. Значит, компактны и параллелепипеды (п.Д). Остается сослаться на теорему о компактности замкнутого подмножества компактного пространства.

## Задачи к лекции 5.

I. Покрытие $\alpha$ пространства $X$ наз. локально конечным, если $\forall\, x \in X\ \exists$ открытая окрестность этой точки (= содержащее ее открытое множество), пересекающееся лишь с конечным числом множеств покрытия. Доказать, что всякое локально конечное покрытие компактного пространства конечно.

2. Действительная функция $f$ на метрическом пространстве $X$ наз. локально ограниченной, если $\forall\, x \in X\ \exists$ открытое множество, содержащее $x$, в которой $f$ ограничена. Докажите, что локально ограниченная функция на компактном пространстве ограничена.

3. Пусть $X, Y$ – непересекающиеся компактные подмножества метрического пространства. Доказать, что $\rho(X,Y) = \inf\{\rho(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\} > 0$. Можно ли утверждать это, если $X$ и $Y$ предполагаются замкнутыми? А если одно замкнуто, а другое компактно ?

4. Будут ли пересечение и объединение двух компактных подмножеств одного пространства компактными ?

5. Подмножество $A$ метрического пространства $M$ компактно в индуцированной метрике тогда и только тогда, когда для любого семейства открытых в $M$ множеств, покрывающего $A$, существует конечное подсемейство, также покрывающее $A$. Доказать.

6.* Доказать компактность произведения счетного числа компактных пространств (введя предварительно подходящую метрику).

# Лекция 6. Непрерывные функции на компактах

## А. Образ компакта.

Теорема. Пусть $f: X \to У$ – непрерывное отображение метрических пространств, $X$ – компактно. Тогда множество $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ (образ $f$) компактно (в индуцированной метрике).

Доказательство. Пусть сначала $У = f(X)$ и нужно доказать компактность $У$. Пусть $\{U_\alpha\}$ – покрытие $У$. Семейство $\{V_\alpha\}$: $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ состоит из открытых множеств ($f$ непрерывно) и покрывает $X$. Т.к. $X$ компактно, $\exists$ конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \dots V_{\alpha_n}\}$. Тогда $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots U_{\alpha_n}\}$ – искомое конечное подпокрытие $У$. Случай $У = f(X)$ рассмотрен. Общий случай легко сводится к нему: нужно рассмотреть $f$ как непрерывную функцию из $X$ в $f(X)$.

Следствие. Пусть $f: X \to У$ – непрерывная ф-ция, $A$ – компактное подмн-во $X$. Тогда $f(A)$ – компактное подмножество $У$.

Доказательство. Применим теорему к сужению $f$ на $A$.

## Б. Действительные функции на компакте.

Теорема. Любая действительная непрерывная функция на компактном пространстве принимает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство. Воспользуемся теоремой п.А и следующей леммой.

Лемма. Всякое компактное подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет наибольший и наименьший элементы.

Доказательство леммы. Как доказано в предыдущей лекции, $X$ замкнуто и ограничено. Значит $\exists \inf X$ и $\sup X$ (ограниченность), которые принадлежат $X$ (замкнутость). Теорема доказана.

## В. Непрерывное отображение компакта замкнуто.

Говорят, что функция $f: X \to У$ замкнута, если образ любого замкнутого подмножества $X$ при функции $f$ замкнут в $У$. Если $f$ взаимно однозначна, то замкнутость $f$, очевидно, равносильна непрерывности $f^{-1}$.

Теорема. Если $f: X \to У$ – непрерывная функция, а $X$ компактно, то $f$ – замкнута.

Доказательство. Если $A$ замкнуто в $X$, то $A$ компактно, поэтому $f(A)$ компактно и, следовательно, замкнуто в $У$.

Следствие. Непрерывное взаимно однозначное отображение $f$ компакта $X$ на пространство $У$ есть гомеоморфизм. (Гомеоморфизм – такое непрерывное взаимно однозначное отображение, обратное к которому также непрерывно.)

Доказательство: раз $f$ замкнуто, то $f^{-1}$ непрерывна.

## Г. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Теорема. Всякая непрерывная функция на компактном пространстве равномерно непрерывна.

Доказательство. Пусть $X$ компактно, $f: X \to У$ – непрерывная функция, $\varepsilon > 0$. $\forall\ x \in X$ выберем шар $V_x$, в котором ф-ция отклоняется от своего значения в $x$ меньше, чем на $\varepsilon/2$. (Если $x$ и $y$ принадлежат одному $V_z$, то $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.) Шары $V_x$ образуют покрытие пространства $X$. Применяя к нему лемму Лебега, находим такое $\delta > 0$, что любой шар радиуса $\delta$ содержится в одном из множеств $V_x$. Это $\delta$ и будет искомым.

## Задачи к лекции 6.

1. Дайте другое док-во теоремы п.Б, используя локальную ограниченность непр. ф-ции.
2. Пространства $X$ и $У$ гомеоморфны, если $\exists$ гомеоморфизм $f: X \to У$. Какие из пространств $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $]0,1[$, $\mathbb{R}^2$, $S^1$ гомеоморфны друг другу?
3. Показать, что в следствии из п.В условие компактности $X$ существенно.
4. Построить негомеоморфные пространства $X$ и $У$ и непрерывные взаимно однозначные отображения $f: X \to У$ и $g: У \to X$. Может ли $X$ или $У$ быть компактным?

# ЛЕКЦИЯ 7. ПОЛНОТА

Полнота метрического пространства позволяет доказать сходимость последовательности, не зная её предела заранее. Именно такая ситуация имеет место, если, например, мы хотим доказать сходимость ряда $\sum \frac{1}{k!}$, то есть сходимость последовательности $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ /и тем самым определить число e/.

А. Определения.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек метрического пространства X называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует шар радиуса $\varepsilon$, содержащий почти все члены последовательности.

Лемма. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна титтк $(\forall \varepsilon>0)(\exists N)(\forall m, n > N)$ $(\rho(x_m, x_n) < \varepsilon)$

Д-во. просто и предоставляется читателю. Эта лемма показывает, что фундаментальность последовательности зависит только от расстояний между её членами. Очевидно, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Пространство X называется полным, если верно и обратное: всякая фундаментальная последовательность сходится.

Примеры. I. пространство $\mathbb{R}$ полно.

2. Интервал ]0,1[ с индуцированной из $\mathbb{R}$ метрикой не полон /последовательность 1, 1/2, 1/3 ... фундаментальна, но не имеет предела/. $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$

3. Пространство $\mathbb{R}$ с метрикой $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ не полно: последовательность 1, 2, 3... фундаментальна, но не сходится. /Это прост-рво изометрично пр-ву $]-\pi/2; \pi/2[$ с обычной метрикой./

Замеч. Примеры I и 3 показывают, что замена метрики на эквивалентную может нарушить полноту. Таким образом, полнота не является тополо-гическим свойством, то есть не может быть определена в терминах открытых множеств. /Иными словами, полное прост-во может быть гомеоморфно не полному./

Б. Лемма о вложенных замкнутых множествах.

Назовем диаметром множества A /лежащего в метрическом пространстве/ число $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$ /Возможно, что $\operatorname{diam}(A) = +\infty$ /

Лемма. Пусть X-полное пр-во, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$-последовательность не пустых замкнутых множеств и $\operatorname{diam}(A_i) \to 0$ /в частности, почти все $\operatorname{diam}(A_i)$ конечны/.

Тогда $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$

Доказательство: Выберем в каждом $A_i$ по точке: пусть $x_i \in A_i$.

Так как $\operatorname{diam}(A_i) \to 0$, то последовательность $i \to x_i$ фундаментальна.

Так как X полно, оно имеет предел $a$. Для каждого $n$ члены последовательности $i \to x_i$, начиная с $n$-го, принадлежат $A_n$, поэтому $a \in A_n$ при всех $n$.

В. Теорема Бэра

Пусть A-подмножество метрического пространства X. Оно называется нигде не плотным, если для всякого шара V существует шар W, содержащийся в V и не пересекающийся с A. /Эквивалентное определение получится, если считать V и W не шарами, а открытыми множествами/.

Лемма. Пусть A замкнуто. Тогда A нигде не плотно титтк $X \setminus A$ всюду плотно.

Доказательство. Если $X \setminus A$ всюду плотно, то во всяком шаре V есть точка, не лежащая в A. Чтобы найти шар W, воспользуемся замкнутостью A. Обратная импликация очевидна.

Теорема Бэра. Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Доказательство. Пусть X-полное пространство, $A_i \subset X$ - нигде не плотные множества. Найдем точку $a$, не лежащую ни в одном из $A_i$. Построим последовательность вложенных замкнутых шаров $зш_0 \supset зш_1 \supset \ldots$ с такими свойствами:

I/ /радиус $зш_{i+1}$ / $\leq \frac{1}{2}$/радиус $зш_i$/

2. $зш_i \cap A_i = \emptyset$ Если это будет сделано, то общая точка $a$ всех этих шаров и будет искомой. А построить такую последовательность легко: $зш_0$ можно взять любое, а при выборе $зш_i$ воспользоваться нигде не плотностью $A_i$.

Г. Полнота подпространств и произведений.

Теорема. I. Если $A \subset X$ и A полно / в индуцированной метрике/, то A замкнуто в X. 2. Если A-замкнутое подмножество X, и X полно, то A полно /в индуцированной метрике/.

Доказательство. Если последовательность точек из $A$ сходится в $X$, то она фундаментальна, значит сходится в $A$ к тому же пределу. 2. Если последовательность точек $A$ фундаментальна, то она сходится в $X$, а в силу замкнутости её предел лежит в $A$. 3. Первые и вторые координаты фундаментальной последовательности точек из $X_1 \times X_2$ фундаментальны в $X_1$ и $X_2$, и, следовательно, сходятся. Таким образом, из полного пространства можно получить неполное, рассмотрев его незамкнутое подмножество. В следующем пункте мы покажем, что так можно получить любое пространство.

Д. Пополнения.

Мы докажем, что всякое неполное пространство есть всюду плотная часть полного и что это полное пространство строится однозначно. Эта мысль может быть выражена так:

Определение. Пусть $f: X \to Y$ – отображение метрических пространств. Назовем его пополнением пространства $X$, если (I) $f$ – изометрия ($\rho(f(x), f(x')) = \rho(x, x')$ для всех $x, x' \in X$); (2) $Y$ полно; (3) $f(X)$ плотно в $Y$.

Теорема I. Пополнение существует. 2. Если $f: X \to Y$ – пополнение, $g: X \to Z$ – изометрия и $Z$ полно, то существует и единственно отображение $h: Y \to Z$ для которого диаграмма коммутативна, то есть $h \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

3. Пополнение единственно в следующем смысле: если $f_1: X \to Y_1$ и $f_2: X \to Y_2$ – пополнения, то существует взаимно-однозначная изометрия, делающая диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[d, shift left] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

Поскольку эта теорема нам почти не понадобится, доказательство будет кратким.

Доказательство. I. Будем называть расстоянием между фундаментальными последовательностями $a = (a_1, a_2, \dots)$ и $b = (b_1, b_2, \dots)$ точек пространства $X$ число $\lim \rho(a_i, b_i)$ (он существует в силу фундаментальности последовательностей $a$ и $b$ и полноты $\mathbb{R}$). Это расстояние удовлетворяет всем аксиомам расстояния, кроме одной: возможно, что $\rho(a, b) = 0$ при $a \neq b$.

Отношение $\rho(a, b) = 0$ есть отношение эквивалентности, и на фактормножестве классов эквивалентности по этому отношению возникает структура метрического пространства, которое мы обозначим $X'$. Это пространство полно (набросок доказательства: пусть $\alpha^1, \alpha^2, \dots$ – фундаментальная последовательность точек $X'$; можно считать, что $\rho(\alpha^i, \alpha^{i+k}) \leq 2^{-i}$ при $k \geq 0$. Выберем в каждом классе $\alpha^i$ по представителю $a^i$. Можно считать, что $\rho(a^i_i, a^i_{i+k}) \leq 2^{-i}$ при $k \geq 0$. Рассмотрим последовательность $a^i_i$. Класс эквивалентности, её содержащий, и будет пределом последовательности $\alpha^i$.)

Пространство $X$ изометрически вкладывается в $X'$: каждому $x \in X$ соответствует последовательность $x, x, \dots$ (точнее, содержащий ее класс). Легко понять, что образ $X$ плотен в $X'$.

2. Пусть $f: X \to Y$ – пополнение, $g: X \to Z$ – изометрическое вложение в полное пространство. Нам надо построить функцию $h: Y \to Z$. На множестве $f(X)$ функция $h$ определятеся однозначно: $h(y) = g(f^{-1}(y))$ и является изометрией. Остается воспользоваться следующей леммой:

Лемма. Пусть $A$, $B$ – метрические пространства, $A$ полно, $A' \subset A$ – всюду плотное множество, $f: A' \to B$ – равномерно непрерывная функция. Тогда существует единственная непрерывная функция $\hat{f}: A \to B$, продолжающая $f$ (совпадающая с $f$ на $A'$). Это продолжение равномерно непрерывно и является изометрией, если была изометрией.

Доказательство леммы. Пусть $a \in A$, $a_1, a_2, \dots$ – последовательность точек $A'$, сходящаяся к $A$. (Такая есть, так как $A'$ всюду плотно.) Если $\hat{f}$ – требуемое, то $\hat{f}(a) = \lim f(a_i)$. Отсюда вытекает единственность. Докажем существование. Так как $a_1, a_2, \dots$ – фундаментальна, а $f$ равномерно непрерывно, то $f(a_1), f(a_2) \dots$ фундаментальна и имеет предел в силу полноты $B$. Этот предел не зависит от выбора последовательности $a_1, a_2, \dots$ Его и надо взять в качестве $\hat{f}(a)$. Получаем искомое продолжение. Утверждение о равномерной непрерывности $\hat{f}$ предоставляется читателю. Если изометрия, то $\rho(\hat{f}(x), \hat{f}(y)) = \lim \rho(f(x_i), f(y_i)) = \lim \rho(x_i, y_i) = \rho(x, y)$ (Здесь $x, y \in A$, $x_i$, $y_i$ – сходящиеся к $x$ и $y$ последовательности точек $A'$.)

3. Третье утверждение теоремы фактически вытекает из двух первых. Пусть $f_1$ и $f_2$ – пополнения. Тогда существуют $h_1$ и $h_2$, делающие диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Y_I \arrow[d, "h_1"] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & Y_I \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \arrow[u, "h_2"'] \end{tikzcd}$$ коммутативными.

Надо доказать, что они взаимно обратны. Это вытекает из коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd} & Y_I \arrow[d, "h_2 \circ h_1"] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_1"'] & Y_I \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & Y_I \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_1"'] & Y_I \end{tikzcd}$$ тождественное

и из утверждения о единственности (п.2).

## Е. Полнота, компактность и полная ограниченность

Теорема. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.

Док-во. Мы знаем, что компактное пространство вполне ограничено. Докажем, что оно полно. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма. Если фундаментальная последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к а, то она сама сходится к а.

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Осталось доказать, что полное вполне ограниченное пространство X компактно.

Определение.[I)] Назовем замкнутое подмножество А пространства X плохим, если не существует конечной части покрытия $\alpha$, покрывающей А.

Лемма. Если А – замкнутое плохое множество, $\varepsilon > 0$, то существует замкнутое плохое подмножество $A' \subset A$, диаметр которого не превосходит $\varepsilon$.

Доказательство. Покроем X конечным числом замкнутых шаров радиуса $\varepsilon/3$. Перееечение одного из них с А и будет искомым.

Согласно предположению (см. сноску) X – плохое. Возьмем плохое замкнутое подмножество $A_I \subset X$ диаметра не более I, затем плохое замкнутое $A_2 \subset A_I$ диаметра не больше I/2 и т.д. Последовательность замкнутых плохих множеств $A_I \supset A_2 \supset \ldots$ со стремящимися к 0 диаметрами имеет общую точку а. Так как $\alpha$ – покрытие, то некоторое открытое множество $\mathcal{U}$ из покрытия $\alpha$ содержит а. Но тогда оно содержит целиком некоторые из $A_K$, что противоречит тому, что $A_K$ – плохие. Полученное противоречие доказывает компактность X.

---

I) Перед определением пропущена фраза: Пусть $\alpha$ – покрытие пространства X, не имеющее конечного подпокрытия.

## Лекция 8. Элементы топологии.

В этой лекции мы не будем стремиться к строгости доказательств и даже к точности формулировок; будет достаточно, если у слушателей возникнет наглядное представление об излагаемом предмете.

### А. Гомеоморфизмы.

Напомним, что отображение $\varphi: X \to Y$ называется гомеоморфизмом, если оно взаимно однозначно и отображения $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ непрерывны. При гомеоморфизме открытым подмножествам пространства $X$ соответствуют открытые подмножества пространства $Y$, поэтому с точки зрения топологии эти пространства неотличимы. Желая дать определение предмета топологии в одной фразе, можно сказать так: топология есть наука, изучающая (топологические) пространства с точностью до гомеоморфизма.

Теорема. Пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфны.

Для доказательства нам потребуется новое понятие – линейная связность.

### Б. Линейная связность.

Назовем путем в пространстве $X$ непрерывную функцию $\gamma: [0,1] \to X$. Точки $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ называются началом и концом пути $\gamma$. Точки $A, B \in X$ назовем линейно связанными, если существует путь с началом в $A$ и концом в $B$. Линейная связанность является отношением эквивалентности (проверьте!), поэтому все пространство разбивается на классы эквивалентности, называемые линейно связными компонентами. Пространство называется линейно связным, если такая компонента одна, то есть если любые две точки линейно связаны.

Лемма. А. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не линейно связно.

Б. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ линейно связно.

Утверждение А вытекает из теоремы о промежуточном значении, утверждение Б очевидно.

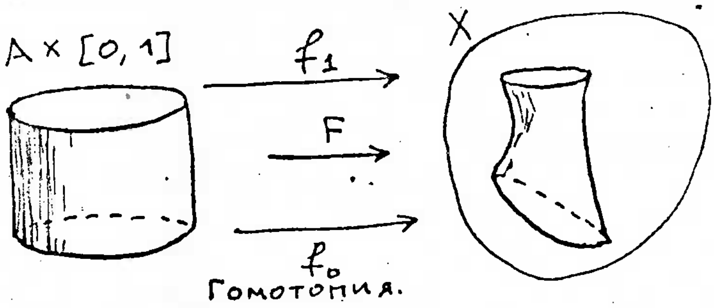
Теперь мы можем дать

Доказательство теоремы п. А. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ – гомеоморфизм, $a \in \mathbb{R}$ – произвольная точка. Тогда $\varphi$ осуществляет гомеоморфизм между $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(a)\}$, что невозможно, так как одно из этих пространств линейно связно, а другое нет. ∎

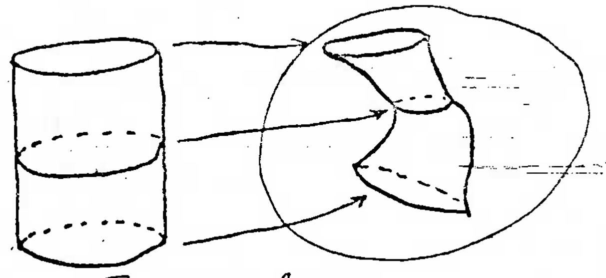
На самом деле $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$, если $m \neq n$; однако доказать это трудно и мы ограничимся случаем $1 \leq m, n \leq 3$. Негомеоморфность $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$ доказывается аналогичным образом; сложнее обстоит дело с негомеоморфностью $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Чтобы доказать ее (даже нестрого), нам понадобится ввести ряд новых важных понятий.

### В. Петли и гомотопия.

Назовем петлей в пространстве $X$ непрерывное отображение $\gamma: S^1 \to X$ (здесь через $S^1$ обозначается одномерная сфера, то есть окружность). Петля называется постоянной, если ее образ состоит из единственной точки $a \in X$. Назовем две петли $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гомотопными, если существует семейство петель $\gamma_t$ $(0 \leq t \leq 1)$, непрерывно меняющихся в зависимости от $t$, соединяющее $\gamma_0$ и $\gamma_1$. Более точно, пусть $A$ – произвольное пространство. Отображения $f_0 : A \to X$ и $f_1 : A \to X$ называются гомотопными, если существует непрерывное отображение $F : [0,1] \times A \to X$, для которого $F(0,a) = f_0(a)$ и $F(1,a) = f_1(a)$ при всех $a \in A$. Это отображение называется гомотопией (между $f_0$ и $f_1$). В случае $A = S^1$ получаем определение гомотопии петель. Нетрудно видеть, что отношение " $f_0$ гомотопно $f_1$ " является отношением эквивалентности.

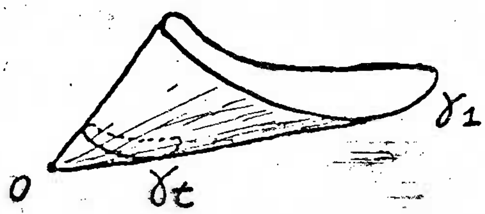


Гомотопия.


Транзитивность.

Петлю назовем стягиваемой, если она гомотопна постоянной. Пространство назовем односвязным, если всякая петля в нем стягиеваема.

Теорема. Пространство $\mathbb{R}^n$ односвязно.




Доказательство. Пусть $\gamma_1$ – любая петля, $\gamma$ – петля, тождественно равная $0$. Тогда семейство

$$\gamma_t : x \longmapsto t \cdot \gamma_1(x)$$

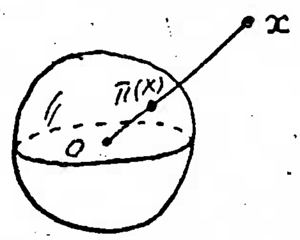
образует гомотопию. ▨

Г. Пространства $S^1, S^2, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

(Через $S^1$ обозначается окружность в $\mathbb{R}^2$, через $S^2$ – сфера в $\mathbb{R}^3$.)

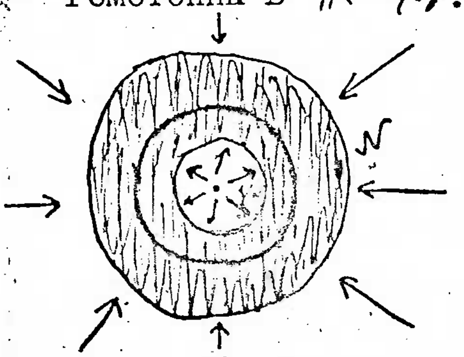
Теорема. 1. Пространства $S^2$ и $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ односвязны.

2. Пространства $S^1$ и $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ не односвязны.




Доказательство. Покажем сначала, что односвязность пространства $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ и односвязность пространства $S^2$ легко следуют друг из друга. Рассмотрим отображение $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow S^2$, проектирующее все точки луча в точку его пересечения со сферой.

Лемма. Пусть $\gamma$ – петля в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Тогда петли $\gamma$ и $\pi \circ \gamma$ гомотопны в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.




Доказательство. Рассмотрим для каждого $N > 1$ отображение $\pi_N : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, совпадающее в области

$$\frac{1}{N} \le \rho(x, 0) \le N$$

с отображением $\pi$, растягивающее шар радиуса $\frac{1}{N}$ и сжимающее внешность шара радиуса $N$ в $N$ раз.

Меняя $N$ от $1$ до достаточно большого числа, получаем семейство петель $\pi_N \circ \gamma$, образующее гомотопию между $\gamma$ и $\pi \circ \gamma$. ▨

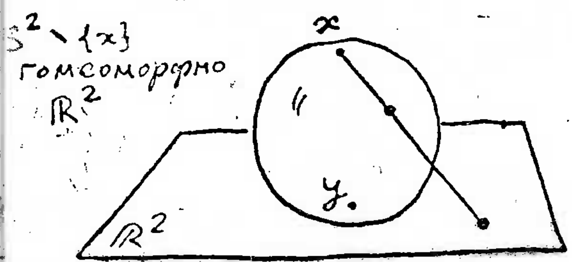
Пусть теперь $S^2$ односвязно, $\gamma$ – петля в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Тогда $\gamma$ гомотопна петле $\pi\circ\gamma$, которая стягиваема в $S^2$, и, значит, в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Значит, $\gamma$ стягиваема. Обратно, пусть $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ односвязно, $\gamma_1$ – петля в $S^2$. Существует гомотопия $\gamma_t$ (в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$) между $\gamma_1$ и постоянной петлей $\gamma_0$. Тогда петли $\pi\circ\gamma_t$ образуют гомотопию (в $S^2$) между $\pi\circ\gamma_1=\gamma_1$ и постоянной петлей $\pi\circ\gamma_0$.

Подобное рассуждение применимо и к пространствам $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ и $S^1$. Теперь осталось доказать односвязность одного из пространств $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ и $S^2$ и неодносвязность одного из пространств $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ и $S^1$. Этому будут посвящены два следующих пункта.

Д. Односвязность $S^2$.

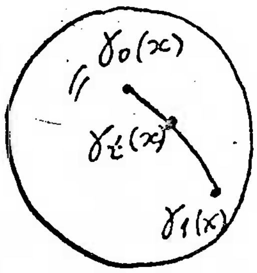
Пусть $\gamma$ – петля в $S^2$. Нам надо доказать, что она стягиваема. Рассмотрим два случая.

I. (Нормальный случай.) Образ $\gamma$ не совпадает с $S^2$. Тогда существует точка $x$, не покрываемая $\gamma$, и можно стянуть нашу петлю по лучам к точке $y$, диаметрально противоположной точке $x$. Иными словами, $\gamma$ лежит в $S^2\setminus\{x\}$ а $S^2\setminus\{x\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, односвязно.



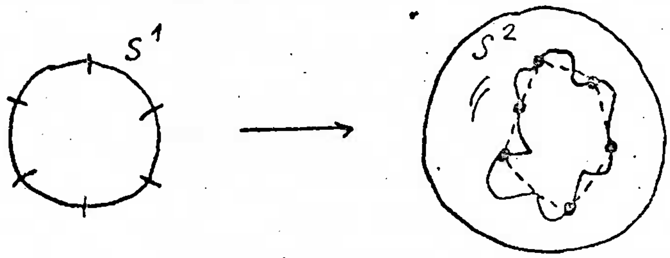

2. (Патологический случай.) Образ $\gamma$ есть $S^2$. В этом случае мы построим петлю, гомотопную $\gamma$ и не покрывающую всей сферы. Тем самым мы сведем дело к предыдущему случаю.

Лемма. Если петли $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на сфере таковы, что ни при каком $x$ точки $\gamma_0(x)$ и $\gamma_1(x)$ не противоположны, то $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гомотопны.



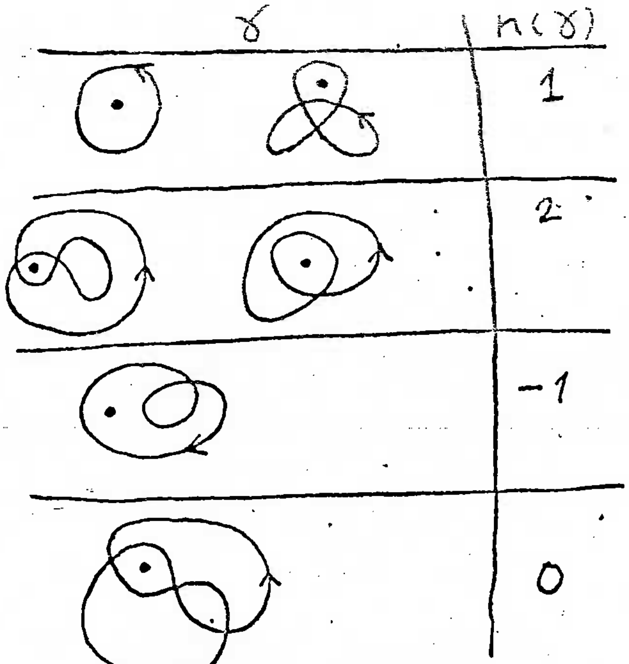

Доказательство. Семейство $\gamma_t$, образующее гомотопию. таково: чтобы найти $\gamma_t(x)$ соединим $\gamma_0(x)$ и $\gamma_1(x)$ кратчайшей дугой большого круга (по предположению таковая единственна) и отложим от $\gamma_0(x)$ часть этой дуги, относящуюся ко всей дуге как $t$ к $1$.

Теперь для каждой петли можно найти близкую к ней, составленную из отрезков больших кругов, разбив окружность на много частей и соединив образы точек деления дугами больших кругов. Остается воспользоваться леммой (близкие точки не могут быть диаметрально противоположны) и тем, что конечное число дуг больших кругов не может покрыть всей сферы. Односвязность $S^2$ доказана.



Е. Неодносвязность $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Каждой петле $\gamma$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ сопоставим целое число $n(\gamma)$ – ее <u>индекс</u> – равное числу оборотов вокруг нуля, совершаемое точкой $\gamma(x)$ в то время как $x$ обходит окружность. Точное определение индекса требует некоторой техники (например, накрытий); мы его давать не будем.




<u>"Теорема"</u>. Если петли $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гомотопны в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то $n(\gamma_0) = n(\gamma_1)$.

<u>"Доказательство"</u>. Пусть $\gamma_t$ – гомотопия. Тогда число $n(\gamma_t)$ меняется (при изменении $t$) непрерывно, оставаясь целым. Значит, оно постоянно. ▨

Так как индекс постоянной петли равен 0, получаем

<u>Следствие 1</u>. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ не односвязно.

В самом деле, любая петля ненулевого индекса не гомотопна постоянной. ▨

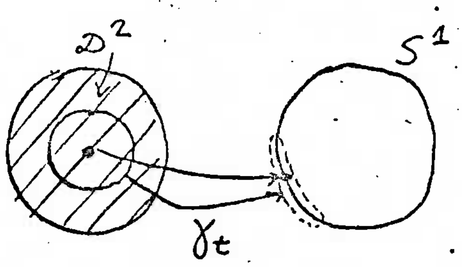
Аналогично выводим

<u>Следствие 2</u>. Тождественное отображение $S^1$ в $S^1$ – петля, не гомотопная постоянной. ▨

Таким образом, мы доказали неодносвязность $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $S^1$. Следовательно, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ не гомеоморфны. Значит, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ также не гомеоморфны.

Опишем теперь еще два приложения введенных нами понятий.

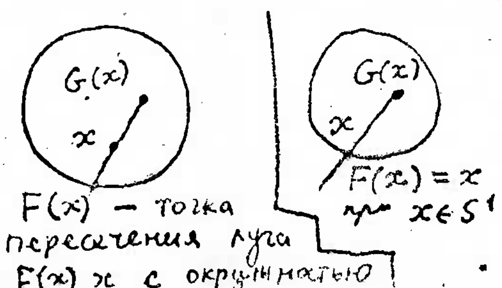
Ж. <u>Теорема Брауэра о неподвижной точке</u>.




<u>Лемма</u>. Не существует непрерывного отображения круга $\mathcal{D}^2$ в его граничную окружность $S^1$, тождественного на границе.

<u>Доказательство</u>. Если $F$ – такое отображение, то семейство петель $\gamma_t : x \mapsto F(tx)$ $(t \in [0,1],\ x \in S^1)$ осуществляет гомотопию между тождественным отображением $S^1$ в себя и постоянной петлей. ▨

<u>Теорема Брауэра</u>. Всякое непрерывное отображение $G$ круга $\mathcal{D}^2$ в себя имеет неподвижную точку (то есть существует $x \in \mathcal{D}^2$, для которого $G(x) = x$ ).

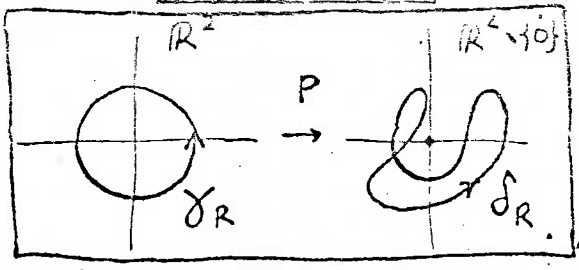



<u>Доказательство.</u> Пусть $G$ – отображение, не имеющее неподвижной точки. Тогда рисунок корректно определяет непрерывное отображение $F$, переводящее $\mathcal{D}^2$ в $S^1$ и тождественное на $S^1$.

### 3. Основная теорема алгебры.

Теорема. Всякий многочлен из $\mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$ имеет корень.

Доказательство. Пусть многочлен $P$ не имеет корня. Тогда его можно рассматривать как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ петлю $\gamma_R$, обходящую вокруг нуля по окружности радиуса $R$. Ее образ $P \circ \gamma_R$ будет петлей в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, которую мы обозначим $\delta_R$. Петля $\gamma_R$ стягиваема, значит, и петля $\delta_R$ стягиваема (применим $P$ к гомотопии). Значит, индекс $n(R)$ петли $\delta_R$ равен 0 (при любом $R$). Чтобы придти к желаемому противоречию, осталось показать, что при больших $R$ индекс $n(R)$ равен степени многочлена $P$ : $n(R) = n$.




Можно считать, что старший коэффициент многочлена равен 1 и он, следовательно, имеет вид: $P(z) = z^n + P_{n-1}(z)$

При больших $|z|$ первое слагаемое доминирует и, в частности, $|P_{n-1}(z)| < |z^n|$. Когда $z$ обходит большую окружность $\gamma_R$, $z^n$ обходит $n$ раз окружность радиуса $R^n$, а $P(z)$ двигается неподалеку и, следовательно, также делает $n$ оборотов вокруг нуля. Более точно, петли $P_t \circ \gamma_R$, где $P_t(z) = z^n + t \cdot P_{n-1}(z)$ образуют гомотопию (в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, так как $|t \cdot P_{n-1}(z)| < |z^n|$ и $P_t(z) \neq 0$ при $|z| = R$) между $\delta_R$ и петлей индекса $n$. Значит, $n(R) = n$ при больших $n$. Противоречие. Основная теорема алгебры доказана.

### Задачи к лекции 8.

1. Гомеоморфны ли пространства $[0,1[$ и $]0,1[$ ?
2. В множестве всех прямых на плоскости, проходящих через 0, можно ввести естественную метрику (угол). Чему гомеоморфно получающееся пространство?
3. Может ли компактное пространство быть гомеоморфно некомпактному? Может ли полное (метрическое) пространство быть гомеоморфным неполному? Может ли вполне ограниченное (метрическое) пространство быть гомеоморфным не вполне ограниченному?
4.* Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ три поверхности: боковую поверхность цилиндра, лист Мебиуса и дважды перекрученную ленту.

(Метрика индуцирована из $\mathbb{R}^3$.) Какие из них гомеоморфны?

5. Всякое линейно связное пространство связно. (Связным называется пространство, которое нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых в нем множеств.) Всякое связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно. Доказать.

6. Пространство называется <u>стягиваемым</u>, если тождественное отображение его в себя гомотопно постоянному. Доказать, что стягиваемое пространство линейно связно и односвязно. Верно ли обратное?

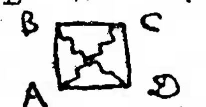
7. Доказать, что любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ (в частности, само $\mathbb{R}^n$ ) стягиваемо (и,следовательно, односвязно).

8. Петля $\gamma : S^1 \to X$ стягиваема тогда и только тогда, когда отображение $\gamma$ продолжается до непрерывного отображения круга $\mathcal{D}^2$ , границей которого является окружность $S^1$.

9. Односвязен ли тор $T^2$ . $S^1 \times S^1$ ? Односвязен ли крендель с двумя дырками?


10.* Для всякого непрерывного отображения $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ существуют диаметрально противоположные точки $a$ и $b$ на сфере, для которых $f(a) = f(b)$ . Доказать.

11.* Верно ли, что любые две петли одинакового индекса в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопны?




12.** Стягиваемо ли пространство $S^2$ ?

13. **Пути в квадрате $ABC\mathcal{D}$ , соединяющие A с C и B с $\mathcal{D}$ , непременно пересекутся. Доказать.**

<u>Книги по топологии</u>


1. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. М.: Мир, 1967
2. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.:Мир, 1972.
3. Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. Гомотопическая топология. М.:Изд-во МГУ, 1969.
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии, М.:Изд-во МГУ, 1980.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.:Наука, 1979.
6. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977,
7. Введение в топологию / Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. М.:Высшая школа, 1980.

## Лекция I0. Нормированные пространства.

### А. Определение и примеры.

Пусть $E$ – линейное (векторное) пространство над полем $\mathbb{R}$. Нормой в $E$ называется функция из $E$ в $\mathbb{R}$, обладающая перечисленными далее свойствами HI – H3; ее значение на векторе $x$ называется нормой вектора $x$ и обозначается $\|x\|$. Свойства нормы.

HI. $\|x\| \geqslant 0$ при всех $x \in E$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

H2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ x \in E)$.

H3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Пространство с введенной на нем нормой называется нормированным. Во всяком нормированном пространстве естественно определяется метрика по формуле:

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Многие из рассмотренных нами метрических пространств как раз получались таким образом.

Примеры. I. Пусть $E = \mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$. Получаем обычную метрику в $\mathbb{R}$.

2. Пусть $E = \mathbb{R}^n$; $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_k |x_k|^2\right)^{1/2}$, $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$. Эти три нормы задают три рассмотренные нами метрики в $\mathbb{R}^n$.

3. Рассмотренная нами в пространстве Огр (X) метрика задается нормой $\|f\| = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$.

4. В пространстве $C([0,1])$ помимо индуцированной из Огр (X) нормы, можно ввести другую норму: $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

### Б. Единичный шар.

Пусть $E$ – нормированное пространство. Рассмотрим в нем множество $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар с центром в 0.

Лемма.I. Множество $B$ выпукло. 2. Пересечение $B$ с каждой прямой, проходящей через 0, – симметричный относительно нуля отрезок.

Подмножество $A$ в линейном пространстве $E$ называется выпуклым, если вместе с любыми точками $x, y \in A$ оно содержит любую точку отрезка $x\,y$, т.е. любую точку вида $\lambda x + \mu y$ $(\lambda, \mu \geqslant 0,\ \lambda + \mu = 1)$.

Док-во леммы. Второе утверждение вытекает из свойства H2. Докажем первое. Если $\|x\|, \|y\| \leq 1$, $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$, то $\|\lambda x + \mu y\| \leq \|\lambda x\| + \|\mu y\| \leq \lambda\|x\| + \mu\|y\| \leq \mu + \lambda = 1$ ч.т.д.

Нетрудно понять, что задание единичного шара позволяет восстановить норму. Именно, $\|x\|$ равна наименьшему числу $t$, для которого $x \in tB$.

Можно проверить, что каждое множество $B$, обладающее указанным в лемме свойством, является единичным шаром некоторой нормы.

### В. Эквивалентность норм.

Две нормы в пространстве $E$ эквивалентны, если задаваемые ими метрики эквивалентны (в них открыты одни и те же множества).

Лемма. Нормы $x \mapsto \|x\|_1$ и $x \mapsto \|x\|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие константы $C_1$ и $C_2 > 0$, что для всех $x \in E$ выполнено неравенство:

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1.$$

Док-во. Если нормы эквивалентны, то открытый шар в одной из них открыт в другой. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что из $\|x\|_1 \leq \varepsilon$ вытекает $\|x\|_2 \leq 1$. Теперь видно, что $\|x\|_2 \leq (1/\varepsilon)\|x\|_1$. В самом деле, $\left\|\varepsilon \cdot \frac{x}{\|x\|_1}\right\|_1 \leq \varepsilon$, поэтому $\left\|\varepsilon \cdot \frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 < 1$. Аналогично $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ для некоторого $C$, откуда и вытекает указанное в лемме неравенство. Одна импликация доказана. Докажем вторую. Поскольку $\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$, то шар радиуса $\varepsilon/C_2$ в первой норме содержится в шаре радиуса $\varepsilon$ во второй норме. Поэтому открытое во второй норме мн-во открыто и в первой. Неравенство $\|x\|_1 \leq C^{-1}\|x\|_2$ показывает, что верно и обратное. Лемма доказана.

Теорема. Любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

Док-во. Достаточно док-ть, что любая норма $x \mapsto \|x\|$ в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна стандартной норме $\|x\|_I$. Пусть $e_I,\dots,e_n$ – стандартный базис: $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\dots,e_k=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Тогда $\|x\| = \left\|\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\| = \|\sum x_i e_i\| \le \sum |x_i|\cdot\|e_i\| \le \left(\max_i \|e_i\|\right)\cdot\|x\|_1$

Поэтому $\|x\| \le C\cdot\|x\|_I$ при некотором $C$. Из этого неравенства вытекает, что функция $x \mapsto \|x\|$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ (по обычной норме) и, значит, достигает минимума на единичной сфере (по стандартной норме), т.к. единичная сфера компактна. Этот минимум $C'$ больше 0 (т.к. равен норме ненулевого вектора). Таким образом из $\|x\|_I = I$ вытекает $\|x\| \ge C'$ и, следовательно, $\|x\| \ge C'\|x\|_I$ для всех $x$. Итак, $C'\|x\|_I \le \|x\| \le C\|x\|_I$, и остается сослаться на лемму.

Следствия. I. Всякое конечномерное нормированное пространство полно.

2. Всякое конечномерное подпространство нормированного пространства замкнуто

Док-во. Заметим, что полнота пространства сохраняется, если заменить норму на эквивалентную (для метрик аналогичное утверждение неверно). В самом деле, из доказанной леммы следует, что все фундаментальные последовательности при эквивалентных нормах одни и те же. Остается воспользоваться полнотой $\mathbb{R}^n$ при обычной метрике.

2. Полное подмножество всегда замкнуто.

Полные нормированные пространства называются банаховыми (в честь создателя функционального анализа польского математика Стефана Банаха).

## Г. Ряды.

Пусть $x_I, x_2, \dots$ – последовательность векторов нормированного пространства. Говорят, что ряд $x_I+x_2+\dots$ сходится, если последовательность частных сумм $S_n = x_I+x_2+\dots+x_n$ имеет предел. Этот предел называется суммой ряда. Говорят, что ряд $x_I+x_2+\dots$ нормально (или абсолютно) сходится, если ряд $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$ сходится в $\mathbb{R}$ (этот ряд состоит из положительных чисел, и его сходимость эквивалентна ограниченности частных сумм).

Теорема I. В банаховом пространстве всякий нормально сходящийся ряд сходится

2. Сумма нормально сходящегося ряда не меняется при перестановке его членов.

/Заметим, что нормально сходящийся ряд остается нормально сходящимся после перестановки его членов: если частные суммы ряда из норм были ограничены, то они и останутся ограниченными./

Док-во. Каждому конечному множеству $S$ натуральных чисел сопоставим вектор $\sigma(S) = \sum_{k\in S} x_k$. Очевидно, $\|\sigma(S)\| \le \sum_{k\in S}\|x_k\|$ ; правую часть обозначим $\tau(S)$. Если $S\subset S'$, то $\|\sigma(S)-\sigma(S')\| = \|\sigma(S'\setminus S)\| \le \tau(S'\setminus S)$.

Поэтому если $S$ настолько велико, что $\tau(S)$ близко к сумме ряда $\sum\|x_i\|$, то $\|\sigma(S')-\sigma(S)\|$ будет мало для всех $S'$, содержащих $S$. Отсюда следует фундаментальность последовательности частных сумм нормально сходящегося ряда (в качестве $S'$ и $S$ берутся начальные отрезки натурального ряда разной длины). Утверждение I доказано. Пусть $x$ и $y$ – суммы нормально сходящегося ряда до и после перестановки членов, и $\varepsilon = \|x - y\| > 0$. Возьмем $S$ таким, чтобы $\tau(S)$ отличалось от $\sum\|x_i\|$ не более, чем на $\varepsilon/3$. Тогда $\sigma(S)$ будет отличаться от $x$ и $y$ не более чем на $\varepsilon/3$. Полученное противоречие доказывает теорему.

## Д. Пространства $L(X,Y)$ и $X^*$

Пусть $X$ и $Y$ – нормированные пространства, $A: X \to Y$ – линейный оператор.

Лемма. Следующие свойства равносильны:

(I) A непрерывен всюду; (2) A непрерывен в 0; (3) A ограничен на единичном шаре в X.

Док-во. Если $\|Ax\|_Y \le C$ при $\|x\|_X \le 1$, то $\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$ для любого x (ибо $\|A(x/\|x\|_X)\|_Y \le C$) и A непрерывен. Если A непрерывен, то A непрерывен в 0. Если же A непрерывен в 0, то $\exists$ такое $\varepsilon$, что из $\|x\|_X \le \varepsilon$ вытекает $\|Ax\|_Y \le 1$. Тогда $\|Ax\|_Y \le (1/\varepsilon)\|x\|_X$ и A ограничен на единичном шаре.

Операторы, обладающие указанными свойствами, наз. непрерывными (или ограниченными). Такие операторы образуют подпространство в пространстве всех линейных операторов из X в У. Оно обозначается $L(X,Y)$. Если X и Y конечномерны, то любой конечномерный оператор непрерывен (для стандартной нормы очевидно, а все нормы эквивалентны). Линейные операторы из X в $\mathbb{R}$ называются также линейными функционалами на X; пространство непрерывных линейных функционалов на X обозначается $X'$.

Пространство $L(X,Y)$ можно сделать нормированным, объявив нормой оператора число $\sup\{\|Ax\|_Y \mid \|x\|_X \le 1\}$, то есть наименьшее число C, для которого неравенство $\|Ax\| \le C\|x\|$ выполнено при всех x. Иными словами, в неравенстве $\|Ax\|_Y \le \|A\|_{L(X,Y)} \cdot \|x\|_X$ нельзя заменить $\|A\|_{L(X,Y)}$ ни на какую меньшую константу. В частности, нормированным становится пространство $E' = L(X,\mathbb{R})$.

Задачи к лекции 10.

1.* При каких p функция $\|x\| = \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p}$ является нормой ?

2. Доказать, что единичный шар бесконечномерного нормированного пространства не компактен.

3. Построить три попарно неэквивалентные нормы в одном и том же пространстве.

4. Построить пример неполного пространства. Определить понятие пополнения нормированного пространства.

5.* Построить две неэквивалентные нормы в пространстве, так, чтобы относительно любой из них оно было полно.

6. Привести пример незамкнутого подпространства.

7. Если ряд $x_1+x_2+\dots$ сходится, то последовательность векторов $x_1, x_2, \dots$ сходится к нулю.

8. Доказать, что если в $\mathbb{R}$ ряд сходится, но не нормально сходится, можно переставить его члены так, чтобы он перестал сходиться, а также так, чтобы он стал сходиться к любому заданному числу. (Теорема Римана)

9. Построить ряд, который сходился бы к одному и тому же вектору, как ни переставлять его члены, но не сходится нормально.

10. Если линейный оператор $A: X \to Y$ непрерывен хотя бы в одной точке, то он непрерывен всюду.

11. Линейный функционал непрерывен $\Leftrightarrow$ его ядро замкнуто.

12. Если пространство У полно, то и пространство $L(X,Y)$ полно.

13. Отождествить $L(\mathbb{R}, E)$ с E. Что при этом происходит с нормой ?

14. Привести пример разрывного линейного оператора.

15. Какая норма возникает в $(\mathbb{R}^n)'$, если в $\mathbb{R}^n$ выбрать нормы $\|\,\|_1$, $\|\,\|_2$ и $\|\,\|_\infty$

16. Как по матрице оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вычислить его норму ? (Рассмотреть различные варианты выбора норм в $\mathbb{R}^n$).

Наша цель – познакомиться с такими понятиями: многообразие, касательное пространство, функция, дифференциал, векторное поле, дифференциальная форма, интеграл. Мы попробуем сделать это, не стремясь к строгим доказательствам (а порой, даже, к точности формулировок); быть может, пренебрежение к деталям позволит яснее увидеть общую картину.

Попытки нестрогого изложения часто вызывают раздражение у слушателей. Но, как мне кажется, причиной его является не отсутствие строгости, а

1) претензии на полноту доказательств и точность формулировок, лишенные основания;
2) отсутствие ясности в вопросе о том, какого рода объекты рассматриваются. (Например, употребление без объяснений символов $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$).

## АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ (Лекция I)

### Дифференциальное исчисление

А. Производные функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.
Напомним определение: производной функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$ называется число $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Чтобы обобщить это определение переформулируем его: число с наз. производной функции $f$ в точке a, если $f(a+h) = f(a) + ch + o(h)$, где $o(h)$ – некоторая функция, для которой $|o(h)|/|h| \to 0$ при $h \to 0$. /Обозначание $o(h)$ – стандартное для таких функций./ То, что это определение эквивалентно исходному, легко проверить.

Таким образом, суть этого определения состоит в приближении функции $f$ (в окрестности точки a) с помощью другой аффинной функции[I]: $f(a+h) \approx f(a) + c\cdot h$ при малых $h$. (См.рис.I.)

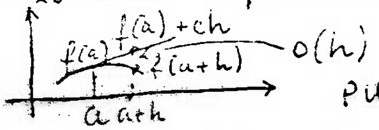


рис. 1.

### Б. Общее определение производной

Пусть X, У – нормированные пространства; $f$ – функция определенная на открытом подмножестве $U$ пространства X со значениями в У, $a \in X$.

Определение. Линейный непрерывный оператор C: X → У называется производной функции $f$ в точке a, если $f(a+h) = f(a) + Ch + o(h)$, где $\|o(h)\|_Y / \|h\|_X \to 0$ при $\|h\|_X \to 0$.

Это определение дано для общего случая, хотя мы будем рассматривать по большей части конечномерные пространства; в них все нормы эквивалентны, а все операторы непрерывны.

Если функция имеет производную в точке a, то она наз. дифференцируемой. Производная в a определяется значениями функции в окрестности точки a – является "локальной"характеристикой функции. Чтобы имел смысл вопрос о дифференцируемости $f$ в a, нужно, чтобы область определения $f$ была открытым множеством, содержащим a (т.е. содержала a вместе с некоторым шаром).

Лемма. I. Если $f$ дифференцируема в a, то $f$ непрерывна в a.
2. Производная данной функции в данной точке, если она существует, определена однозначно.

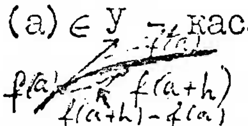
Док-во пункта 2. Если $C_I$ и $C_2$ – две производные, то $\|C_1 h - C_2 h\| = o(h)$; положив $h = t\cdot h_0$ ($t \in \mathbb{R}$, $h_0$ – вектор в X), имеем $t\,\|C_1 h_0 - C_2 h_0\| = o(t)$, откуда

I) Мы называем функцию $x \mapsto Ax + B$ аффинной (а не линейной, как в школе), чтобы не путать ее с линейными операторами $x \mapsto Ax$.

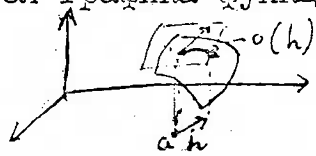
$c_I h_0 = c_2 h_0$. Пункт I прост и предоставляется слушателям. Производная функции $f$ в точке а обозначается $f'(a)$.

В. Примеры.

Случай $X = Y = \mathbb{R}$ мы разобрали в самом начале. Пусть теперь $X = \mathbb{R}$, $Y$ – любое. Производная в этом случае представляет собой линейный оператор из $\mathbb{R}$ в $Y$. Всякий такой оператор имеет вид $x \mapsto xy$, где $y$ – некоторый вектор из $Y$ (почему?). Отождествляя $L(\mathbb{R}, Y)$ с $Y$, мы получим, что производная функции в точке представляет собой вектор из $Y$; его, как легко видеть, можно найти по обычной формуле: $f'(a) = \lim\limits_{|h|\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (здесь $h \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, левая и правая части формулы – векторы из $Y$). Функцию из $\mathbb{R}$ в $Y$ можно представить себе как кривую в $Y$, а $f'(a) \in Y$ – касательный вектор к этой кривой в точке $a \in \mathbb{R}$ (см.рис.)




Пусть теперь $Y = \mathbb{R}$. Тогда производная – линейный функционал $\eta$ на $X$, для которого $f(a+h) = f(a) + \eta(h) + o(h)$. График функции $a + h \mapsto f(a) + \eta(h)$ – гиперплоскость (в $X \oplus \mathbb{R}$), касающаяся графика функции $f$ в точке а (см.рис.)




Г. Частные производные и матрица Якоби.

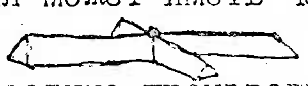
Пусть $X = \mathbb{R}^M$, $Y = \mathbb{R}^\Pi$. Тогда производная представляет собой линейный оператор из $\mathbb{R}^M$ в $\mathbb{R}^\Pi$ и задается матрицей из м столбцов и п строк, в которой стоят м×п действительных чисел. Как найти эти числа? Оказывается, для этого не нужно ничего, кроме умения дифференцировать функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Лемма. Пусть $f: (x_I, \ldots, x_M) \mapsto (f_I(x_I, \ldots, x_M), \ldots, f_\Pi(x_I, \ldots, x_M))$ – функция из $\mathbb{R}^M$ в $\mathbb{R}^\Pi$, имеющая производную $C$ в точке $a = (a_I, a_2, \ldots, a_M)$. Тогда элемент $c_{ij}$ матрицы оператора $C$, стоящий в $i$-ой строке и $j$-ом столбце, равен производной функции $t \mapsto f_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_m)$ в точке а (эта функция действует из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, и производная представляет собой число).

Док-во. По определению $f(a+h) \approx f(a) + Ch$; переходя к $i$-ым координатам, имеем $f_i(a+h) = f_i(a) + \Sigma c_{ij} h_j$; взяв в качестве $h$ вектор, все координаты которого, кроме $j$-ой, равны 0, имеем: $f_i(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \ldots) \approx f(a_1, \ldots, a_j, \ldots) + c_{ij} h_j$, откуда и вытекает требуемое. (Аккуратное рассуждение с $o(h)$ провести нетрудно; я советую это сделать всем сомневающимся в утверждении леммы.)

Если $f$ – функция из $\mathbb{R}^\Pi$ в $Y$, то производная функции из $\mathbb{R}$ в $Y$, определенной формулой $t \mapsto f(a_I, \ldots, a_{j-I}, t, a_{j+I}, \ldots, a_n)$, в точке $a_j$ наз. $j$-ой частной производной функции $f$ в точке $a = (a_I, \ldots, a_\Pi)$ и обозначается $\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ (если аргументы $f$ обозначаются $x_I, \ldots, x_\Pi$) или $f_j'(a)$. Это – вектор из $Y$. Таким образом, лемма утверждает, что если функция дифференцируема, то существуют и частные производные и $c_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$.

Обратное неверно: функция может иметь частные производные, но не быть дифференцируемой.



Но если функция имееет частные производные не только в данной точке, но и в ее окрестности, причем они непрерывно зависят от точки, в которой они вычисляются, то можно доказать, что функция дифференцируема. Доказательство этого факта несложно, но использует так называемую "теорему о конечном приращении", поэтому мы его опустим.

С помощью этого факта доказательство дифференцируемости функций из $\mathbb{R}^M$ в $\mathbb{R}^\Pi$ часто удается свести к рассмотрению функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

## Д. Производная сложной функции

Пусть X, Y, Z – нормированные пространства, $f: X \to Y$ дифференцируема в точке a, а $g: Y \to Z$ дифференцируема в точке $b = f(a)$.

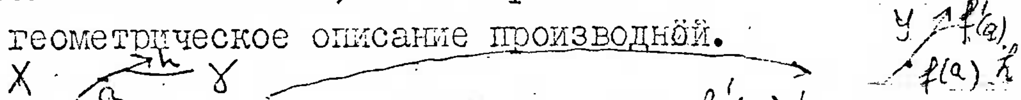
Теорема. Функция $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ дифференцируема в точке a и $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\circ f'(a)$ /слева стоит оператор из X в Z, а справа – композиция операторов из X в Y и из Y в Z/.

Док-во. Если $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\cdot h$, а $g(f(b)+k) \approx g(f(b)) + g'(b)\cdot k$, то

$$g(f(a+h)) \approx g(f(a) + f'(a)h) \approx g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)\cdot h$$

(Аккуратное проведение этого рассуждения несложно; если ощущается потребность в этом, советую сделать самому. Также нетрудно сформулировать теорему для функций, определенных не на всем X и на всем Y, а в окрестностях точек a и b.)

Эта теорема позволяет дать геометрическое описание производной.



Пусть $f: X \to Y$ – дифференцируемая функция, $a \in X$. Чтобы найти $f'(a)h$ для некоторого $h \in X$, поступаем так: рассматриваем какую-нибудь кривую $\gamma: \mathbb{R} \to X$, для которой $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = h$; затем рассматриваем кривую $f\circ\gamma: \mathbb{R} \to Y$ и находим касательный вектор к ней в 0 – это и будет $f'(a)h$. (В самом деле, $(f\circ\gamma)'(0) = f'(\gamma(0))\cdot\gamma'(0) = f'(a)\cdot h$). Взяв в равенстве в качестве $\gamma$ прямую $\gamma(t) = a + ht$, получим, что $f'(a)h = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t}$.

Правая часть этого равенства называется производной вдоль вектора $h$, она может существовать и в том случае, когда $f'(a)$ не существует. Даже если она существует при всех $h$ и линейно зависит от $h$, функция $f$ может не быть дифференцируемой в точке a.

## Е. Таблица производных.

I. Если $f(x) = Ax + b$ /A – линейный оператор из X в Y, $b \in Y$/, то $f'(a) = A$.

Функция "сложение" $\Sigma: X \times X \to X$, сопоставляющая паре векторов $\langle x_1, x_2\rangle$ вектор $x_1 + x_2$, линейна поэтому ее производная равна ей самой. Отсюда и из теоремы о сложной функции вытекает, что $(f_1 + f_2)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a)$.

3. Пусть $\langle x,y\rangle \mapsto B(x,y)$ – билинейная функция из X x Y в Z. Тогда $B'(x,y)(h,k) = B(x,k) + B(y,h)$. В самом деле, $B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$, а $B(h,k) = o(\langle h,k\rangle)$. Отсюда и из теоремы о производной сложной функции получаем, что $[x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))]'(a)h = B(f_1(a), f_2'(a)h) + B(f_1'(a)h, f_2(a))$

Частным случаем этой формулы является правило дифференцирования произведения $(fg)' = f'g + fg'$

## Ж. Экстремум.

Как и для функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, можно использовать понятие производной для отыскания экстремумов, применяя следующее очевидное

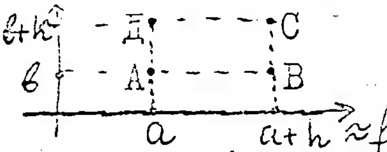
Свойство: Если $a \in X$ – экстремум функции $f: X \to \mathbb{R}$, то $f'(a) = 0$. На практике (при $X = \mathbb{R}^n$) это означает, что надо решать систему из n уравнений с n неизвестными: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$

## З. Высшие производные и гладкие функции.

Пусть функция $f$ определена и дифференцируема во всех точках открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ и принимает значения в пространстве Y. Рассмотрим функцию $f': x \mapsto f'(x)$ из $\mathcal{U}$ в $Y_1 = L(X,Y)$. Если она снова дифференцируема во всех точках $\mathcal{U}$, то можно сделать еще один шаг и рассмотреть функцию $f'': x \mapsto (f')'(x)$

И так далее. Если этот процесс можно продолжать неограниченное количество раз то функция $f$ наз. гладкой в $\mathcal{U}$. Множество гладких в $\mathcal{U}$ функций обозначается $C^\infty(\mathcal{U})$. Это – линейное пространство, однако естественные топологии в нем не задаются никакой нормой.

В координатах, при $X = \mathbb{R}^n$, мы получаем сначала набор из n частных производных первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$;
затем набор из $n^2$ частных производных второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$,
затем набор из $n^3$ производных третьего порядка и т.д. Оказывается (для гладких функций), что частные производные не изменяются, если изменить порядок дифференцирования: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j}$ и т.д.
Мы ограничимся нестрогим пояснением этого факта на примере функций $f$ из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

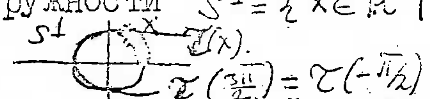



Выражение $W = f(A) + f(C) - f(B) - f(Д)$ можно записать двояко: $W = (f(C) - f(B)) - (f(Д) - f(A)) \approx f'_2(B)\cdot k - f'_2(A)\cdot k \approx (f'_2)'_1(A)\cdot kh$ и, аналогично, $W \approx (f'_1)'_2(A)\,kh$, откуда $f''_{12} = f''_{21}$

## Лекция 2. ПОДМНОГООБРАЗИЯ В $\mathbb{R}^n$.

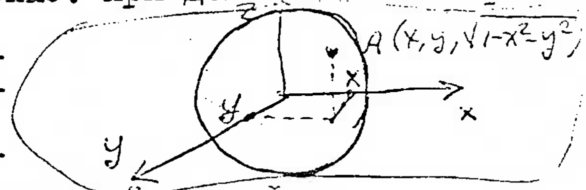
### А. Постановка задачи.

Мы определили понятие гладкой функции на открытом подмножестве нормированного пространства. Мы хотим обобщить это определение и, в частности, дать определение гладкой функции на окружности $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ и сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$

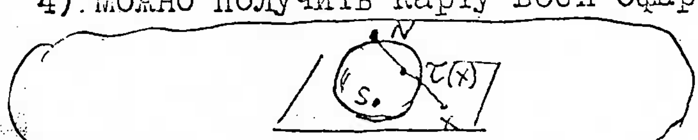




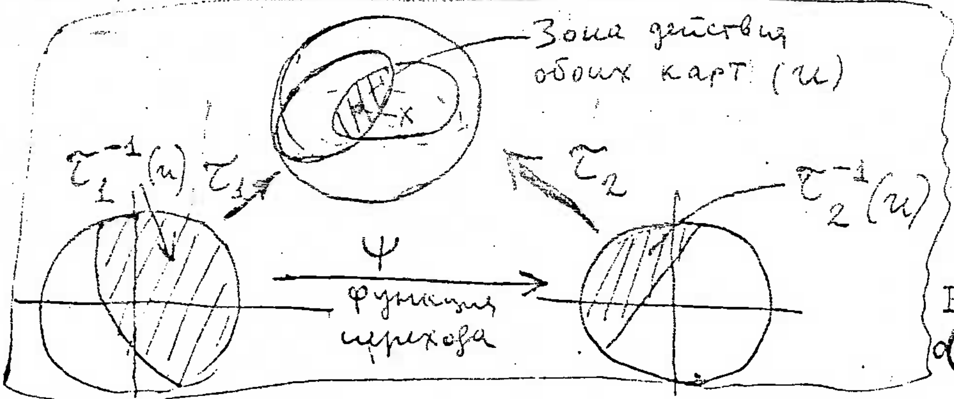
Попытаемся дать разумное определение гладкой функции из $S^1$ (со значениями в нормированном пространстве). Для этого введем "угловую координату", рассмотрев отображение $\tau : \mathbb{R} \to S^1$, сопоставляющее числу x конец дуги длины x. Функцию $f : S^1 \to Y$ назовем гладкой, если композиция $f \circ \tau$ – гладкое отображение из $\mathbb{R}$ в $Y$.
На сфере дело обстоит сложнее, т.к. ввести координату на всей сфере трудно. Но это и не нужно: желая определить дифференцируемость в точке x, мы должны интересоваться лишь поведением функции в некоторой окрестности т.х.
Какие координаты можно ввести на сфере? Разные. Приведем несколько примеров. 1) В (открытой) верхней полусфере можно считать координатами числа x и y. Точнее, рассмотрим функцию $\tau$, сопоставляющую каждой точке $\langle x, y \rangle$ открытого круга на плоскости точку $\langle x, y, \sqrt{1-x^2-y^2} \rangle$ на верхней полусфере. (Это – гомеоморфизм). Функцию $\tau$ можно назвать картой верхней полусферы.




2) Поставив знак – перед $\sqrt{1-x^2-y^2}$, получим карту нижней полусферы.
3) Подобным образом можно получить карты правой полусферы, левой полусферы и т.д.
4). Можно получить карту всей сферы, кроме одной точки, рассмотрев стереографическую проекцию. (Мы уже рассматривали ее, говоря о гомеоморфности $S^2 \setminus \{N\}$ и $\mathbb{R}^2$).




5),6)... Возьмите любой географический атлас и найдите дальнейшие примеры карт (на сфере).
С помощью любой из упомянутых карт, покрывающей точку $x \in S^2$, можно определить понятие гладкой (в окрестности x) функции $f : S^2 \to Y$, потребовав, чтобы функция $f \circ \tau$ ($\tau$ – выбранная карта) была гладкой в окрестности точки $\tau^{-1}(x)$
Гладкой функцией на сфере назовем функцию, гладкую в окрестности каждой точки сферы.
Зависит ли понятие гладкости от выбора карты? Для приведенных примеров карт – нет, т.к. "функции перехода", сопоставляющие координаты точки в одной карте координаты той же точки в другой карте – гладкие (проверьте!)




$\psi : \tau_1^{-1}(u) \to \tau_2^{-1}(u)$, $\psi(x) = \tau_2^{-1}(\tau_1(x))$ – взаимно однозначная и гладкая в оба стороны (такие функции называются диффеоморфизмами). В самом деле, $f\circ\tau_2 = (f\circ\tau_1)\circ(\tau_1^{-1}\circ\tau_2)$, а композиция гладких функций – гладкая.

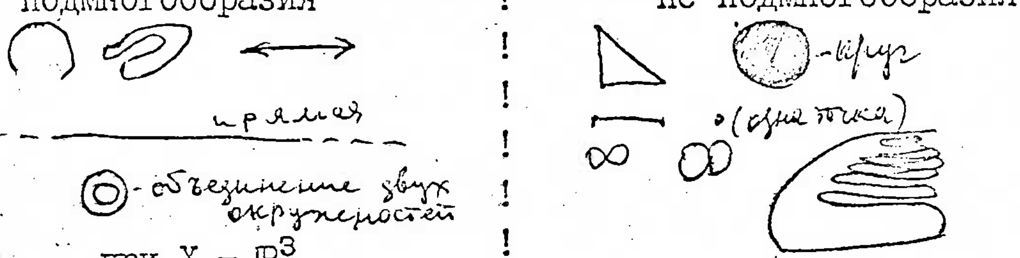
Итак, мы определили гладкость функций на окружности и сфере. Теперь мы попробуем дать общее определение, частным случаем которого окажутся рассмотренные примеры.

### Б. Подмногообразия.

Пусть X – п-мерное нормированное пространство. $A \subset X$. Мы хотим определить, в каком случае A называется к-мерным подмногообразием X. ($к \le п$) Начнем с примеров. (По размерности). –Имея эти примеры, нетрудно придумать согласованное с ними определение: график гладкой функции из $\mathbb{R}^к$ в $\mathbb{R}^{п-к}$ является к-мерным подмногообразием; кроме того к-мерным подмногообразием является все то, что локально является таким графиком. (точное определение см. ниже.)

1) При к = п это – открытые подмножества X. 2) Пусть $X = \mathbb{R}^2$, к = I

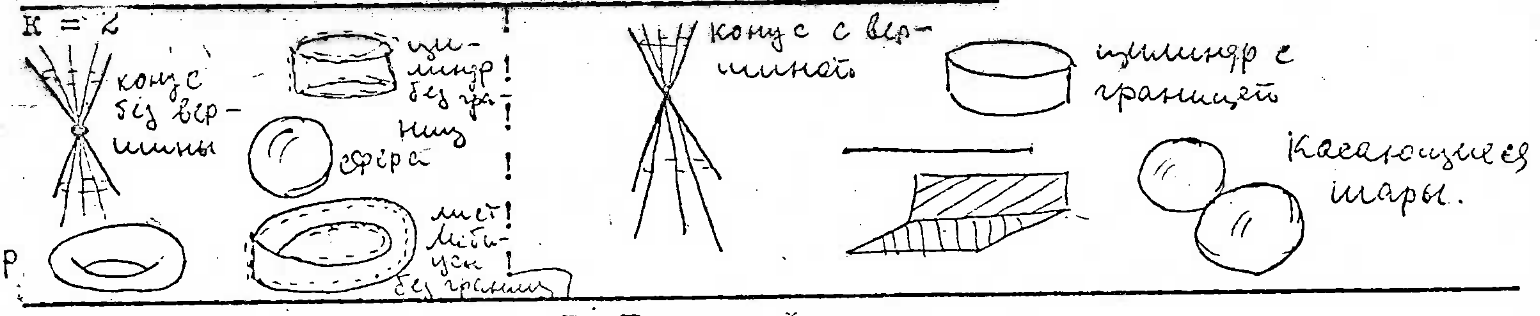
подмногообразия ! не подмногообразия




при $X = \mathbb{R}^3$

к = I

к = 2



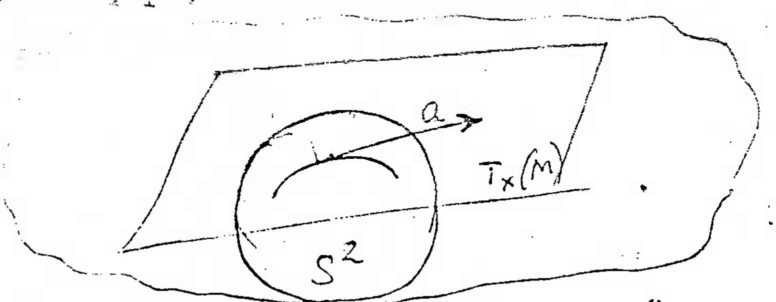

### В. Гладкие функции

Чтобы определить понятие гладкой функции на подмногообразии, надо ввести понятие карты: Именно, картой на к-мерном подмногообразии[x)] $M^к \subset \mathbb{R}^п$ называется гомеоморфизм $\tau: U \to V$ между некоторым открытым подмножеством $U \subset \mathbb{R}^к$ и открытым подмножеством $V \subset M^к$, удовлетворяющий некоторым условиям. Именно, I) $\tau$ должно быть гладким, (как отображение $U$ в $\mathbb{R}^п$); 2) $\forall\ x \in U$ линейный оператор $\tau'(x): \mathbb{R}^к \to \mathbb{R}^п$ должен быть вложением (иметь нулевое ядро). Второе требование нужно для того, чтобы гарантировать "гладкость" $\tau^{-I}$ (хотя что это, мы пока не знаем). Оно запрещает, например, рассматривать в качестве карты на $]-8,8[$ отображение $\tau: ]-2,2[ \to ]-8,8[$, переводящее x в $x^3$ ($\tau'(0)=0$).

Этих требований достаточно, чтобы обеспечить гладкость функций перехода от одной карты к другой. (Доказательство этого факта использует теорему об обратной функции, о которой еще будет идти речь.) Тем самым мы получаем корректное определение гладкой функции на произвольном многообразии $M^к$ конечномерного нормированного пространства X со значениями в нормированном пространстве У. Если $M^к$ – открытое подмножество в X (при к = dim X), то новое определение, очевидно, совпадает со старым: можно рассматривать тождественную карту на $M^к$

## Г. Производная (постановка задачи).

Мы находимся сейчас в странном положении – знаем, что такое гладкая функция на сфере, но не знаем точно, что такое ее производная. Производная, без сомнений, есть линейное отображение, но отображение чего?




Ответ: производная функции $f$ в точке x ($f: S^2 \to Y$) есть линейное отображение из $T_x(S^2)$ в $Y$, где $T_x(S^2)$ – касательная плоскость к сфере в т. x.

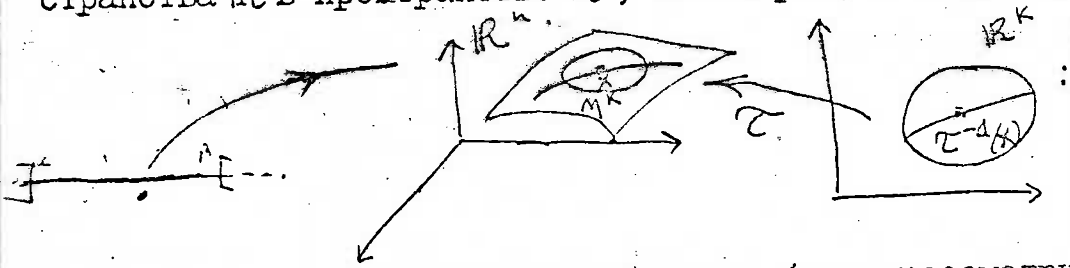
Как вычислить значение производной на векторе a, касательном к $S^2$ в точке x? Надо рассмотреть гладкую кривую $\gamma: \mathbb{R} \to S^2$ (гладкую, как отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$), для которой $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = a$, затем рассмотреть кривую $f \circ \gamma$ в $Y$ и продифференцировать ее в 0, (получив искомый вектор в $Y$: $f'(x): a \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$.

Возникают разные вопросы. Можно ли найти такую кривую? Будет ли $f \circ \gamma$ гладким? Не зависит ли результат от выбора кривой? Кроме того, если мы хотим рассматривать произвольное многообразие (а не сферу), что такое касательная плоскость (прямая, пространство)?

На все эти вопросы мы попытаемся дать удовлетворительные ответы.

## Д. Касательное пространство.

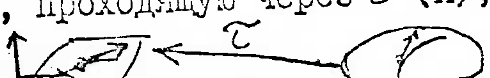
Определим сначала понятие гладкой кривой на подмногообразии $M^k \subset \mathbb{R}^n$. Это – гладкое отображение интервала $]\alpha, \beta[$ в $\mathbb{R}^n$. Гладкость можно понимать двояко: во-первых, как гладкость отображения открытого подмножества $]\alpha, \beta[$ пространства $\mathbb{R}$ в пространство $\mathbb{R}^n$; во-вторых, в терминах карт, то есть как гладкость отображения $\tau^{-1} \circ \gamma: ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}^k$. На самом деле это одно и то же – вопрос об этом, как и все вопросы обоснования, мы пока отложим.




Пусть x – точка подмногоообразия; будем рассматривать кривые, проходящие точку x в нуле: $\gamma(0) = x$. Будем говорить, что две кривые касаются (в нуле), если $\gamma_1'(0)$ и $\gamma_2'(0)$ совпадают (как векторы в $\mathbb{R}^n$). Другое (но на самом деле эквивалентное) определение таково: $\gamma_1$ и $\gamma_2$ касаются, если для некоторой (и тогда для любой) карты $\tau$ кривые $\tau^{-1} \circ \gamma_1$ и $\tau^{-1} \gamma_2$ имеют равные производные в 0 (равные как векторы в $\mathbb{R}^k$). Отношение "$\gamma_1$ касается $\gamma_2$" разбивает множество всех кривых, проходящих через x, на классы эквивалентности. Эти классы называются касательными векторами к $M^k$ в точке x, их множество наз. касательным пространством к $M^k$ в x и обозначается $T_x(M^k)$ /tangential – касательный/.

Замечание. 1. Можно отождествить $T_x(M^k)$ с некоторым множеством векторов из $\mathbb{R}^n$, сопоставив классу Г касающихся кривых вектор $\gamma'(0)$ (общий для всех $\gamma \in Г$). Таким образом устанавливается взаимнооднозначное соответствие между $T_x(M^k)$ и некоторой частью $\mathbb{R}^n$. Что это за часть? Мы скоро увидим, что это – k-мерные подпространства $\mathbb{R}^n$.

2. Выбрав карту $\tau$, покрывающую точку x, можно установить также соответствие между элементом $T_x(M^k)$ и векторами из $\mathbb{R}^k$, сопоставив кривой $\gamma$ вектор $(\tau^{-1} \circ \gamma)'(0)$. При этом любой вектор из $\mathbb{R}^k$ соответствует некоторой кривой, т.к. любую кривую в $\mathbb{R}^k$, проходящую через $\tau^{-1}(x)$, можно перенести с помощью $\tau$ на $M^k$

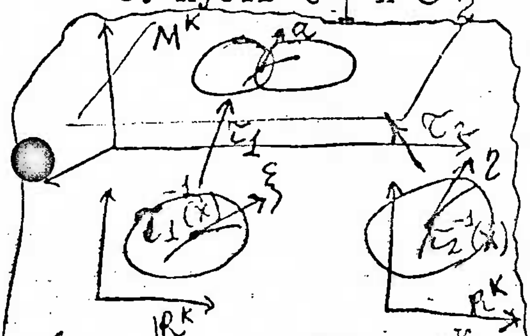


Таким образом, мы получаем взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{R}^k$ и $T_x(M)$ с его помощью структура векторного пространства переносится из $\mathbb{R}^k$ в $T_x(M)$. Результат этого перенесения не зависит на самом деле от выбора карты, и $T_x(M)$ становится веторным пространством размерности к.

3. Эта же конструкция позволяет понять, какое подмножество соответствует $T_x(M)$ в $\mathbb{R}^n$. Именно, это образ $\mathbb{R}^k$ при линейном отображении $\tau'(\tau^{-1}(x))$. По определению карты $\tau'(\tau^{-1}(x))$ является вложением, поэтому образ – к-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$.

4. Терминология такова: если $\tau$ – карта, покрывающая х, $a \in T_x(M^k)$, $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ – вектор $\mathbb{R}^k$, соответствующий а (в карте $\tau$), то числа $a^1, \ldots, a^k$ называются координатами касательного вектора а в карте $\tau$. Чтобы сложить два вектора в любой карте, надо сложить их координаты.

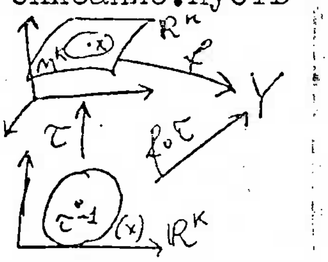
5. Пусть $\tau_1$ и $\tau_2$ – две различные карты, покрывающие точку х. Как связаны координаты вектора а в картах $\tau_1$ и $\tau_2$? Очевидно, $\eta = (\tau_2^{-1} \circ \tau_1)' \xi$ или, в терминах частных производных $\eta^i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y^i}{\partial z^j} \xi^j$ (здесь $\eta^i$ и $\xi^j$ – $i$-ая и $j$ – ая координаты векторов $\eta$ и $\xi$, координаты "в одном" $\mathbb{R}^k$ откуда действует $\tau_1$) обозначены $z^1, \ldots, z^k$, во втором – $y^1, \ldots, y^k$; $\langle z^1, \ldots, z^k \rangle \mapsto \langle y^1(z^1, \ldots, z^k), y^2(z^1, \ldots, z^k), \ldots y^k(z^1, \ldots, z^k) \rangle$ функция перехода $(= \tau_2^{-1} \circ \tau_1)$, $\frac{\partial y^i}{\partial z^j}$ – частная производная (вычисляемая в точке $\tau_1^{-1}(x)$)




$\xi$ и $\eta$ – векторы в $\mathbb{R}^k$, соответствующие а в картах $\tau_1$ и $\tau_2$.

## Е. Производная

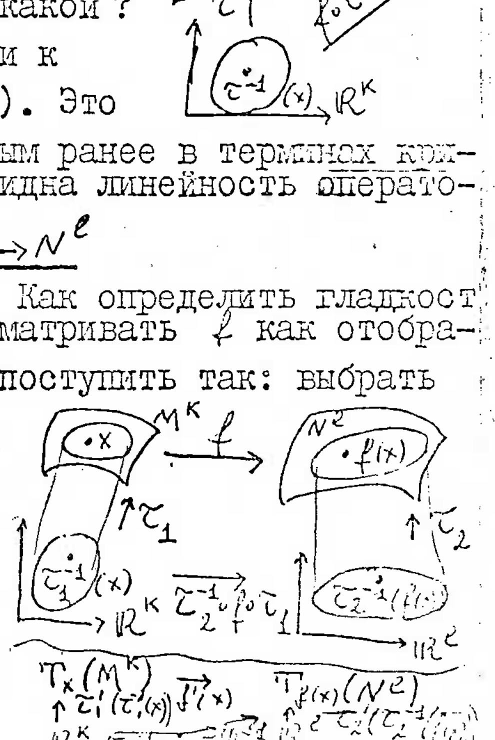
Теперь уже можно определить понятие производной гладкой функции $f: M^k \subset X \to Y$ в точке $x \in M^k$. Это – линейное отображение из $T_x(M)$ в У. Его можно описать с помощью кривых на М (ср.п.Г). Мы дадим сейчас другое описание. Пусть $\tau$ – карта, покрывающая точку х. Тогда $\tau'(\tau^{-1}(x))$ осуществляет изоморфизм между $\mathbb{R}^k$ и $T_x(M)$. С его помощью оператор $f'(x): T_x(M) \to Y$ переходит в оператор из $\mathbb{R}^k$ в У. В какой? Ответ прост: надо перенести функцию в карту (перейти к функции $f \circ \tau$) и продифференцировать ее в точке $\tau^{-1}(x)$. Это описание производной на самом деле совпадает с данным ранее в терминах кривых и поэтому зависит от выбора карты. Из него очевидна линейность оператора $f'(x)$.




## Ж. Производная отображения $f: M^k \to N^l$

Пусть $M^k \subset X$ и $N^l \subset Y$ – подмногообразия, $f: M^k \to N^l$. Как определить гладкост и производную $f$? Можно попросту забыть о $N^l$ и рассматривать $f$ как отображение в У. Но можно и не выходить за пределы $N^l$, а поступить так: выбрать карты $\tau_1$ и $\tau_2$, покрывающие х и $f(x)$, перенести функцию в них (рассмотреть функцию $\tau_2^{-1} \circ f \circ \tau_1$), продифференцировать – при этом получается линейное отображение из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^l$ – и вернуться на многообразие.

Указанные подходы приводят к формально различающимся определениям: в первом случае $f'(x)$ есть линейный оператор из $T_x(M^k)$ в У, а во втором случае – из $T_x(M)$ в $T_{f(x)}(N^l)$. Но, напомним, $T_{f(x)}(N^l)$ естественно отождествляется с частью У и с учетом этого отождествления два сформулированных определения



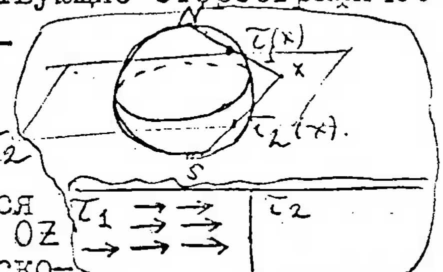
эквивалентны.

### 3. О корректном обосновании сказанного

Основную проблему представляет собой доказательство гладкости функций перехода. (При этом используется так называемая теорема об обратной функции, о которой у нас еще пойдет речь.) В остальном обоснование сводится к многократному применению теоремы о сложной функции, проверке открытости областей определения функций и прочие тривиальности.

### Задачи к лекции 2.

1. Найти производную функции $\langle x,y\rangle \mapsto \langle x^y, y^x\rangle$ в точке $\langle 1,2\rangle$.
2. Найти производную функции $x \mapsto x^x$, зная производную $\langle x,y\rangle \mapsto x^y$
3. Придумать три разные карты сферы, проверить гладкость функций перехода.
4. То же для тора.
5. Если x – точка мах для $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, то $f'(x) = 0$.
6. Дать определение производной дифф. функции на многообразии.
7. Открытое подмножество подмногообразия – подмногообразие.
8. Рассмотрим на сфере $S^2$ две карты $\tau_1$ и $\tau_2$, соответствующие стереографическим проекциям из северного и южного полюсов. В каждой точке сферы зададим касательный вектор так, что в карте $\tau_1$ изображения всех этих векторов равны и параллельны. Нарисовать изображение этих векторов в карте $\tau_2$.




9. Найти касательное пространство к тору, получающемуся вращением окружности $(x-2)^2 + z^2 = 1$ вокруг оси 0Z (в любой точке по Вашему выбору, не лежащей в плоскостях 0X, 0Y, 0Z и с $z \neq 1$). /Требуется найти соответствующее подпространство в $\mathbb{R}^3$./

## ЛЕКЦИЯ 3. ОБОСНОВАНИЯ

Эта лекция посвящена средствам, с помощью которых можно обосновать утверждения, оставшиеся недоказанными.

### А. Теоремы об обратной и неявной функции

(Вывод одной из другой)

Определение Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – открытые множества в нормированных пространствах E и F соответственно. Отображение $\varphi: \mathcal{U} - \mathcal{V}$ называется диффеоморфизмом $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$ (или между $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$), если $\varphi$ – взаимно однозначно отображает $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$, и отображения $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ – гладкие.

Замечание. Если $\varphi$ – диффеоморфизм $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$, $a \in \mathcal{U}$, $b = \varphi(a) \in \mathcal{V}$, то $\varphi'(a)$ и $(\varphi^{-1})'(b)$ – взаимно обратные операторы из $L(E,F)$ и $L(F,E)$. Из этого следует, что $\dim E = \dim F$. Кроме того, из этого следует, что производная диффеоморфизма в любой точке его области определения – обратимый оператор.

Следующая теорема показывает, что локально верно и обратное утверждение.

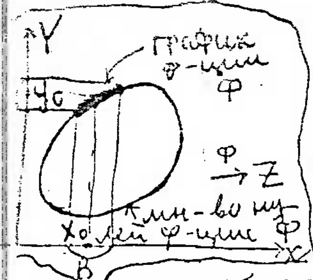
Теорема об обратной функции.

Пусть $\varphi$ – гладкое отображение открытого множества $\mathcal{U}$ банахова пространства E в банахово пространство F, $a \in \mathcal{U}$, $\varphi'(a)$ – обратимый оператор (из $L(E,F)$). Тогда существует такая открытая окрестность $V \subset \mathcal{U}$ точки a и такая открытая окрестность W точки $f(a)$, что сужение $\varphi$ на V есть диффеоморфизм V на W.

Эта теорема понадобится нам для конечномерных нормированных пространств E и F (которые, как известно, всегда банаховы).

Теперь сформулируем другую важную теорему, по существу эквивалентную только что приведенной (они легко следуют друг из друга), относящуюся к "неявному заданию" функций (пример: уравнение $\Phi(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$ неявно задает функцию $y = \sqrt{1-x^2}$).

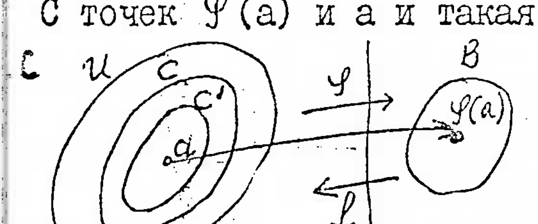
Теорема. Пусть X, Y, Z – банаховы пространства, $\Phi: \langle x,y\rangle \mapsto \Phi(x,y)$ – гладкая функция, определенная в открытом множестве $A \subset X \oplus Y$, $\langle x_0,y_0\rangle \in A$, $\Phi'_y(x_0,y_0)$ – обратимый оператор из $L(Y,Z)$, $\Phi(x_0,y_0) = 0$. Тогда существуют такие открытые окрестности B и C точек $x_0$ и $y_0$ в пространствах X и Y и такая гладкая функция $f: B \to C$, что при $\langle x,y\rangle \in B\times C$ свойства $y = f(x)$ и $\Phi(x,y)=0$ равносильны.




Вместо доказательства этих теорем, покажем, как одна из них следует из другой.

Т.о неявной ф-ции → т.об обратной ф-ции.

Мы хотим найти обратную к $\varphi$ ф-цию, т.е. решить уравнение $\Phi(x,y) = \varphi(y) - x$ относительно y (выразить y через x). Положим X = F, Y = E, Z = F, $\Phi(x,y)=\varphi(y)-x$, $x_0=\varphi(a)$, $y_0=a$. Тогда Φ определена в окрестности точки $x_0,y_0$, $\Phi(x_0,y_0)=0$, $\Phi'_y(x_0,y_0)=\varphi'(y)$ — обратимый оператор. Поэтому найдутся такие открытые окрестности B и C точек $\varphi(a)$ и a и такая функция $f: B\to C$, что при $x\in B$, $y\in C$ свойство $\Phi(x,y)=0$ (т.е. $x=\varphi(y)$) и $y=f(x)$ будут равносильны.




Заменяя C на меньшую окрестность $C' = \varphi^{-1}(B)$], получаем, что $\varphi$ является диффеоморфизмом C' и B, а $f$ — обратным к нему диффеоморфизмом (проверьте, что они взаимно обратны).

Обратная — неявная.

ли $F'_y$ — обратим, то отображение $\langle x,y\rangle \mapsto \langle x, F(x,y)\rangle$ по теореме об обратной функции будет диффеоморфизмом в окрестности точки $\langle x_0,y_0\rangle$. Если G — обратное к нему отображение, то $x \mapsto G(x,0)$ можно взять в качестве функции $f$. Подробно это рассуждение (выбор окрестностей и т.п.) проведите сами.

Б. Идея доказательства теоремы об обратной функции

Не претендуя на строгость, спросим себя, какие имеются проблемы? Их три.
1) Почему $\varphi$ переводит различные близкие к a точки в различные?
2) Почему множество значен $\varphi$ есть окрестность точки $\varphi(a)$? (другими словами, почему близкая к $\varphi(a)$ точка попадает в образ $\varphi$?)
3) Почему $\varphi^{-1}$ непрерывная и, более того, гладкая?

Решаются эти проблемы примерно так:

1) $\varphi(a+h)\approx\varphi(a)+\varphi'(a)h$ при малых $h$. Если $h_1$ и $h_2$ малы и различны, то $\varphi(a+h_1)\approx\varphi(a)+\varphi'(a)h_1 \neq \varphi(a)+\varphi'(a)h_2 \approx \varphi(a+h_2)$, причем разница между $\varphi'(a)h_1$ и $\varphi'(a)h_2$ в силу обратимости $\varphi'(a)$ по порядку такова же, какова разница между $h_1$ и $h_2$, а приближенные равенство справедливы с точностью до более высоко порядка, поэтому и $\varphi(a+h_1)\neq\varphi(a+h_2)$ /Более тщательное рассуждение использует теорему о конечном приращении./

2) Пусть y — точка, близкая к $\varphi(a)$. Надо найти x для которого $\varphi(x) = y$. Ищем x в виде $a+h$. Т.к. $\varphi(a+h)\approx\varphi(a)+\varphi'(a)h$, то естественно попробовать взять такие $h$, чтобы выполнялось $\varphi(a)+\varphi'(a)h = y$, т.е. $h=[\varphi'(a)]^{-1}(y-\varphi(a))$. Равенство $\varphi(a+h)=y$ выполнено, конечно, лишь приближенно, с некоторой ошибкой $\Delta$: $\varphi(a+h)=y+\Delta$. Постараемся учесть эту ошибку, добавив к $h$ вектор $[\varphi'(a)]^{-1}\Delta$: $h_1=h+[\varphi'(a)]^{-1}\Delta$. Тогда ошибка уменьшится: $\varphi(a+h_1)=y+\Delta_1$; тогда возьмем $h_2=h_1+[\varphi'(a)]^{-1}\Delta_1$ и т.д. В пределе получим (здесь нужна полнота) $\tilde h=\lim h_n$, для которого $\varphi(a+\tilde h)=y$. Формально этот процесс легче заменить ссылкой на теорему о сжимающем отображении, взяв в качестве такового отображение $h \xrightarrow{S} h + [\varphi'(a)]^{-1}(y-\varphi(a+h))$ (у нас $h=S(0)$, $h_1=S(h)$, $h_2=S(h_1)$, ...).

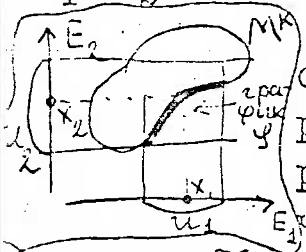
3. К сожалению, вопрос о непрерывности и гладкости $\varphi^{-1}$ оказывается более технически сложным, и его придется опустить.

В. Гладкость функций перехода.

Мы применим теорему об обратной функции, чтобы обосновать гладкость функций перехода (см. предыдущую лекцию).

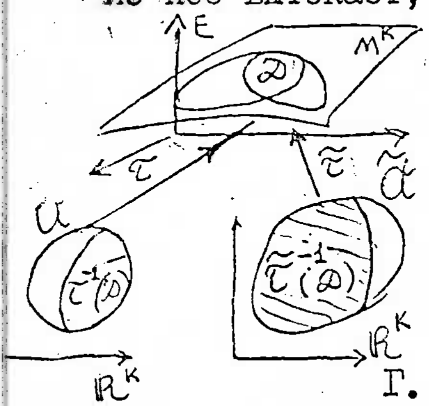
Напомним определение к-мерного подмногообразия конечномерного нормированного пространства E. Множество $M\subset E$ называется к-мерным подмногообразием, если для всякой точки $x\in M$ существует представление $E=E_1\oplus E_2$ с $\dim E_1=k$, окрестности $\mathcal U_1$ и $\mathcal U_2$ проекций $x_1$ и $x_2$ точки x на $E_1$ и $E_2$ ($x=\langle x_1,x_2\rangle$) и гладкая функция $\varphi:\mathcal U_1\to\mathcal U_2$ (гладкая как функция из $\mathcal U_1$ в $E_2$), для которых выполнено такое свойство: $(\forall x_1\in\mathcal U_1)(\forall x_2\in\mathcal U_2)(x_2=\varphi(x_1)\Longleftrightarrow\langle x_1,x_2\rangle\in M)$.

Докажем теперь, что образ карты – открытое подмножество в подмногообразии. Пусть $M^k\subset E$ – к-мерное подмногообразие, $\tau:\mathcal U\subset\mathbb R^k\to E$ – карта на нем. Докажем, что $\tau(\mathcal U)$ открыто в M. Пусть x – любая точка $\tau(\mathcal U)$, $a\in\mathcal U$ – ее изображение в карте. В окрестности точки $\tau(\mathcal U)$ подмногообразие представляется в виде графика гладкой функции в подходяще выбранной системе координат. Пусть $E=E_1\oplus E_2$, $\dim E_1=k$, $x=\langle x_1,x_2\rangle$, $\mathcal U_1$ и $\mathcal U_2$ – окрестности точек $x_1$ и $x_2$, $\varphi:\mathcal U_1\to\mathcal U_2$ – гладкая функция с графиком которой совпадает наше много-




образие в $\mathcal U_1\times\mathcal U_2$. Рассмотрим функции $\tau_1$ и $\tau_2$, определенные равенством $\tau(x)=\langle\tau_1(x),\tau_2(x)\rangle$. Лемма: $\tau_1'(a)$ – обратимый оператор из $L(\mathbb R^k,E_1)$. В самом деле, $\tau'(a)h=\langle\tau_1'(a)h,\tau_2'(a)h\rangle$, причем $\tau_2'(a)=\varphi'(x_1)\circ\tau_1'(a)$ (для близких к a точек x выполнено равенство $\tau_2(x)=\varphi(\tau_1(x))$), поэтому $\ker\tau_1'(a)=\ker\tau'$ (если $\tau'(a)h=0$, то и $\tau_2'(a)h=0$) и $\ker\tau_1'(a)=0$. В силу равенства размерностей $\mathbb R^k$ и $E_1$ оператор $\tau_1'(a)$ обратим. Осталось применить теорему об обратной функции. Из нее вытекает, что $\tau_1$ является диффеоморфизмом окрестности W точки a на окрестность V точки $x_1$. Сужая окрестности W и V, можно считать, что $\tau(W)\subset\mathcal U_1\times\mathcal U_2$. После этого ясно, что любая точка $y=\langle y_1,y_2\rangle$ многообразия, настолько близкая к $\langle x_1,x_2\rangle$, что $\langle y_1,y_2\rangle\in\mathcal U_1\times\mathcal U_2$ и $y_1\in V$, лежит в $\tau(\mathcal U)$, т.к. $y=\tau(\tau^{-1}(y_1))$. Открытость $\tau(\mathcal U)$ доказана.

Из нее вытекает, что если есть две карты $\tau:\mathcal U\to M^k$ и $\tilde\tau:\tilde{\mathcal U}\to M^k$, то множество




$D=\tau(\mathcal U)\cap\tilde\tau(\tilde{\mathcal U})$ точек, изображенных на обеих картах открыто, и его прообразы $\tau^{-1}(D)$ и $\tilde\tau^{-1}(D)$ также открыты. Остается проверить гладкость функций перехода. Фактически все уже готово: мы знаем, что проекции $\tau_1$ и $\tilde\tau_1$ отображений $\tau$ и $\tilde\tau$ на $E_1$ (см. только что проведенное доказательство) являются диффеоморфизмами, поэтому $\tilde\tau^{-1}\circ\tau=\tilde\tau_1^{-1}\circ\tau_1$ – гладкие отображения. Подробно это рассуждение проведите сами.

## Г. Задание подмногообразий уравнением $\Phi(x)=0$

Теорема. Пусть E, F – конечномерные нормированные пространства, $\mathcal U\subset E$ – открытое подмножество, $\Phi:\mathcal U\to F$ – гладкая функция, $M=\{x\in\mathcal U\mid\Phi(x)=0\}$ и во всех точках $x\in M$ оператор $\Phi'(x)\in L(E,F)$ является наложением (=эпиморфизмом, т.е. $\operatorname{im}\Phi(x)=F$). Тогда M является к-мерным подмногообразием E при $k=\dim E-\dim F$.

Доказательство. Фактически все необходимое содержится в теореме о неявной функции. Нужно лишь для любой точки $x\in M$ найти такое разложение $E=E_1\oplus E_2$, чтобы частная производная $\Phi'_{E_2}(x)$ была обратимой. Это легко сделать; если $\Phi'(x)$ – наложение, то можно найти $\dim F$-мерное подпространство $E_2$, сужение $\Phi'(x)$ на которое (т.е. $\Phi'_{E_2}$) будет обратимым. А в качестве $E_1$ можно взять любое прямое дополнение $E_2$ до E. Все.

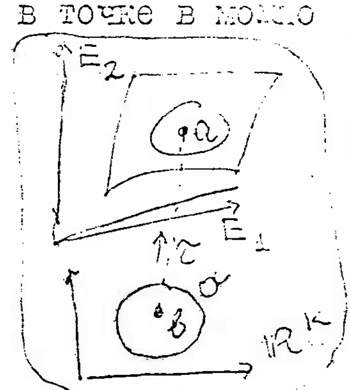
Пример. Уравнение $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ задает двумерное подмногообразие сферу в $\mathbb R^3$. В самом деле, $\Phi'(x,y,z)$ является наложением всюду, кроме точки (0,0,0), не лежащей на сфере.

Выясним, каково касательное пространство к многообразию $M$, заданному уравнением $\Phi(x) = 0$. Пусть $a \in M$. Если $\gamma(t)$ – путь на многообразии, и $\gamma(0) = a$, то $\Phi(\gamma(t)) = 0$, $\frac{d}{dt}(\Phi(\gamma(t))) = 0$, то есть $\Phi'(a)\,\gamma'(0) = 0$ и $\gamma'(0) \in \ker \Phi'(a)$. Таким образом, касательное пространство к $M$ (точнее, соответствующее подпространство в объемлющем многообразие нормированном пространстве) содержится в $\ker \Phi'(a)$. Вычислив размерности (напомним, что $\Phi'(a)$ – наложение), убедимся, что они совпадают: $T_a(M) = \ker \Phi'(a)$.

## Д. Задание подмногообразий с помощью карт.

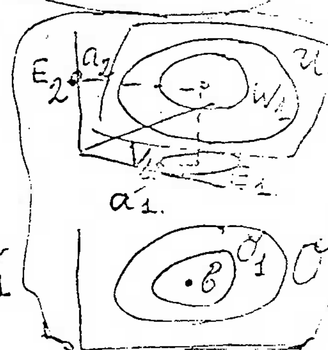
Теорема. Пусть $M$ – подмножество нормированного пространства $E$, и для каждой точки $a \in M$ существует гладкое отображение $\tau$ некоторого открытого подмножества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^K$ в $E$, являющееся гомеоморфизмом $\mathcal{O}$ на некоторую (открытую в $M$) окрестность $\mathcal{U}$ точки $a$, для которого $\tau'(b)$ при любом $b \in \mathcal{O}$ является вложением (т.е. $\ker \tau'(b) = 0$). Тогда $M$ – $k$-мерное подмногообразие.

Доказательство. Пусть $a$ – любая точка $M$, $\tau : \mathcal{O} - \mathcal{U}$ – гладкое отображение, обладающее указанными свойствами, $a \in \mathcal{U}$, $b$ – прообраз $a$ при $\tau$. Отображение $Д = \tau'(b)$ – вложение, поэтому можно выбрать такое разложение $E = E_I \oplus E_2$, чтобы в соответствующем представлении $Д = Д_I \oplus Д_2$ $(Д_I \in L(\mathbb{R}^K, E_I)$, $Д_2 \in L(\mathbb{R}^K, E_2))$ оператор $Д_I$ был бы обратим. (Например, можно взять $E_I = \operatorname{im} Д$.) Очевидно, $\dim E_I = к$. К отображению $\tau_1 = \pi_1 \circ \tau$ ($\pi_1$ – проекция $E$ на $E_I$ вдоль $E_2$) в точке $b$ можно применить теорему об обратной функции и установить, что





$\tau_1$ является диффеоморфизмом между открытым подмножеством $\mathcal{O}_I \subset \mathcal{O}$ и открытым подмножеством $V_1 \subset E_I$. Теперь можно рассмотреть функцию $\varphi : V_1 \to E_2$, определенную так: $\varphi(X) = \tau_2(\tau_1^{-1}(x))$. Она осуществляет гомеоморфизм между $V_1$ и открытым множеством $W_1$ в многообразии (Последнее открыто в $\mathcal{U}$, т.к. есть прообраз мн-ва $\mathcal{O}_I$ при $\tau_1^{-1}$, а значит, и во всем $M$). Взяв окрестности $C_I$ и $C_2$ точек $a_I$ и $a_2$, для которых $C_I \subset V_1$, $(C_I \times C_2) \cap M \subset W_1$, $\varphi(C_I) \subset C_2$ /это делается так: выбираем $C_I$ и $C_2$, удовлетворяющие первым двум условиям, а затем уменьшаем $C_I$, если надо, чтобы удовлетворить третьему/, получим требуемое: при $x_I \in C_I$, $x_2 \in C_2$ свойства $\langle x_I, x_2 \rangle \in M$ и $\varphi(x_I) = x_2$ равносильны. В самом деле, если $\langle x_I, x_2 \rangle \in M$, то $\langle x_I, x_2 \rangle \in W_1$, $\langle x_I, x_2 \rangle = \tau(z)$ для $z \in \mathcal{O}_1$, $\tau_1(z) = x_I \in V_1$, $\varphi(x_1) = \tau_2(\tau_1^{-1}(x_1)) = \tau_2(z) = x_2$.

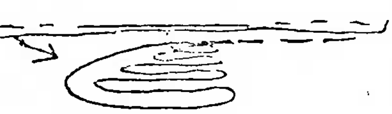




Обратно, если $x_I \in C_I$, $x_2 \in C_2$, $\varphi(x_I) = x_2$, то $\tau_2(\tau_1^{-1}(x_I)) = x_2$, и $\tau(\tau_1^{-1}(x_1)) = \langle \tau_1(\tau_1^{-1}(x_1)), \tau_2(\tau_1^{-1}(x_1)) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$ т.е. $\langle x_I, x_2 \rangle \in M$. Теорема доказана.

Следствие. Параметрическое задание кривой. Если $\varphi : ]\alpha, \beta[ \longrightarrow E$ – непрерывное отображение, $\varphi'(x) \neq 0$ для любой точки $x \in ]\alpha, \beta[$ и $\varphi$ – гомеоморфизм $]\alpha, \beta[$ на образ $]\alpha, \beta[$ при $\varphi$, то этот образ – одномерное подмногообразие $E$.

Контрольный вопрос: Рассмотрим гладкое отображение:



Его образ не подмногообразие. Не противоречит ли это следствию? Где не проходит док-во ?

## Е. Задачи.

1) В пространстве матриц рассмотрим подмножество $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \mid \det A = 1\}$ (Это группа относительно умножения матриц.) Доказать, что это подмногообразие, найти его размерность, найти касательное пространство[x] в точке $E$ (=единичная матрица.)

[x]) Здесь и далее слова "найти касательное пространство" означают, что нужно найти подпространство в объемлющем нормированном пространстве, ему соответствующее.

2) В том же пространстве рассмотрим подмножество $O(n,\mathbb{R})$ ортогональных матриц (столбцы которых образуют ортогональный базис в $\mathbb{R}^n$) /это также группа/. Доказать, что это – подмногообразие. Найти его размерность и касательное пространство в точке $E$.

3) Доказать, что множество $\{\langle a\sin t, b\cos t\rangle \mid t\in\mathbb{R}\}$ – одномерное подмногообразие $\mathbb{R}^2$. Найти касательное пространство в точке $\langle a\sin 1, b\cos 1\rangle$.

4) Доказать, что множество $\{\langle x,y\rangle \mid x^2-y^2=1\}$ – одномерное подмногообразие.

## Лекция 4. Абстрактные многообразия

Оказывается вовсе не обязательно мыслить многообразия вложенными в линейное пространство. Например, можно рассматривать многообразие всевозможных положений твердого тела в трехмерном пространстве или многообразие всех прямых на плоскости.

### А. Карты и атласы многообразия

Пусть $M$ – топологическое пространство. Назовем к-мерной картой на $M$ отображение $\tau$ открытого множества $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ на открытое множество $\tau(\mathcal{U})$ в $M$, являющееся гомеоморфизмом. Пусть $\tau_1:\mathcal{U}_1\to M$ и $\tau_2:\mathcal{U}_2\to M$ – две карты. Определим, что означает, что карты $\tau_1$ и $\tau_2$ согласованы. Если $\tau_1(\mathcal{U}_1)$ и $\tau_2(\mathcal{U}_2)$ не пересекаются, то $\tau$ и $\tau_2$ считаются согласованными. Если же пересекаются и $V=\tau_1(\mathcal{U}_1)\cap\tau_2(\mathcal{U}_2)$, то то рассмотрим $\tau_1^{-1}(V)$ и $\tau_2^{-1}(V)$ – открытые подмножества $\mathbb{R}^k$ – и функции перехода $\tau_1^{-1}\circ\tau_2$ и $\tau_2^{-1}\circ\tau_1$ (эти функции гомеоморфно отображают $\tau_2^{-1}(V)$ на $\tau_1^{-1}(V)$ и наоборот). Так вот, карты $\tau_1$ и $\tau_2$ согласованы, если эти функции являются не только гомео-, но и диффеоморфизмами, т.е. если обе они – гладкие.

Атласом (точнее, к-мерным атласом) на $M$ называется набор попарно согласованных к-мерных карт, образы которых покрывают все $M$.

Топологическое пространство вместе с (к-мерным) атласом на нем называется (к-мерным) гладким многообразием.

Назовем два атласа эквивалентными, если все карты первого согласованы со всеми картами второго, т.е. если их объединение есть снова атлас. Во всех дальнейших определениях замена атласа на другой, но эквивалентный, будет для нас несущественной, поэтому мы не будем различать многообразия, получающиеся друг из друга такой заменой. Точнее, многообразием можно было бы назвать пару <пространство, класс эквивалентных атласов>.

Каждое к-мерное подмногообразие нормированного пространства $E$ можно считать к-мерным многообразием, взяв в качестве атласа множество всех карт в описанном ранее смысле. В частности, открытое подмножество нормированного пространства $E$ становится многообразием, если снабдить его атласом из единственной карты $\tau:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ (тождественно).

Если $M'$ – открытое подмножество многообразия $M$, то на $M'$ возникает также структура многообразия (нужно заменить карты $\tau:\mathcal{U}\to M$ на их части $\tau':W\to V$, где $V=M'\cap\tau(\mathcal{U})$, $W=\tau^{-1}(V)$.

### Б. Гладкие отображения.

Пусть $M$, $N$ – многообразия, $f: M\to N$ – функция. Функция $f$ наз. гладкой, если выполнено такое условие: для любых карт $\tau$ из атласа $M$ и $\varrho$ из атласа $N$ функция $\varrho^{-1}\circ f\circ\tau$ (определенная там, где это возможно – легко проверить, что ее область определения открыта) – гладкая.

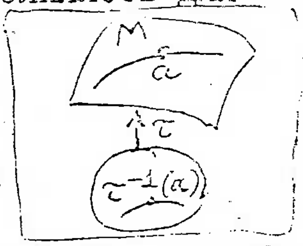
Аналогичным образом можно определить дифференцируемость в точке $x\in M$: для любых карт $\tau$ и $\varrho$ покрывающих $x$ и $f(x)$, функция $\varrho^{-1}\circ f\circ\tau$ должна быть дифференцируема в $\tau^{-1}(x)$.

В этих определениях в качестве $M$ или $N$ может, в частности, фигурировать открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ (или все $\mathbb{R}^n$). Если и $M$, и $N$ таковы, то это определение совпадает с обычным.

### В. Касательное пространство

Пусть $M$ – многообразие, $a\in M$. Мы определим касательное пространство $T_a(M)$ к многообразию M в точке a. Его элементами будут классы эквивалентности путей.

Путем мы будем называть гладкое отображение $\gamma$ интервала $]\alpha, \beta[$ в M, для которого $\gamma(0) = a$. Пути $\gamma_1$ и $\gamma_2$ наз. эквивалентными (касающимися), если для любой карты $\tau$, покрывающей точку a, пути $\tau^{-1}\circ\gamma_1$ и $\tau^{-1}\circ\gamma_2$ касаются в $\mathbb{R}^k$ (т.е. $(\tau^{-1}\circ\gamma_1)'(0) = (\tau^{-1}\circ\gamma_2)'(0)$)./Достаточно, чтобы это условие выполнялось для одной карты./ Элементы факторможества множества всех путей по этому отношению и назовем касательным вектором к M в точке a.

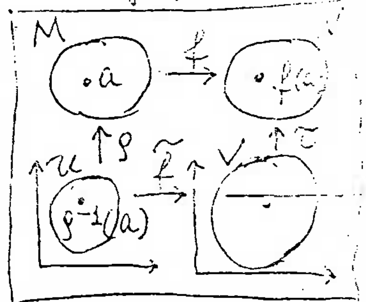



Если $\tau$ – карта, покрывающая точку a, то каждому пути $\gamma$ в M соответствует путь в $\mathbb{R}^k$ – $\tilde{\gamma} = \tau^{-1}\circ\gamma$ – его изображение в карте; сопоставив каждому пути $\gamma$ вектор $\tilde{\gamma}'(0) \in \mathbb{R}^k$, мы видим, что эквивалентным путям соответствуют (по определению) один и тот же вектор из $\mathbb{R}^n$ и каждый вектор из $\mathbb{R}^n$ соответствует какому-то пути. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между $T_a(M)$ и $\mathbb{R}^k$. Элемент $\mathbb{R}^k$, соответствующий касательному вектору $h$, называется изображением $h$ в карте $\tau$, а его компоненты – координатами $h$ в карте $\tau$. С помощью этого соответствия структура линейного пространства переносится из $\mathbb{R}^k$ в $T_a(M)$.

Чтобы завершить определение $T_a(M)$ как линейного пространства, остается проверить, что введенная таким образом стркутура не зависит от выбора карты. (Это Вы легко сделаете сами.) Изображения $h_1$ и $h_2$ касательного вектора $h$ в двух картах $\tau_1$ и $\tau_2$ связаны, как легко видеть, так: $h_2 = (\tau_2^{-1}\circ\tau_1)'(\tau_1^{-1}(a))\, h_1$

## Г. Производная

Пусть M, $N$ – многообразия, $f$ – гладкая функция из M в $N$, $a\in M$. Определим производную $f$ в точке a. Это будет линейное отображение $f'(a)$ из $T_a(M)$ в $T_{f(a)}(N)$. Определяется оно так: пусть $\gamma$ – путь в M и $\gamma(0) = a$. Тогда $f\circ\gamma$ – путь в $N$, причем если $\gamma_1$ и $\gamma_2$ эквивалентны, то и $f\circ\gamma_1$ и $f\circ\gamma_2$ эквивалентны. Это позволяет корректно определить отображение $f'(a): T_a(M) \to T_{f(a)}(N)$, сопоставив классу эквивалентности $[\gamma]$ класс $[f\circ\gamma]$.




$$\begin{tikzcd} T_a(M) \arrow[r, "f'(a)"] \arrow[d, leftrightarrow] & T_a(N) \\ \mathbb{R}^k \arrow[r, "\tilde{f}'(b)"] & \mathbb{R}^k \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Эквивалентное определение производной можно дать и с помощью карт. Именно, если $\rho$ и $\tau$ – карты на M и $N$, то возникает функция $\tilde{f}$ – изображение $f$ в этих картах. Ее нужно продифференцировать в точке $b = \rho^{-1}(a)$ и перенести обратно на многообразие. Эта конструция показывает также линейность $f'(a)$.

Аналогичным образом (с помощью карты) можно определить производную функции, дифференцируемой в точке a.

Данные нами определения касательного пространства и производной согласуются с имевшимися ранее (для случая открытых подмножеств линейных пространств и подмногообразий линейных пространств). Для них очевидным образом выполняется теорема о производной сложной функции.

## Д. Примеры.

Помимо уже рассмотренных примеров подмногообразий линейных пространств, рассмотрим такие многообразия:

1. $\mathbb{RP}^n$ (n-мерное вещественное проективное пространство) – множество всех одномерных подпространств пространства $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Множество всех прямых (не обязательно проходящих через 0) на плоскости.

3. Множество всех к-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$.

Во всех этих примерах ввести топологию и структуру многообразия предлагается читателю в виде задачи. При ее решении может оказаться полезным такое соображение: не обязательно сначала вводить топологию, а только почти атлас. Можно ввести сначала атлас, т.е. набор взаимно однозначных соответствий между открытыми подмножествами $\mathbb{R}^k$ и некоторыми подмножествами $M$, для которых функции перехода имеют открытые области определения и являются гладкими. Затем можно определить топологию так: мн-во $X \subset M$ открыто, если все его прообразы открыты в $\mathbb{R}^k$. Это соображение может быть полезным также при введении структуры многообразия в касательном расслоении $TM$ многообразия $M$, т.е. в множестве $\{\langle x, \xi \rangle \mid x \in M,\ \xi \in T_x M\}$. Сделать это тоже предоставляется читателю.

## Лекция 5. Векторные поля, диффеоморфизмы, коммутатор.

Пусть $\mathcal{U}$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^k$. Говорят, что в $\mathcal{U}$ задано векторное поле $v$, если каждой точке $u \in \mathcal{U}$ сопоставлен вектор $v(u) \in \mathbb{R}^k$. Таким образом, векторное поле в $\mathcal{U}$ есть просто отображение из $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^k$. Это определение легко обобщается на случай произвольного многообразия. Именно, пусть $M$ – произвольное многообразие и для каждой точки $x \in M$ задан вектор $v(x) \in T_x(M)$. В таком случае говорят, что на многообразии $M$ задано векторное поле $v$.

Это определение является обобщением данного ранее определения векторного поля в $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$, т.к. любое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$, снабженное тождественной картой, является к-мерным многообразием, а касательное пространство к нему естественно отождествляется с $\mathbb{R}^k$.

Если $\tau$ – карта на $M$: $\tau : \mathcal{U} \to M$, то для каждой точки $u \in \mathcal{U}$ возникает вектор – изображение $v(\tau(x))$ в карте $\tau$. Возникает векторное поле в $\mathcal{U}$, называемое изображением исходного векторного поля на многообразии в карте $\tau$.

Векторное поле на многообразии называется гладким, если его изображение во всех картах является гладким (как функции из $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^k$). Эквивалентное определение в терминах касательного расслоения $TM$ таково: отображение $\bar{v} : M \to TM$, определяемое формулой $x \mapsto \langle x, v(x) \rangle$, должно быть гладким.

Пусть на многообразии $M$ задано векторное поле $v$ и гладкий путь $\gamma : ]\alpha, \beta[ \to M$. Путь $\gamma$ наз. траекторией векторного поля, если для любого $t \in ]\alpha, \beta[$ выполнено равенство $\gamma'(t) = v(\gamma(t))$. (Напомним, что $\gamma'(t)$ лежит в $L(\mathbb{R}, T_{\gamma(t)}(M))$, которое мы отождествляем с $T_{\gamma(t)}(M)$, так, что обе части лежат в $T_{\gamma(t)}(M)$). Если путь целиком лежит в образе карты $\tau$, то $\tilde{v}$ и $\tilde{\gamma}$ – изображения $v$ и $\gamma$ в этой карте, то $\gamma$ является траекторией $v \Longleftrightarrow \tilde{\gamma}$ есть траектория $\tilde{v}$, т.е. если $\tilde{\gamma}$ – решение дифференциального уравнения $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{v}(\tilde{\gamma}(t))$ (обе части лежат в $\mathbb{R}^k$). Таким образом задача описания траекторий векторного поля на многообразии сводится к задаче решения дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^k$ (или нескольких таких уравнений, если нам приходится по ходу дела переходить из карты в карту). Таким образом, если нас интересует локальное устройство полей и траекторий, то можно ограничиться полями в открытом подмножестве $\mathbb{R}^k$. Так мы и будем делать.[ж)]

ж) Нижеследующий текст был (за небольшим исключением) написан ранее и относится в основном к векторным полям в открытом подмножестве евклидова пространства.

## Векторные поля, диффеоморфизмы, коммутатор.

### I. Определения.

Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Векторным полем в $\mathcal{U}$ называется отображение из $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^n$ – каждой точке сопоставлен вектор. /Мы будем предполагать все векторные поля гладкими./ С каждым векторным полем $v$ связано дифференциальное уравнение $\dot{y}(t) = v(y(t))$, решения которого называются траекториями /или интегральными кривыми/ векторного поля. Так как это уравнение автономно, то постоянный сдвиг времени сохраняет свойство "быть траекторией".

Пусть $F : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ – диффеоморфизм двух открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Пусть в $\mathcal{U}_1$ задано векторное поле $v_1$. Какое поле $v_2$ нужно задать в $\mathcal{U}_2$, чтобы траектории поля $v_1$ переходили в траектории поля $v_2$? Ответ очевиден: $v_2(F(x))$ должно равняться $F'(x)\cdot v_1(x)$.

Каждое векторное поле $v$ в области $\mathcal{U}$ задаёт отображение алгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ гладких в $\mathcal{U}$ функций в себя. Если $\varphi$ – гладкая функция на $\mathcal{U}$, то производная $\varphi$ вдоль $v$, обозначаемая $v\varphi$ и определяемая равенством $(v\varphi)(x) = \varphi'(x)v(x)$ также является гладкой функцией. Другое определение $v\varphi(x)$ таково – выпустим из $x$ траекторию $z(t)$ и продифференцируем функцию $\varphi(z(t))$ в точке 0:

$$(t \mapsto \varphi(z(t)))'(0) = \varphi'(z(0))\cdot z'(0) = \varphi'(x)\cdot v(x).$$

Отображение $\varphi \mapsto v\varphi$ является дифференцированием алгебры $C^\infty(\mathcal{U})$, это значит, что оно линейно и удовлетворяет тождеству Лейбница $v(\varphi\psi) = \varphi\cdot v\psi + v\varphi\cdot\psi$. Можно доказать, что всякое дифференцирование $\mathcal{D}$ алгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ задаётся некоторым полем. /Каким? Чтобы найти $i$-ую компоненту его, примените $\mathcal{D}$ к $i$-ой координатной функции. Дальше примените лемму Адамара, утверждающую, что гладкая функция $f$ представляется в окрестности 0 так: $f(x_1 \ldots x_n) = \sum_i x_i \cdot g_i(x_1 \ldots x_n)$. Кроме того, сначала следует доказать, что всякое дифференцирование алгебры $C^\infty(\mathcal{U})$ локально, т.е. что значение $\mathcal{D}f$ в точке определяется значениями $f$ в некоторой окрестности этой точки./

### 2. Векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов.

Пусть $v$ – векторное поле в области $\mathcal{U}$. Рассмотрим функцию $V : (t,x) \mapsto V(t,x)$ = значение в $t$ траектории векторного поля, равной $x$ в $0$. /Таким образом, функция $t \mapsto V(t,x)$ есть траектория, проходящая через $x$ при $t=0$/. Конечно, $V$ может быть определена, вообще говоря, не при всех $t$ и $x$; однако при любом фиксированном $x$ значение $V(t,x)$ определено для всех достаточно малых $t$. Из теории дифференциальных уравнений вытекает такое

<u>Утверждение.</u> Естественная область определения функции $V$ есть открытое множество, и $V$ – гладкая функция на нём.

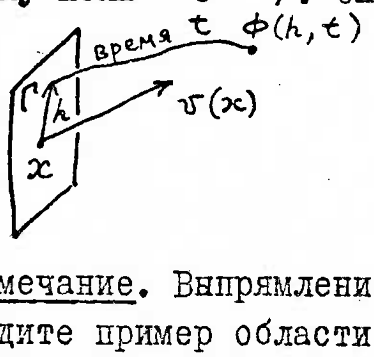
В частности, при каждом $t$ функция $V_t : x \mapsto V(t,x)$ гладкая. Очевидно, $V_{t+s} = V_t \circ V_s$ /там, где это равенство имеет смысл/; в частности, $V_t = (V_{-t})^{-1}$, так что функцию $V_t$ можно назвать диффеоморфизмом /если забыть про то, что она определена не всюду/. Можно сказать /также не вполне корректно/, что отображение $t \mapsto V_t$ задаёт гомоморфизм группы $\mathbb{R}$ на некоторую группу диффеоморфизмов её можно назвать однопараметрической /единственный параметр – $t$ /.

3. <u>Теорема о локальном выпрямлении.</u>

Пусть $v$ – векторное поле в области $\mathcal{U}$. Нас интересует вопрос: когда можно его "выпрямить", то есть найти такой диффеоморфизм $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}'$, при котором поле переходит в постоянное поле в $\mathcal{U}'$. Очевидно, что /если исключить тривиальный случай нулевого поля/ необходимо, чтобы поле всюду было отлично от нуля. Оказывается, что локально это условие является достаточным.

<u>Теорема.</u> Пусть $v$ – векторное поле в области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $x$ – неособая точка векторного поля $v$ /это значит, что $v(x) \neq 0$ /. Тогда существует такая окрестность $\mathcal{O}$ точки $x$ и такой диффеоморфизм $F : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$, что поле $v$ переходит в постоянное поле в $\mathcal{O}'$.

<u>Д-во.</u> Идея доказательства проста: прямые линии, являющиеся траекториями поля в $\mathcal{O}'$, должны переходить в траектории поля $v$ – этим мы руководствуемся при построении диффеоморфизма. Пусть $\Gamma$ – трансверсальная к вектору $v(x)$ гиперплоскость /$\mathbb{R}v(x) \oplus \Gamma = \mathbb{R}^n$ /. Рассмотрим отображение $\Phi$ из $\Gamma \oplus \mathbb{R}$ в $\mathcal{U}$ : $\Phi(h,t) = V(x+h,t)$ / $V$ – гладкая функция, соответствующая векторному полю $v$ /. Оператор $\Phi'(0,0)$ невырожден, так как его сужение на $\Gamma$ тождественно, а значение на $(0,1)$ равно $v(x)$. Поэтому локально $\Phi$ является диффеоморфизмом и, очевидно, этот диффеоморфизм – искомый. ☒




<u>Замечание.</u> Выпрямление возможно, вообще говоря, лишь локально. /Приведите пример области и всюду ненулевого векторного поля, которое не допускает выпрямления!/

4. <u>Выпрямление двух векторных полей: необходимые условия.</u>

Пусть даны два векторных поля $v, w$ в одной и той же области. Когда их можно выпрямить одновременно /одним диффеоморфизмом/? Необходимым условием возможности этого является следующее: диффеоморфизмы сдвига вдоль одного и другого поля должны коммутировать

$$(V_t \circ W_s) = (W_s \circ V_t)$$

поскольку для постоянных полей это, очевидно, верно. /Это условие, как мы увидим, будет почти достаточным/. Выясним теперь, когда диффеоморфизмы сдвига коммутируют.

Пусть это так. Зафиксируем точку $x \in \mathcal{U}$ и функцию $\varphi \in C^\infty(\mathcal{U})$. Определим функцию двух переменных $A(s,t) = \varphi(V_t W_s x) = \varphi(W_s V_t x)$ и вычислим её смешанную производную $\partial^2 A/\partial s \partial t$ в нуле. Производная по $t$ при $t=0$ и любом $s$ равна $(v\varphi)(W_s x)$ /см. первое выражение для $A$ /, а смешанная производная равна $w\, v\, \varphi(x)$. Рассматривая аналогично второе выражение для $A$, получаем, что та же /точнее, другая, но равная/ смешанная производная равна $v w \varphi(x)$. Поэтому функция $vw\varphi - wv\varphi$ тождественно равна нулю. Это можно выразить иначе, используя следующую лемму:

<u>Лемма.</u> Для любых двух полей $v$ и $w$ в области $\mathcal{U}$ существует и единственно поле $[v,w]$, для которого $[v,w]\varphi = vw\varphi - wv\varphi$. Это поле называется <u>коммутатором полей</u> $v$ и $w$.

Теперь можно сказать, что если диффеоморфизмы сдвигов вдоль полей $v$ и $w$ коммутируют, то коммутатор $[v,w]$ равен нулю.

<u>Д-во леммы.</u> Единственность очевидна /всякое поле задаётся результатами его применения к координатным функциям/. Если б мы знали, что всякое дифференцирование задаётся векторным полем, то и существование доказывалось бы простой выкладкой, устанавливающей, что $\varphi \mapsto vw\varphi - wv\varphi$ есть дифференцирование. А так нам придётся в явном виде выписывать координаты поля $[v,w]$ /впрочем, это явное выражение тоже полезно/. Начнём: если $w = (w^1,\dots,w^n)$, $v = (v^1,\dots,v^n)$, то $w\varphi = \sum w^j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, $v(w\varphi) = \sum_{i,j} v^i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(w^j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = \sum\left(v^i w^j \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} + v^i \frac{\partial w^j}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)$ Теперь нужно вычесть то же самое с переставленными $v$ и $w$. При этом первый член сократится /этого и следовало ожидать, так как он содержит вторую производную/, и останется $\sum\left(v^i \frac{\partial w^j}{\partial x_i} - w^i \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, то есть производная вдоль векторного поля с координатами $[v,w]^j = \frac{\partial w^j}{\partial x_i} v^i - \frac{\partial v^j}{\partial x_i} w^i$. Иными словами, $[v,w] = w'v - v'w$. Лемма доказана.

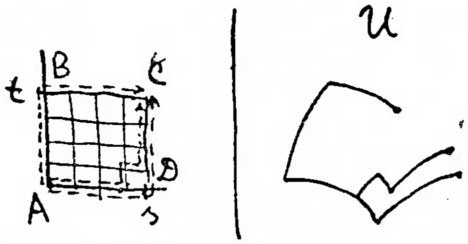
5. <u>Условие $[v,w]=0$</u>

Оказывается, что условие $[v,w]=0$ оказывается достаточным для того, чтобы диффеоморфизмы $V_s$ и $W_t$, задаваемые этими векторными полями, коммутировали /по крайней мере, локально, при малых $s$ и $t$ /.

<u>Теорема.</u> Пусть $v$, $w$ – векторные поля в области $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $[v,w]=0$, $x$ – точка $\mathcal{U}$. Тогда при достаточно малых $s$ и $t$ выражения $V_s W_t x$ и $W_t V_s x$ определены и равны.

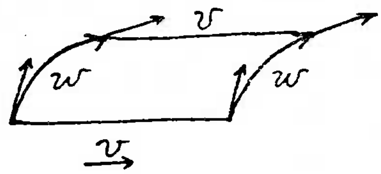
<u>Первое д-во.</u> Пусть $\varphi$ – гладкая функция в области $\mathcal{U}$. Рассмотрим функцию $B(s,t) = \varphi(V_s W_t x) - \varphi(W_t V_s x)$. Как мы видели,

. $\partial^2 B/\partial s\partial t\,(0,0)=0$. Равны нулю и остальные производные первого и второго порядков в $(0,0)$, т.к. при $s=0$ или $t=0$ значение $B(s,t)$ равно нулю. Поэтому $B(s,t)=o((|s|+|t|)^2)$. Выбирая в качестве $\varphi$ координатные функции, находим, что $V_sW_tx-W_tV_sx=o((|s|+|t|)^2)$.




Чтобы доказать, что на самом деле $V_sW_tx=W_tV_sx$, разобьём прямоугольник $[0,s]\times[0,t]$ на $n^2$ маленьких. Каждому пути из A в C (по их сторонам) соответствует путь в области $\mathcal U$. Будем постепенно переходить от пути ADC к пути ABC, каждый раз изменяя способ обхода одного из маленьких прямоугольников. /Всего потребуется $n^2$ шагов./ Как будет сдвигаться конец? При обходе с разных сторон одного прямоугольника возникнет расхождение порядка $o(\frac{1}{n^2})$, которое затем увеличится не более, чем в константу раз. Поэтому расстояние между образами путей ADC и ABC (точнее, их концами) не превосходит $n^2\cdot o(\frac{1}{n^2})=o(1)$. Устремляя $n$ к бесконечности, видим, что оно равно 0. /Конечно, требуется некоторое дополнительное обоснование равномерности $o(\frac{1}{n^2})$ и т.п./.

Второе д-во применимо к случаю, когда одно из полей /например, $v$/ отлично от нуля в точке $x$. В этом случае его можно выпрямить. Вспоминая выражение для коммутатора, мы видим, что $v'w-w'v=0$ или /т.к. $v'=0$/ $w'v=0$. Это значит, что поле $w$ не меняется при сдвиге вдоль поля $v$. Поэтому сдвиг вдоль $v$ траектории поля $w$ даст новую траекторию того же поля $w$, поэтому $V_sW_tx=W_tV_sx$

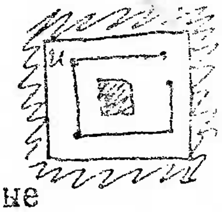



Третье д-во следует методу второго, но обходится без выпрямления. Докажем, что диффеоморфизм $W_t$ оставляет на месте поле $v$. После этого станет ясно, что применение его к траекториям поля $v$ снова даёт траектории, и всё будет доказано. Надо доказать, таким образом, что $[W_t'(x)]\,v(x)=v(W_tx)$ или, другими словами, что $[W_t'(x)]^{-1}\cdot v(W_tx)=v(x)$. Докажем, что левая часть постоянна, для чего продифференцируем её /сначала в нуле/:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[W_t'(x)]^{-1}\cdot v(W_tx)=v'(x)w(x)+\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}[W_t'(x)]^{-1}v(x)=v'(x)w(x)-\frac{d}{dt}[W_t'x]\cdot v(x)=v'(x)w(x)-\frac{\partial^2 w(0,x)}{\partial t\,\partial x}=v'(x)w(x)-\frac{\partial}{\partial x}(w(x))\cdot v(x)=[v,w]=0.$$

/Здесь используется формула дифференцирования билинейной формы, формула $(X\mapsto X^{-1})'(A)\,H=-A^{-1}HA^{-1}$ и равенство смешанных производных/.. Теперь нетрудно видеть, что и всюду производная равна 0, так как $[W'_{t_0+\Delta t}(x)]^{-1}v(W_{t_0+\Delta t}(x))=[W'_{t_0}(x)]^{-1}[W'_{\Delta t}(W_{t_0}x)]^{-1}(W_{\Delta t}W_{t_0}x)$ = /не зависящий от $\Delta t$ оператор/ $\cdot$ $[W'_{\Delta t}(y)]^{-1}v(W_ty)$, где $y=W_{t_0}x$. Третье д-во окончено.

Мы получили также новое истолкование "производной одного поля вдоль другого".




Задача. Пусть $v$ – постоянное горизонтальное поле в изображённой на рисунке области $\mathcal{U}$. Придумать такое вертикальное поле $w$, чтобы $[v,w]\equiv 0$, но чтобы выполняемые в разном порядке сдвиги приводили бы в разные точки. Не противоречит ли это теореме? Где не проходят её доказательства?

6. Выпрямление двух полей.

Теперь уже нетрудно доказать такую теорему о выпрямлении двух полей:

Теорема. Если $v$ и $w$ – векторные поля в области $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n$, $[v,w]=0$, $x\in\mathcal{U}$, $v(x)$ и $w(x)$ линейно независимы, то существует такой диффеоморфизм некоторой окрестности точки $x$, при котором поля переходят в постоянные.

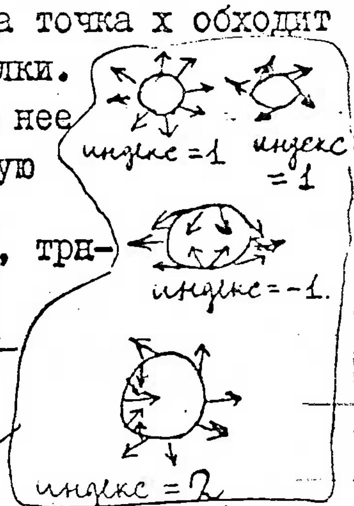
Д-во. Повторяем рассуждение пункта 3 с тем изменением, что рассматривается отображение $\Phi(h,t,s) = V_s W_t(x+h) = W_t V_s(x+h)$, корректно определённое в силу равенства $[v,w]\equiv 0$. $\blacksquare$

## Индексы векторных полей

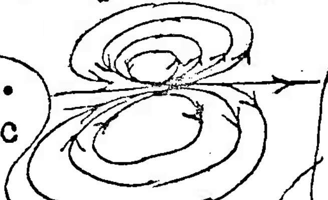
Напомним, что каждому отображению окружности $S^1$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ мы сопоставляем некоторое целое число – "число оборотов $\gamma(x)$, когда $x$ обходит окружность". Мы не давали и не даем точного определения (см. методические разработки "Накрытия"), но считаем интуитивно ясным, что это число сохраняется при гомотопиях (в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$). Сейчас мы применим это понятие для исследования векторных полей на двумерных многообразиях.

### А. Векторные поля на плоскости

Пусть $\mathcal{U}$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^2$, $v: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ – векторное поле в $\mathcal{U}$. Пусть $a \in \mathcal{U}$ – особая точка (=нуль) векторного поля, причем изолированная (т.е. в ее окрестности нет других особых точек). Индексом особой точки $a$ называется число оборотов, которое делает вектор $v(x)$, когда точка $x$ обходит по маленькой окружности вокруг точки $a$ против часовой стрелки. Окружность надо выбирать настолько маленькой, чтобы внутри нее не было других особых точек. А среди таких можно брать любую (индекс сохраняется при гомотопии).




Задача 1. Найти индекс особой точки 0 для векторного поля, траектории которого изображены на рис.:



Задача 2. Пусть $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – линейный оператор. $(x) = Ax$ – векторное поле. Как найти индекс особой точки 0, зная матрицу оператора $A$?

### Б. Основная лемма

Пусть $\mathcal{O}$ – область, ограниченная гладкой границей $\Gamma$, содержащаяся (вместе с границей) внутри области $\mathcal{U}$, векторное поле не имеет особых точек на $\Gamma$ и имеет конечное число особых точек $x_1, \dots, x_n$ внутри $\Gamma$. В этих предположениях (точный смысл которых не вполне ясен – что такое "область, ограниченная гладкой границей"?) имеет место

Лемма. Сумма индексов точек $x_1, \dots, x_n$ равна числу оборотов, которое делает вектор $v(x)$, когда $x$ обходит $\Gamma$ против часовой стрелки.


"Доказательство". Т.к. число оборотов сохраняется при гомотопии, можно заменить $\Gamma$ на гомотопный путь $\Gamma'$, изображенный на рис. (участки между особыми точками, проходимые туда и обратно, для ясности изображены двумя линиями). А число оборотов при обходе по $\Gamma'$ равно сумме индексов особых точек, т.к. поворот при движении от одной точки к другой компенсируется.

Лемма показывает, что для вычисления суммы индексов векторного поля внутри области достаточно знать его поведение на границе.

### В. Индекс особой точки на многообразии.

Пусть $v$ – векторное поле на многообразии, $x$ – его изолированная точка. Определим индекс особой точки $x$, перенеся поле в карту. Корректность такого определения гарантирует такая

Лемма. Пусть $\mathcal{U}$, $V \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi$ – диффеоморфизм $\mathcal{U}$ на $V$, переводящий векторное поле $\tilde{u}$ (на $\mathcal{U}$) в векторное поле $v$ (на $V$), $u_0 \in \mathcal{U}$, $v_0 \in V$ – изолированные особые точки полей $u$ и $v$. Тогда их индексы равны.

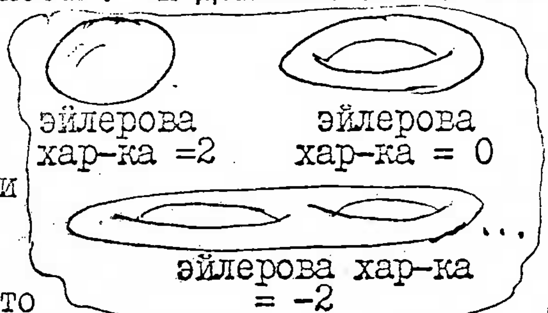
Набросок доказательства. Диффеоморфизмы окрестности $u_0$ на окрестность точки $v$ делятся на два класса – сохраняющие ориентацию (у которого $\det > 0$) и обращающие ее (у которого $\det < 0$). Любые два диффеоморфизма одного класса, как удается доказать, можно непрерывно деформировать друг в друга так, чтобы все промежуточные отображения будут также диффеоморфизмами (каждый диффеоморфизм деформируется в свою линейную часть, а линейные – друг в друга)/подробнее смотри Милнор и Уоллес."Дифференциальная топология", М., "Мир", 1972/. При деформации (научное название ее – изотопия) индексы меняются непрерывно,т.е. сохраняются. Поэтому достаточно доказать лемму для тождественного диффеоморфизма (что очевидно) и симметрии (проверьте!).

## Г. Эйлерова характеристика

Теорема. I) На любом компактном двумерном многообразии существует векторное поле с изолированными особыми точками (из компактности следует,что их число конечно).

2) Сумма индексов особых точек не зависит от выбранного поля. Она называется эйлеровой характеристикой многообразия.

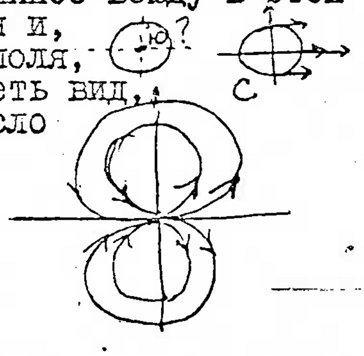
Нам не удастся доказать теорему в полной общности. Мы докажем ее только для многообразий, являющихся сферами с ручками. (Насамом деле многообразия бывают ориентируемыми и неориентируемыми; любое двумерное ориентируемое многообразие есть сфера с ручками, а неоринтируемое – сфера с ручками, в которую врезан маленький диск, и противоположные точки граничной окружности отождествлены).




## Д. Сфера.

Докажем теорему п.Г для сферы. Можно считать,что северный полюс сферы – неособая точка. Рассмотрим две карты, соответствующие стереографическим проекциям из северного и южного полюса. На первой из них изображены все особые точки, поэтому для вычисления суммы индексов можно применить основную лемму п.Б, взяв в качестве $C$ достаточно большой круг . Нужно только понять, как себя ведет поле (точнее, его изображение в карте) на окружности большого радиуса. На сфере и в другой карте эта окружность изображается, напротив, окружностью малого размера.

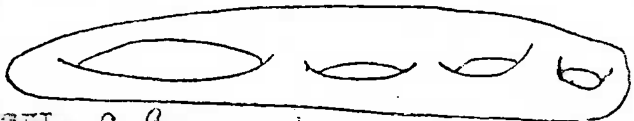
В малой окрестности точки С (в карте, где она изображена), можно считать поле постоянным (в карте). Если мы заменим поле на постоянное всюду в этой карте, то на рассматриваемых окружностях оно не изменится и, следовательно,полное число оборотов можно вычислить для поля, постоянного в одной из карт. В другой карте оно будет иметь вид, изображенный на рис.,и, следовательно, (задача I п.А) число оборотов будет равно 2, для сферы теорема доказана.!




(точная формулировка теоремы о замене: если 0 – неособая точка векторного поля $v$ , то существует круг, радиуса $\varepsilon$ , не содержащий особых точек поля $v$, и поле $v'$, совпадающее вне этого круга с $v$, и постоянное в круге радиуса $\varepsilon/2$ и не имеющее особых точек внутри круга радиуса $\varepsilon$ .)

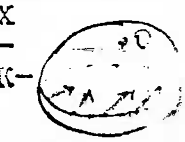
Следствие. На сфере не существует гладкого векторного поля без нулей. /Ежа нельзя причесать./

## Е. Сфера с ручками.

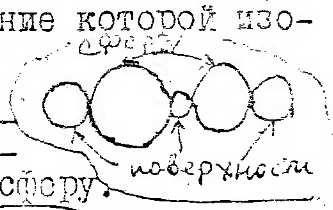


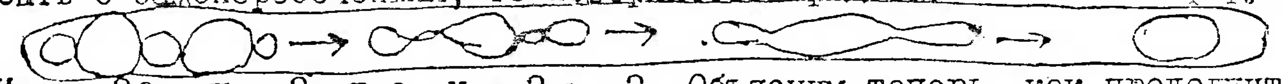
Пусть теперь дана сфера с ручками (или крендель с $g$ дырками). Докажем, что сумма индексов особых точек любого векторного поля на ней равна $2-2g$ .(Мы считаем, что мы рассматриваем векторные поля с изолированными особыми точками; существование таких полей на сферах с ручками почти очевидно, см. также задачи.... )

Итак, пусть дано векторное поле на сфере с $g$ ручками. Вложим в каждую дыру по сфере, которая касается нашего многообразия по окружности (большого круга). Будем считать, что на этих окружностях нет особых точек векторного поля. На каждой сфере возникает векторное поле, заданное только на одной окружности. Продолжим его до векторного поля с изолированными особыми точками. (Почему это можно –



см.далее). Возникает поверхность (самопересекающаяся), сечение которой изображено на рисунке, и векторное поле на ней. Сумма индексов особых точек этого поля равна $2g$ (на сферах) + x (на исходной поверхности). С другой стороны она равна 2, т.к. если забыть о самопересечениях, то поверхность представляет собой сферу.



Итак, $2g + x = 2$, т.е. $x = 2g - 2$. Объясним теперь, как продолжить поле. Можно сделать так: перенести поле по параллелям, одновременно уменьшая его и до нуля в полюсе. (Около полюса следует уменьшать быстро в целях гладкости.) Все.

Задача I. Эйлерова характеристика тора равна нулю, поэтому теорема не запрещает существования поля без особых точек на нем. Построить такое поле, и, более того, два таких поля, линейно независимых в каждой точке.

Задача 2. Построить поле с изолированными особыми точками на сфере с ручками. (Указание: поверните их подходящим образом и рассмотрите поле, траектории которого есть линии наискорейшего спуска.)

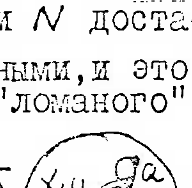
## Ж. Топологические следствия.

Теорема. Тождественное отображение сферы в себя не гомотопно постоянному. (это означает, что не существует гомотопии, т.е. семейства $\gamma_t : S^2 \to S^2$ ($t \in [0,1]$), для которого функция $(t,x) \mapsto \gamma_t(x)$ непрерывна, $\gamma_0$ – тождественное, а $\gamma_1$ – постоянное отображение).

Доказательство. Пусть такая гомотопия существует (обозначим ее $\gamma_t$). $\gamma_0$ – тождественное, $\gamma_1$ – постоянное, равное некоторой точке a. Построим векторное поле на сфере, не имеющее нулей. Для каждой точки $x \in S^2$ имеется путь $\gamma_t(x)$, соединяющий точку x (при $t = 0$) с точкой a. Выберем в точке a какой-нибудь вектор. Теперь поле на сфере строится так: перенесем этот вектор во все точки x вдоль соответствующих путей, при перенесении сохраняется угол между переносимым вектором и касательным вектором к пути.


Это рассуждение имеет ряд пробелов. Во-первых, касательный вектор существует только если пути гладкие. Хуже того, даже если путь гладкий, вполне возможно, что в некоторой точке касательный вектор равен нулю, и говорить об угле, образуемом им с переносимым вектором, бессмысленно. Поэтому нужно слегка видоизменить нашу конструкцию.

Пусть $N$ велико. Рассмотрим на пути $t \mapsto \gamma_t(x)$ точки, соответствующие значениям $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1$. Соединим их дугами больших кругов (если $N$ достаточно велико, то соседние точки не будут диаметрально противоположными, и это определение корректно). Теперь переносить вектор можно вдоль этого "ломаного" пути. Так получается непрерывное поле на сфере, не имеющее особых точек. Это противоречит доказанному нами. (На самом деле предположение о гладкости векторного поля нами фактически не использовалось.)




Следствие I. Не существует непрерывного отображения $\varphi$ шара $Д^2$ на его границу $S^2$, тождественного на границе.

Следствие 2. Всякое непрерывное отображение шара $Д^2$ в себя имеет неподвижную точку.

Эти следствия доказываются так же, как и в двумерном случае (см. лекцию "Элементы топологии".)