МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, 1980-1981 гг.

(I курс, II семестр)

ПРОГРАММА

I. Нормированные и банаховы пространства

I. Определение нормированных и банаховых пространств. Примеры конечномерных нормированных пространств. Неравенства Минковского, Гельдера, Юнга.

2. Примеры бесконечномерных банаховых пространств: пространства последовательностей (ℓ_p, ℓ_∞, c_0), ограниченных функций, ограниченных непрерывных отображений (доказательство его банаховости).

3. Критерий непрерывности линейного оператора. Пространство непрерывных линейных операторов. Сопряженное пространство.

4. Изоморфизм нормированных пространств. Описание конечномерных нормированных пространств. Теорема Ф.Рисса: шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен.

5. Прямая сумма нормированных пространств. Теорема Банаха об обратном отображении (без док-ва). Пространство непрерывных полилинейных отображений.

II. Ряды

6. Ряды в нормированном пространстве. Критерий Коши. Коммутативная сходимость Абсолютная сходимость. Критерий абсолютной сходимости. Абсолютно суммируемые семейства. Свойства коммутативности и ассоциативности. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов.

7. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак сравнения, эталонные ряды $\sum 1/n^\alpha$. Признаки Коши и Д'Аламбера, их сравнение, вычисление $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}/n$

8. Степенные ряды. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Нормальная сходимость функционального ряда. Аналитические функции в круге, их непрерывность.

9. Комплексная экспонента, ее простейшие свойства. Синус и косинус, формула Эйлера.

I0. Условно сходящиеся ряды. Суммирование по частям. Признаки сходимости Дирихле и Лейбница. Теорема Абеля. Следствия из нее.

III. Дифференциальное исчисление

II. Дифференциальное исчисление для вектор-функций числового аргумента (вещественного или комплексного). Правая и левая производная. Формальные правила дифференцирования: линейность, производная произведения, производная сложной и обратной функции.

I2. Теорема о конечных приращениях для всюду дифференцируемых вещественно-значных функций. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши и их следствия. Правило Лопиталя. Применения дифференциального исчисления к доказательству неравенств: неравенство о взвешенном среднем.

I3. Теорема о конечых приращениях для вектор-функций. Следствия. Случай функции комплексного аргумента.

I4. Теорема о дифференцируемости предела последовательности. Производная аналитической функции.

I5. Сюръективность комплексной экспоненты. Число π. Корни n-ой степени из комплексных чисел.

IУ. Примитивные и интегралы

I6. Свойство "непрерывности" производной. Определение примитивной. Теорема о примитивной предела последовательности и ее следствия.

17. Ступенчатые и правильные функции. Характеризация правильных функций. Следствия: операции над правильными функциями, свойства их примитивных.

18. Определение интеграла от правильной функции на отрезке в $\mathbb{R}$. Связь с интегралом Римана. Теорема Ньютона-Лейбница. Свойства интегралов: линейность, интегрирование по частям, замена переменной, теорема о среднем.

19. Длина кривой. Натуральный параметр. Натуральный параметр на окружности.

20. Примитивная аналитической функции. Элементарные функции и табличные интегралы. Интегрирование функций $e^{ax}\cdot(\sin bx)^p\cdot(\cos cx)^q$. Вычисление $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$. Формула Валлиса.

21. Разложение рациональных функций на простейшие дроби. Комплексный логарифм. Интегрирование рациональных функций.

У. Высшие производные

22. Высшие производные. Линейность, формула Лейбница, формула интегрирования по частям п-ого порядка. Приложения: примитивная функции $e^{ax}\cdot x^n$; многочлены Лежандра.

23. Выпуклые функции: определение и простейшие свойства. Критерий выпуклости. Геометрический смысл второй производной. Выпуклость e^x и еще одно доказательство неравенства о взвешенных средних.

24. Формула Тейлора: локальная форма, интегральная форма остаточного члена, оценки остаточного члена. Формула Тейлора для функций комплексного аргумента. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в степенной ряд.

25. Разложение функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ в ряд Тейлора с оценкой остаточного члена. Биномиальная формула. Разложения $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$.

УI. Эйлеровы разложения

26. Эйлерово разложение $\operatorname{ctg} z$. Применение к вычислению сумм $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$

27. Бесконечные произведения. Критерий коммутативной сходимости. Критерий сходимости произведения $\prod_{n=1}^{\infty} R(n)$, где $R(x)$ – рациональная функция.

28. Эйлерово разложение $\sin z$. Еще одно доказательство формулы Валлиса.

29. Г – функция: формула Эйлера. Исследование $\Gamma(x)$ при $x>0$: производные $\ln\Gamma(x)$. Константа Эйлера. Вычисление $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{a_1}{n})(1+\frac{a_2}{n})\cdots(1+\frac{a_k}{n})}{(1+\frac{b_1}{n})(1+\frac{b_2}{n})\cdots(1+\frac{b_k}{n})}$.

Формула дополнения.

* * *

Администрация желает студентам успешно сдать экзамен.

Нормированные и банаховы пространства

Основная идея дифферениициального исчисления – аппроксимация произвольных отображений линейными. Чтобы это имело смысл, нужно, чтобы области определения и значений рассматриваемых отображений были нормированными векторными пространствами.

Определение. Векторное пр-во E(над полем K= $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) назывется нормированным, если в нем введена метрика d , удовлетворяющая условиям:

1) сдвиг на всякий вектор есть изометрия (т.е. $d(x+z, y+z) = d(x,y), \forall x,y\in E$

2) умножение на скаляр $\lambda\in K$ есть растяжение в λ раз, т.е. $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda| d(x,y)$

Из (1) $\Rightarrow d(x,y) = d(x-y,0)$, т.е. d определяется функцией $\|x\| = d(x,0)$ – она наз. нормой в E.

Эквивалентное определение нормирован. пр-ва: в E введена норма $\|\ \|: E\to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\|0\| = 0$ и $\|x\|>0$ при $x \neq 0$.
2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|\ \forall x,y\in E$ (нер-во треугольника); 3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|\ \forall\lambda\in K,\ x\in E.$

Банахово пространство $\overset{def}{=}$ полное нормированное пространство.

Замечание. Нормированное пр-во над $\mathbb{C}$ можно рассматривать и над $\mathbb{R}$.

Примеры и конструкции. 1. Конечномерные пр-ва. Мы уже знаем три нормы в K^n: $\|x\|_2=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2}$, $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$ и $\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$. Более общо, $\forall p$, $p\ge 1$ положим $\|x\|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p+\dots+|x_n|^p)^{1/p}$.

Теорема. $\|\ \|_p$ – норма в $K^n\ \forall p\ge 1$. Док-во. Нетривиально только нер-во треугольника – оно наз. нер-вом Минковского: $\left[\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right]^{1/p}\le$
$\le \left(\sum_{1\le i\le n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{1\le i\le n} y_i^p\right)^{1/p}$ при $x_i,\ y_i\ge 0,\ p\ge 1$.

При P=1 доказывать нечего, поэтому будем считать $p>1$. Назовем сопряженным к $p>1$ число q, такое, что $1/p + 1/q = 1$. ($\Leftrightarrow q = p/(p-1);\ p = q/(q-1);\ (p-1)(q-1)=1$).

Выведем нер-во Минковского из фундаментального нер-ва Гельдера:

$$\sum_{1\le i\le n} x_i y_i \le \left(\sum_{1\le i\le n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{1\le i\le n} y_i^q\right)^{1/q} \quad (x_i, y_i\ge 0,\ p>1,\ q>1 \text{ и сопряжено с } p)$$

(при $P = q = 2$ это нер-во Коши-Буняковского-Шварца).

Док-во нер-ва Минковского: $\sum_{1\le i\le n}(x_i+y_i)^p = \sum_{1\le i\le n} x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{1\le i\le n} y_i(x_i+y_i)^{p-1}\le$
$\le\left(\sum_{1\le i\le n} x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left[\sum_{1\le i\le n}(x_i+y_i)^p\right]^{1/q} + \left(\sum y_i^p\right)^{1/p}\left[\sum (x_i+y_i)^p\right]^{1/q}$
(по нер-ву Гельдера и поскольку $q(p-1)=p$). Осталось умножить обе части нер-ва на $\left[\sum_{1\le i\le n}(x_i+y_i)^p\right]^{-1/q}$.

Док-во нер-ва Гельдера: Лемма: $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ при $a,b\ge 0$.

Вывод нер-ва Гельдера из леммы: положим $X = \sum_{i=1}^n x_i^p$, $Y = \sum_{i=1}^n y_i^q$. Применим лемму к $a = \frac{x_i}{X^{1/p}}$, $b=\frac{y_i}{Y^{1/q}}$ и сложим по $1\le i\le n$: $\frac{\sum x_i y_i}{X^{1/p}\cdot Y^{1/q}}\le\frac{1}{p}\ \frac{\sum x_i^p}{X}+\frac{1}{q}\ \frac{\sum y_i^p}{Y} =$
$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, что и требуется.

Док-во леммы (не совсем строгое(сейчас), но очень наглядное). Воспользуемся нер-вом Юнга : пусть $y=\varphi(x)$ – непр., строго возраст. ф-ия от x при $x\ge 0$, $\varphi(0) = 0$, и $\varphi^{-1}(y)$ – обратная к φ ф-ия. Тогда: $\forall a,b\ge 0$ имеем:

$$ab\le\int_0^a\varphi(x)\,dx+\int_0^b\varphi^{-1}(y)\,dy \quad (\text{см. рис.})$$

положив $\varphi(x) = x^{p-1}$ (так, что $\varphi^{-1}(y) = y^{1/(p-1)} = y^{q-1}$), получим утверждение леммы. Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, $\|x\|_\infty\le\|x\|_p\le n^{1/p}\cdot\|x\|_\infty$, так, что $\|x\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$ (это оправдывает обозначение).

2. Пр-ва последовательностей $\forall p \geq 1$ положим ℓ_p $(=\ell_p(K)) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in K, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ($\ell_\infty \overset{def}{=}$ пр-во ограниченных последовательностей). Норма в ℓ_p определяется формулой $\|(x_n)\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p]^{1/p}$ (соотв., норма в ℓ_∞: $\|(x_n)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$). Все эти пространства – банаховы (будет доказано позднее или дано в задачах).

3. Пр-во ограниченных функций $B(A;K)$ – банахово с нормой $\|f\| = \sup_{t\in A} |f(t)|$. Более общо, если E – нормированное пр-во, то пр-во огрниченных отображений $B(A;E)$ – нормировано с нормой $\|f\| = \sup_{t\in A}\|f(t)\|$; если E – банахово, то $B(A;E)$ – банахово.

4. Очевидно, векторное подпр-во нормированного пр-ва – нормировано, замкнутое вект. подпр-во банахова пр-ва – банахово.

Следующий очень важный пример – пр-во огранич. непр. отображений. $\forall$ метрич. пр-ва X и нормир. пр-ва E положим $C^\infty(X;E)$ – пр-во огранич. непр. отображ. из X в E.

Теорема: $C^\infty(X;E)$ явл. замкнутым векторн. подпр-вом в $B(X;E)$. В частности, если E – банахово, то $C^\infty(X;E)$ – банахово.

Док-во. 1. $C^\infty(X;E)$ – вект. подпр-во. Это вытекает из следующего очевидного предложения: отображение $(x,y) \mapsto x + y$ $E \times E \to E$ – равномерно непр. в $E \times E$, отображ. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ $K \times E \to E$ – непр. в $K \times E$ (доказывается так же, как и непр. алгебр. операций в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

2. Замкнутость $C^\infty(X;E)$. Пусть послед. (f_n) непр. ф-ий $X \to E$ равномерно сходится к $f: X \to E$. Нужно док-ть, что f – непр. Пусть $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$. Выберем n такое, что $\|f(x) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall x \in X$ и окр. $V \ni x_0$ такую, что $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in V$. Тогда при $x \in V$ имеем $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$, что и требуется (этот распространенный метод наз. $\varepsilon/3$ приемом). Теорема док.

5. Подпр-во многочленов на отрезке $[a,b]$ не замкнуто в пр-ве непр. ф-ий (попробуйте д-ть это!). Более того, знаменитая теорема Вейерштрасса утверждает, что оно всюду плотно.

6. Предложение: Пополнение нормиров. пр-ва является банаховым пр-вом. Более точно, операции $(x,y) \mapsto x + y$ $E\times E \to E$ и $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ продолжаются до отображений $\bar{E} \times \bar{E} \to \bar{E}$ и $K\times\bar{E} \to \bar{E}$ по непрерывности, и $\bar{E}$ с этими операциями становится банаховым пр-вом (это надо уметь доказывать самим!).

7. $\forall p \geq 1$ введем в пр-во $C[a,b]$ непр. ф-ий на отрезке $[a,b]$ норму $\|f\|_p = [\int_a^b |f(x)|^p dx]^{1/p}$. Все эти пр-ва неполны (это задача!); пополнение $C[a,b]$ по норме $\|f\|_p$ обозначается $L_p[a,b]$.

8. Непрерывные линейные операторы. Предложение: Пусть E и F – нормированные пр-ва, $A: E \to F$ – линейный оператор. Следующие условия эквивалентны: (1) A – непрерывен; (2) A ограничен в шаре $B(0,1) \subset E$; (3) $\exists C \geq 0$: $\|A(x)\| \leq C\cdot\|x\|$ $\forall x \in E$. Док-во. Эквив. (2) и (3) очевидна. Из (3) следует, что $\|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| \leq C\|x-y\|$, т.е. равномерная непр. A. Обратно, если A непр. в т. $(0) \in E$, то A ограничен в нек-м шаре с центром в (0), а, значит и в единичном шаре. Т.е. (1) $\Rightarrow$ (2). Предл. доказано.

В силу этого предложения непр. операторы называют также ограниченными.

Обозначим пр-во непр. линейных операторов $A:E\to F$ через $\mathcal{L}(E,F)$. Для $A\in \mathcal{L}(E,F)$ положим $\|A\| = \inf\{C>0 \mid \|A(x)\|\leq C\cdot\|x\|\ \forall x\in E\}$. Эквивалентные определения: $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} A(x) = \sup\limits_{\|x\|=1} A(x)$.

Предл. Пр-во $\mathcal{L}(E,F)$ с нормой $\|A\|$ является нормированным пр-вом. Если F – банахово, то $\mathcal{L}(E,F)$ – банахово. Д-во: Первое утв. очевидно. Далее, $\mathcal{L}(E,F)$ изометрично вложено в $C^\infty(B;F)$, где $B=B(0;1)\subset E$; дост.д-ть, что $\mathcal{L}(E,F)$ замкнуто в $C^\infty(B;F)$. Для этого дост.д-ть, что если $\forall x\in E\ \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$, где все $A_n:E\to F$ – линейны, то и оператор A линеен, а это очевидно.

В частности, при $F = K$ получаем пр-во непрерывных линейных функционалов на E (или линейных форм на E). Оно называется сопряженным к E и обозначается E^* или E'. Мы видим, что E^* всегда банахово (даже если E – нет).

Назовем нормированные пр-ва E и F изоморфными, если между ними есть линейный гомеоморфизм. (Не обязательно изометрия!) Две нормы $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ в пр-ве E наз. эквивалентными, если тождественное отображение $(E,\|\ \|_1)\to(E,\|\ \|_2)$ является гомеоморфизмом. Мы получаем, что $\|\ \|_1$ эквив. $\|\ \|_2 \Leftrightarrow \exists C_1>0$ и $C_2>0$ что $C_1\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq C_2\|x\|_1\ \forall x\in E$.

Предл. а) всякие два конечномерные нормированные пр-ва одинаковой размерности изоморфны, как нормированные пр-ва.

б) Если E-конечномерно, а F – любое нормированное пр-во, то $\forall$ линейное отображение $E\to F$ непрерывно.

в) Конечномерное подпр-во нормир. пр-ва всегда замкнуто.

Док-во. Пусть K^n – нормир. с $\|(x_k)\| = \sum|x_k|$. Докажем сначала, что $\forall$ лин. отображение $A:K^n\to F$ – непр. Имеем: $A((x_1,\dots,x_n)) = \sum x_k e_k$ для некоторых $e_k\in F$, откуда $\|A((x_k))\|\leq\sum|x_k|\cdot\|e_k\|\leq(\max\|e_k\|)\cdot\|(x_k)\| \Rightarrow A$ – непр. Пусть теперь $A:K^n\to E$ – линейный изоморфизм. Поскольку A и, след., $(x\mapsto\|A(x)\|)$ – непр., а единич. сфера S в K^n – компакт, по т. Вейерштрасса $\min\limits_{x\in S}\|A(x)\|$ достигается (и отличен от 0, т.к. A – изоморфизм). Значит, $\|A(x)\|\geq C\|x\|$ для нек-го $C>0$, откуда A^{-1} – непр. Это доказывает а) и б). в) следует из того, что конечномерное пр-во – банахово.

Теорема (Ф. Рисс). Пусть E – нормир. пр-во. Тогда E конечномерно $\Leftrightarrow$ шар $B=B(0;1)$ в E компактен. Док-во: $\Rightarrow$) ясно. Пусть B – компактен. Тогда $\exists a_1, a_2,\dots,a_n : B\subset\bigcup\limits_k B(a_k;1/2)$. Пусть V – конечномерное пр-во, порожденное $a_1,\dots,a_n$. Докажем от противного, что $V=E$. Пусть $\exists\ x\in E\setminus V$. Поскольку V замкнуто, имеем $d(x,V)=d>0$. $\forall y\in V\ \exists a_k: \left\|\frac{x-y}{\|x-y\|}-a_k\right\|\leq 1/2$. Отсюда $\|x-y\|\geq 2\|x-y-\|x-y\|a_k\|\geq 2d$ – это противоречит определению d.

Прямая сумма нормированных пространств $E_1\oplus E_2$ (= произведение $E_1\times E_2$) есть их алгебраическая прямая сумма, снабженная нормой $\|(x_1,x_2)\| = \max(\|x_1\|,\|x_2\|)$ ($x_1\in E_1$, $x_2\in E_2$). Можно вместо max брать $\sum\|x_k\|$ или $\sqrt{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2}$ – получатся изоморфные нормированные пр-ва. E_1 и E_2 линейно изометричны замкнутым подпр-вам $E_1\times\{0\}$ и $\{0\}\times E_2$ в $E_1\times E_2$. Будем считать, что E_1 и E_2 – подпр-ва в $E_1\times E_2$; тогда $E_1\times E_2$ – их (алгебраическая) прямая сумма.

Обратно, пусть E – нормир. вект.пр-во, и E_I, E_2 – вект.подпр-ва E, такие, что $E=E_I \oplus E_2$ – алгебраическая прямая сумма. Рассмотрим нормир. пр-во $E_I \times E_2$ и линейный оператор $i: E_I \times E_2 \to E$, заданный формулой $i(x_I, x_2) = x_I + x_2$. Очевидно, i – непрерывен и является изоморфизмом вект.пространств. Говорят, что E – топологическая прямая сумма подпр-в E_I и E_2, если i – гомеоморфизм. Очевидно, для этого необходимо, чтобы E_I и E_2 были замкнуты в E. Оказывается, если E – банахово, то верно и обратное: если банахово пр-во есть алгебраическая прямая сумма своих замкнутых векторных подпр-в E_I и E_2, то оно есть их топологическая прямая сумма. Это– нетривиальный и глубокий результат. Он сразу вытекает из следующей (трудной!) теоремы, которую мы примем без док-ва.

Т.Банаха об обратном отображении. Непрерывная линейная биекция одного банахова пр-ва на другое является гомеоморфизмом(т.е. обратное отображение тоже непрерывно).

Переформулировка: Если в пр-ве E заданы две нормы $\| \|_I$ и $\| \|_2$, относительно которых E – банахово, и $\|x\|_I \le a\|x\|_2$ $\forall x \in E$, то $\exists$ в: $\|x\|_2 \le в\|x\|_I$ $\forall x \in E$, т.е. $\| \|_I$ и $\| \|_2$ – эквивалентны.

Определения и результаты о прямой сумме сразу переносятся на случай любого конечного числа пространств.

Непрерывные полилинейные отображения. Предл. Пусть $E_I, \ldots, E_n$, F – нормированные пр-ва, и $A: E_I \times \ldots \times E_n \to F$ – полилинейное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны: (I) A –непр.; (2) A ограничен в единичном шаре $\{\|x_I\| \le I, \ldots, \|x_n\| \le I\}$ пр-ва $E_I \times \ldots \times E_n$; (3) $\exists c > 0: \|A(x_I, \ldots, x_n)\| \le c\|x_I\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$ $\forall x_k \in E_k$. Док-во. Эквивалентность (2) и (3) и (I) $\Rightarrow$(2) доказываются так же, как для лин.операторов, т.е. случая n = I (см.выше). Докажем (3) $\Rightarrow$(I). (Для простоты, при n = 2). Пусть $(a_I, a_2) \in E_I \times E_2$. Имеем $\|A(x_I, x_2) - A(a_I, a_2)\| = \|A(x_I, x_2) - A(x_I, a_2) + A(x_I, a_2) - A(a_I, a_2)\| = \|A(x_I, x_2 - a_2) + A(x_I - a_I, a_2)\| \le$ $\le C \cdot \|x_I\| \cdot \|x_2 - a_2\| + C \cdot \|x_I - a_I\| \cdot \|a_2\|$. Пусть $\|x_I - a_I\| < \delta$, $\|x_2 - a_2\| < \delta$. Тогда $\|A(x_I, x_2) - A(a_I, a_2)\| \le C\delta(\|a_I\| + \|a_2\| + \delta)$ – стремится к 0 при $\delta \to 0$, т.е. A непр. в $(a_I . a_2)$, что и требуется.

Обозначим через $\mathcal{L}(E_I, E_2, \ldots, E_n; F)$ векторное пр-во всех непр. полилинейных отображений $E_I \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$. Оно является нормированным векторным пр-вом с нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x_i\| \le 1} \|A(x_I, \ldots, x_n)\|$ $(= \inf\{C > 0: \|A(x_I, \ldots, x_n)\| \le C\|x_I\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|\})$. Эти пр-ва сводятся к пр-вам вида $\mathcal{L}$ (E,Г).

Предложение. Для каждого $A \in \mathcal{L}(E, F; G)$ и $x \in E$ обозначим через A_x: F – G оператор $y \mapsto A(x,y)$. Тогда $A_x \in \mathcal{L}(F, G)$, оператор $\tilde{A}: x \mapsto A_x$ лежит в $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$, и отображение $A \mapsto \tilde{A}$ есть линейная изометрия между $\mathcal{L}(E, F; G)$ и $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, C))$. Док-во провести самостоятельно (это простое, но полезное упражнение на усвоение определений.) Индукцией по n убеждаемся, что $\mathcal{L}(E_I, \ldots, E_n; F)$ отождествляется с сохранением нормы с пр-вом $\mathcal{L}(E_I, \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(\ldots, \mathcal{L}(E_n; F))))$.

ТЕМА: Р Я Д Ы

Пусть E – нормированное пр-во. Рядом в E наз. пара последовательностей $(x_n)_{n \ge I}$, $(S_n)_{n \ge I}$ в E, связанных соотношением $S_n = x_I + x_2 + \ldots + x_n$. Эл-т

x_n наз. <u>n-ым членом ряда</u>, S_n – <u>n-ой частной суммой</u>. Иногда говорят о ряде (x_n) или о ряде $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ряд (x_n) сходится к $S \in E$, если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$; вектор S называют суммой ряда и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Простейшие свойства рядов сразу вытекают из соответствующих свойств последовательностей. Например: 1) если $\sum x_n = S$, $\sum y_n = t$, $a, b \in K$, то ряд $(ax_n + by_n)$ сходится, и его сумма равна $aS + bt$.

2) <u>Критерий Коши:</u> Если ряд (x_n) сходится, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 : \forall n \geqslant n_0,\ p \geqslant 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \| S_{n+p} - S_n \| = \| x_{n+1} + \ldots + x_{n+p} \| \leqslant \varepsilon$. Обратно, если E – полно, то из этого условия вытекает сходимость ряда (x_n). В частности, если ряд (x_n) сходится, то $\lim_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$ – необходимое, но не достаточное условие.

С понятием ряда связано интуитивное представление о сумме ряда, как о "настоящей" сумме бесконечного числа слагаемых. Хотелось бы, чтобы выполнялись обычные свойства сложения, например, коммутативность.

<u>Определение</u>. Ряд (x_n) <u>коммутативно (или безусловно)</u> сходится, если для любой перестановки $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряд $(x_{\sigma(n)})$ сходится к одной и той же сумме.

Сходящийся ряд <u>не всегда</u> сходится коммутативно (приведите пример!). Важнейший пример, когда это можно гарантировать – ряды с неотрицательными (вещественными) членами. <u>Предл</u>. Пусть $((x_n), (S_n))$ – ряд и $x_n \geqslant 0\ \forall n$. Следующие условия эквивалентны: (1) Ряд (x_n) сходится. (2) $\exists$ возрастающая последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots$, такая, что последовательность (S_n) ограничена; (3) Множество $\{ S_I = \sum_{n\in I} x_n \}$ ограничено, где I пробегает все конечные подмножества $\mathbb{N}$. При этом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup_I \{ S_I \}$. Док-во очевидно. В частности, из (3) вытекает, что сходящийся ряд с неотрицательными членами сходится коммутативно.

Обобщение этого примера приводит к фундаментальному понятию абсолютной сходимости. <u>Определение</u>. Ряд (x_n) в E наз. <u>абсолютно сходящимся</u>, если сходится ряд $(\| x_n \|)$.

<u>Предложение</u>. В банаховом пр-ве E абсолютно сходящийся ряд сходится и $\| \sum x_n \| \leqslant \sum \| x_n \|$. Док-во сразу вытекает из критерия Коши.

<u>Замечание</u>. Справедлив полезный критерий полноты: если в пр-ве E любой абсолютно сходящийся ряд сходится, то E – банахово (задача!).

В дальнейшем E предполагается банаховым.

<u>Предложение</u>. Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится коммутативно. Воспользуемся след. критерием абс. сходимости: следующие условия эквивалентны: (1) Ряд (x_n) сходится абсолютно; (2) Конечные суммы $\sum_{n\in I} \| x_n \|$ ограничены (I пробегает все конечные подмн-ва $\mathbb{N}$); (3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечное подмн-во $H \subset \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{n\in K} \| x_n \| < \varepsilon$ $\forall$ конечного $K \subset \mathbb{N}$, не пересекающегося с H. При этом $\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n\in L} x_n \| \leqslant 2\varepsilon$ $\forall$ конечного $L \supset H$.

Эквивалентность (1) и (2) очевидна, а (2) и (3) – легко доказывается. Далее, из (3) следует, что $\| \sum_{n\in L} x_n - \sum_{n\in H} x_n \| \leqslant \varepsilon$. Отсюда $\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n\in H} x_n \| \leqslant \varepsilon$ (т.к. $[1, N] \supset H$ при больших N), и, значит, $\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n\in L} x_n \| \leqslant 2\varepsilon$. Из этого неравенства, очевидно, следует, что (x_n) коммутативно сходится.

Определение. Счетное семейство $(x_k)_{k\in K}$ векторов E наз. абсолютно суммируемым, если для некоторой биекции $\varphi : \mathbb{N} \to K$ ряд $(x_{\varphi(n)})$ абсолютно сходится. Из последнего предложения вытекает, что это св-во не зависит от φ, и что сумма $\sum_{\alpha\in K} x_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ определена корректно. Заменяя (в условиях (I)-(3)) выше $\mathbb{N}$ на K, получаем критерий абсолютной суммируемости. Следующее утверждение очевидно: если $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ - абс.суммируемо, и $B\subset A$, то подсемейство $(x_\alpha)_{\alpha\in B}$ также абс.суммируемо, и $\sum_{\alpha\in B}\|x_\alpha\| \le \sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|$.

Предложение.(Ассоциативность абс.сходимости рядов). Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ - абс. суммируемое семейство. Пусть $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ - семейство непустых подмн-в A, такое, что $A = \bigcup_\lambda B_\lambda$, и $B_{\lambda'} \cap B_\lambda = \emptyset$ при $\lambda \ne \lambda'$. Положим $z_\lambda = \sum_{\alpha\in B_\lambda} x_\alpha$. Тогда семейство $(z_\lambda)_{\lambda\in L}$ абс.суммируемо, и $\sum_{\lambda\in L} z_\lambda = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$. Док-во провести самим.

Замечание. Если число B_λ конечно, то верно и обратное утверждение: если каждое из подсемейств $(x_\alpha)_{\alpha\in B_\lambda}$ абс.суммируемо, то и $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ абс.суммируемо.

Предложение. Непрерывный линейный оператор A: $E \to F$ переводит сходящийся ряд в сходящийся и сумму в сумму. Если (x_n) абс.сходится,то и $(A(x_n))$ также абс.сходится. Док-во очевидно.

Предложение. Пусть E,F и G - банаховы, $A\in \mathcal{L}(E,F;G)$. Если (x_n) - абс.сход. ряд в E, (y_n) - абс.сход.ряд в F, то семейство $(A(x_m,y_n))$ $((m,n)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ абс.суммируемо, и $\sum_{m,n} A(x_m,y_n) = A(\sum_n x_n, \sum_y y_n)$.

Док-во. В силу критерия абс.сходимости нужно д-ть, что $\forall$ p суммы $\sum_{m,n\le p}\|A(x_m,y_n)\|$ ограничены. Но $\|A(x_m,y_n)\| \le \|A\|\cdot\|x_m\|\cdot\|y_n\| \Rightarrow \sum_{m,n\le p} A(x_m,y_n) \le \|A\|\sum_{m\le p}\|x_m\|\cdot\sum_{n\le p}\|y_n\|$ - ограничена. Далее, из двух предыдущих положений: $\sum_{m,n} A(x_m,y_n) =$
$= \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} A(x_m,y_n)) = \sum_{m=1}^{\infty} A(X_m, \sum_{n=1}^{\infty} y_n) = A(\sum_{m=1}^{\infty} X_m, \sum_{n=1}^{\infty} y_n)$, ч.т.д.

В частности, при E = F = G = K(основное поле), и $A(x,y)=x\cdot y$ получаем теорему об умножении абс.сход.числовых рядов. Мы видим,что произведением числовых рядов (a_n) и (b_n) естественно считать семейство $(a_m\cdot b_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Если мы хотим считать произведение рядов снова рядом, надо выбрать схему умножения, т.е. задать разбиение $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Например, в схеме Коши кладут $B_n = \{(k,\ell)\,|\,k+\ell=n\}$, т.е.называют произведением рядов (a_n) и (b_n) ряд (c_n), где $c_n = \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell$ (это связано, как мы ниже увидим, с умножением степенных рядов.) Возможны и другие схемы, например, схема Дирихле: $d_n = \sum_{k\cdot\ell=n} a_k b_\ell$ (она связана с умножением рядов Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$. Мы видим, что для абс.сходящихся рядов выбор любой схемы приводит к одному и тому же результату. Произведение сходящихся рядов (но не абс.сходящихся!) по любой схеме может расходиться. (Это - задача.)

Свойства и признаки сходимости числовых рядов прекрасно изложены в книге У.Рудин"Основы математического анализа" (см. стр.68 - 81).

Дифференциальное исчисление

Всем известно определение производной: $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Естественная для нас общность, когда это определение имеет смысл: $x_0\in K$ (= $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), f - функция, определенная в нек-й окрест. x_0 со значениями в нормир. пр-ве E над K. Если $f'(x_0)$ - существует, то f - дифференцируема в т.(x_0), и $f'(x_0)\in E$ (первая) производная f в т. x_0

Говорят, что $f: U \to E$ - диф. на U, если f дифференцируема в каждой точке

$\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ – открытое мн-во в К; если $K = \mathbb{C}$, то f наз. голоморфной на $\mathcal{V}$). При этом $f' : \mathcal{V} \to E$ – функция. (Другие обозначения: $\mathcal{D}f$ или df/dx).

Если $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$, то имеют смысл понятия левой и правой производной и дифференцируемости слева и справа: $f'_r(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (аналогично, $f'_\ell(x_0)$)

Замечания и примеры: (I) Эти понятия зависят только от топологии на E.
(2) Производная – локальное понятие (зависит только от произвольно малой окрестности т.x_0).
(3) Если f – дифференцируема в т.x_0, то f непр. в т.x_0. Если $\exists f'_r(x_0)$ и $f'_\ell(x_0)$, то f непр. в x_0. При этом f – диф. в $x_0 \Longleftrightarrow f'_r(x_0) = f'_\ell(x_0)$.
(4) В кинематике, если $f(t)$ – положение движущейся точки в момент t, то $f(t_0)$ – мгновенная скорость. Комплексная производная также имеет многочисленные физические приложения, например, в гидродинамике.
(5) Производная постоянной ф-ции = 0; производная линейной ф-ции $x \mapsto ax+b$ ($a, b \in E$), есть постоянная ф-ция a; I/x диф, при $x \neq 0$ и $(I/x)' = -(I/x^2)$; $(\ln x)' = I/x$.
(6) Ф-ция $|x|$ на $\mathbb{R}$ имеет $f_r^+(0) = I$ и $f'_\ell(0) = -I$, т.е. не дифф. в 0.
(7) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin I/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$ – непр. на $\mathbb{R}$, но не имеет в 0 ни правой ни левой производной. $\exists$ ф-ции, непр. на отрезке и не дифференц. ни в одной точке.
(8) Ф-ия $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin I/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ всюду дифференцируема на $\mathbb{R}$, но разрывна в 0 (мы увидим позже, что такая "патология" невозможна для дифференцируемости в $\mathbb{C}$).
(9) Определение дифференцируемости (производной) можно переписать так: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + o(x-x_0)$, где символ $o(x-x_0)$ означает $\varphi(x) \cdot (x-x_0)$, причем $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Это значит, что f при $x \to x_0$ "приближенно линейна". При $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это имеет обычную интерпретацию: график $y = f(x)$ снабжен касательной в т. $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $f'(x_0)$. При $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ это значит, что f локально усроена как умножение на комплексное число, т.е. есть растяжение и поворот.

Формальные правила дифференцирования: I) Линейность. Ф-ции, диф. в x_0, образуют вект. пр-во над К, и $f \mapsto f'(x_0)$ – его линейное отображение в E. Ф-ции, диф. на $\mathcal{V}$, образуют вект. пр-во и $f \mapsto \mathcal{D}f = f'$ – его лин. отображение в вект. пр-во ф-ций $\mathcal{V} \to E$. Предостережение: отображение $f \mapsto \mathcal{D}f$, вообще говоря не непрерывно.
Предложение. Пусть $A : E \to F$ линейный непрерывный оператор. Если $f : \mathcal{V} \to E$ диф. в x_0, то $A \circ f : \mathcal{V} \to F$ – диф. в x_0, и $(A \circ f)'(x_0) = A(f'(x_0))$. Док-во очевидно.
Следствие: если φ – непр. лин. форма на E, то $(\varphi \circ f)'(x_0) = \varphi(f'(x_0))$.
Примеры: I) Если $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathcal{V} \to E_I \times E_2 \times \ldots \times E_n$, то f диф. в $x_0 \Longleftrightarrow$ все f_i диф. в x_0, и $f'(x_0) = (f'_1(x_0), \ldots, f'_n(x_0))$.
2) Если $f(t)$ – положение движ. точки в $\mathbb{R}^3$, и $g(t)$ – проекция $f(t)$ на некот. плоскость вдоль нек-го вектора, то скорость $g(t)$ есть проекция скорости $f(t)$.
3) Если f – комплекснозначная ф-ия (в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), и $a \in \mathbb{C}$, то $(af)'(x_0) = a(f'(x_0))$.
II. Производная произведения. Предл. Пусть $f_i : \mathcal{V} \to E$ – дифф. в x_0 ($i = 1, \ldots, n$), и задано непр. полилинейное отображение $E_I \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$ $(x_I, \ldots, x_n) \mapsto [x_I, \ldots, x_n]$. Тогда отображ. $x \mapsto [f_I(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$ (из $\mathcal{V}$ в F) диф. в x_0, и его производная в x_0 равна $\sum_{i=1}^{n} [f_1(x_0) \ldots f_{i-1}(x_0)\, f'_i(x_0)\, f_{i+1}(x_0) \ldots f_n(x_0)]$
Док-во обычное. В частности, при n=2: $[fg]'(x_0) = ([f'g] + [fg'])(x_0)$.

Примеры. I) Если f – числовая ф-ия, а g – вектор-ф-ия, то $(f\cdot g)'=f'g+fg'$ (произведение $K\times E\to E$).

2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ (все f_i равны просто x) $\Longrightarrow$ производная многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ равна $\sum k a_k x^{k-1}$ $(a_k\in E)$.

3) Имеем евклидово скалярное произведение $\langle\ ;\ \rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Значит, если $f,g:I\to\mathbb{R}^n$, то $\langle f;g\rangle'=\langle f';g\rangle+\langle f;g'\rangle$. В частности, если $\|f(x)\|=const$, т.е. f – отображение в сферу, то $0=\langle f,f\rangle'=2\langle f';f\rangle$, т.е. $f'\perp f\ \forall x\in I$.

4. Если $U(x)$, $V(x)$ – матричные ф-ции $(K\mapsto Mat_n(K))$, то $(UV)'=U'V+UV'$ (произведение – произведение матриц).

5. Поскольку определитель матрицы есть полилинейная функция ее столбцов, получаем следующее правило: производная определителя n-го порядка есть сумма n определителей, получающихся из данного заменой членов k-го столбца $(k=1,2,\dots,n)$ их производными.

3. Производная сложной функции. Предложение. Пусть $f:U\to K$ – числовая ф-ция, а вектор-ф-ция g определена на открытом множестве в K, содержащем $f(U)$. Если f – диф. в x_0, а g – диф-ма в $f(x_0)$, то $g\circ f$ диф-ма, и $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$. Док-во. положим $u(x)=\begin{cases}\dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} & \text{при } f(x)\neq f(x_0)\\ g'(f(x_0)) & \text{если } f(x)=f(x_0)\end{cases}$ Из непр. в x_0 следует, что $u(x)$ непр. в x_0. Но $\dfrac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=u(x)\cdot\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, откуда все следует.

4) Производная обратной ф-ции. Предл. Пусть U, V – открыты в K, $f:U\to V$ – гомеоморфизм, а $g:V\to U$ – обратный гомеоморфизм. Если f диф. в $x_0\in U$ и $f'(x_0)\neq 0$, то g диф-мо в $f(x_0)$, и $g'(f(x_0))=1/f'(x_0)$. Д-во очевидно. Следствие. Если f – диф. на U, и $f'(x)\neq 0$ на U, то g диф. на V, и $g'(y)=1/f'(g(y))\ \forall y\in V$

Замечания. 1) Доказанные утверждения позволяют вычислить производные всех элементарных функций (и это надо уметь делать). Например, $(e^x)'=1/\ln'(e^x)=1/1/_e x=e^x$ при $x\in\mathbb{R}$; $(x^a)'=(e^{a\ln x})'=a/x\cdot e^{a\ln x}=ax^{a-1}$ при $x>0, a\in\mathbb{R}$

2) Все формальные правила могут быть сформулированы для левых и правых производных (сделайте это сами!). Кроме того, если $f:I\to\mathbb{R}$, где I – открыто в $\mathbb{R}$, то очевидно определяется производная, равная $+\infty$ или $-\infty$. Приведенные правила обобщаются и на этот случай.

Теорема о конечных приращениях. Все наши рассуждения до сих пор носили локальный характер. Теперь же мы хотим связать производные с глобальным поведением функции. Дальше некоторое время будет $K=\mathbb{R}$. Сперва рассм. числ. ф-ции.

Предложение. Пусть $f:I\to\mathbb{R}$ имеет локальный максимум в т. x_0. (т.е. $f(x)\le f(x_0)$ для x из нек-рой окрестности x_0). Если $\exists f_r'(x_0)$, то $f'(x_0)\le 0$; если $\exists f_l'(x_0)$, то $f_l'(x_0)\ge 0$. Значит, если f диф-ма в (x_0), то $f'(x_0)=0$. (Аналогично для локального минимума.)

Т. Ролля. Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – непр., диф. на (a,b), и $f(a)=f(b)$, то $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$. Док-во. Если $f=const$, то $f'(x)\equiv 0$. Пусть f принимает значения $>f(a)$. Тогда т. c, где f достигает max (она $\exists$ по т. Вейерштрасса), отлична от a и b. По предыдущему предл. $f'(c)=0$ ч.т.д.

Т. Коши. Если $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ – непр. на $[a,b]$ и дифф. на (a,b), то $\exists x\in(a,b)$: $(f(b)-f(a))\cdot g'(x)=(g(b)-g(a))\cdot f'(x)$.

Док-во. Дост.применить т.Ролля к функции $\varphi(x)=\det\begin{pmatrix}1&1&1\\ f(a)&f(x)&f(b)\\ g(a)&g(x)&g(b)\end{pmatrix}$.

Следствие. Т.Лагранжа. Если $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – непр., и дифф. на (a,b), то $\exists\, c\in(a,b)$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Док-во. Достаточно применить т.Коши к $f(x)=f(x)$ и $g(x)=x$.

Следствие. Если $m\le f'(x)\le M$ на (a,b), то $m\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$.

Следствие. Если $f'\geqslant 0$ на (a,b), то f не убывает; если $f'\le 0$ на (a,b), то f не возрастает; если $f'\equiv 0$, то $f=\mathrm{const}$.

Еще одно полезное следствие: <u>Правило Лопиталя</u>. Пусть $a\in\bar{\mathbb{R}}$, $b>a$, ф-ции f и g – вещественные и дифф-мы на (a,b), и $g'(x)\ne 0$ при $x\in(a,b)$. Пусть $f'(x)/g'(x)\to A$ $(\in\bar{\mathbb{R}})$ при $x\to a$. Тогда каждое из условий:

(а) $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to a$ или

(б) $g(x)\to+\infty$ при $x\to a$

влечет за собой, что $f(x)/g(x)\to A$ при $x\to a$.

<u>Док-во</u>.Пусть сначала $A\ne+\infty$. Выберем $A<p<q<+\infty$, и докажем, что $f(x)/g(x)<q$ в нек-ой окрестности т.а. Выберем $c\in(a,b)$: $f'(x)/g'(x)<p$ при $a<x<c$. В силу т.Ролля $g(x)\ne g(y)$ при $x\ne y$, и можно считать, что $g(x)\ne 0$ при $a<x<c$. По т. Коши $\forall\, x,y$: $a<x<y<c$ имеем:

$$(*)\quad \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}<p\ ,\ \text{где}\ t\in(x,y).$$

В случае (а) устремляя x к a при фиксир. y, получим, что $f(y)/g(y)\le p<q$, что и требовалось. В случае (б) также фиксир.y. При x достаточно близких к a имеем $g(x)>g(y)$, $g(x)>0$.Поэтому, умножив $(*)$ на $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$, получим, что $\frac{f(x)}{g(x)}<p-p\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}$. Отсюда при x достаточно близких к a снова $\frac{f(x)}{g(x)}<q$. Аналогично, если $A\ne-\infty$, и $p<A$, то $\frac{f(x)}{g(x)}>p$ при x дост. близких к a, и предл. доказано.

Прежде, чем переходить к более общей формулировке теоремы о конечных приращениях, приведем типичное применение полученных результатов к док-ву неравенств.

<u>Предл</u>. При $0<a<1$, и $x\geqslant 0$ имеем $f(x)=x^a-ax+a-1\le 0$.

Док-во. Имеем $f'(x)=a(x^{a-1}-1)$, откуда $f'(x)>0$ при $x<1$, и $f'(x)<0$ при $x>1$, т.е. f возрастает при $x\le 1$ и убывает при $x\geqslant 1$. Значит, $f(x)\le f(1)=0$ $\forall\, x\geqslant 0$.

<u>Следствия.</u> 1. Положив $x=\frac{x_1}{x_2}$, получаем, что $x_1^a\cdot x_2^{1-a}\le ax_1+(1-a)x_2$.

Отсюда индукцией по n получаем:

$$x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\le\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n \quad\text{при } x_i\geqslant 0;\ 0<\alpha_i<1,\ \sum_i\alpha_i=1$$

В частности, при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1/n$, получаем неравенство Коши!

2. Положив $a=1/p$, $1-a=1/q$, $x_1=a^p$, $x_2=b^q$, получим: $ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ – это – <u>нер-во Юнга</u> (см.выше).

<u>Теорема о конечных приращениях для вектор-функций</u>. Пусть $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $f: I\to E$ и $g: I\to\mathbb{R}$ – непр. Предположим, что f и g имеют правую производную в $[a,b)\setminus A$, где A – некоторое счетное подмножество ($g'(x)$ может равняться $+\infty$), и $\|f'_r(x)\|\le g'_r(x)$ при $x\in I\setminus A$. Тогда $\|f(b)-f(a)\|\le g(b)-g(a)$. <u>Док-во</u>. Пусть $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, т.е. точки A как-то упорядочены. Фиксируем $\varepsilon>0$, и рассмотрим мн-во $\mathcal{T}=\{\,y\in I\mid$ при $a\le x\le y$ имеем $\|f(x)-f(a)\|\le g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon\sum_{a_n<x}\frac{1}{2^n}\}$. Достаточно док-ть, что $\mathcal{T}=I$. Очевидно, $a\in\mathcal{T}$, и $y\in\mathcal{T}\Rightarrow[a,y]\subset\mathcal{T}$. Отсюда $\mathcal{T}$ – промежуток с началом в a; пусть c – его конец. В силу непр. f и g имеем $c\in\mathcal{T}$; осталось д-ть, что

$c = в$. Предпол., что $c < в$. I случай. $c \notin A$. По определению правой производной $\exists\, y > c$: при $c \le x \le y$ $\|f(x) - f(c) - f'_r(c)(x-c)\| \le \frac{\varepsilon}{2}(x-c)$, $|g(x) - g(c) - g'_r(c)(x-c)| \le \frac{\varepsilon}{2}(x-c)$. Отсюда $\|f(x) - f(c)\| \le \|f'_r(c)\|\cdot(x-c) + \frac{\varepsilon}{2}(x-c) \le g'_r(c)(x-c) + \frac{\varepsilon}{2}(x-c) \le g(x) - g(c) + \varepsilon(x-c)$. Отсюда следует, что $y \in \mathcal{T}$ – противоречие (если $g'_r(c) = +\infty$, то рассуждение еще проще).

2 случай. $c = a_k \in A$. В силу непр. f и g $\exists\, y > c$ такое, что при $c \le x \le y$ $\|f(x) - f(c)\| \le g(x) - g(c) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, откуда снова $y \in \mathcal{T}$. Теорема доказана

Следствия. I. Если $\|f'_r(x)\| \le M$ при $x \in I \setminus A$, то $\|f(в) - f(a)\| \le M(в-a)$. В частности, если $f'_r(x) = 0$ при $x \in I \setminus A$, то $f = const$. Док-во. Положим $g(x) = M\cdot x$.

2. Для числовых функций: если $g'_r(x) \ge 0$ при $x \in I \setminus A$, то g неубывает на I. Док-во: положим $f \equiv 0$.

3. Более общо: если $m \le g'_r(x) \le M$ при $x \in I \setminus A$, то $m(в-a) \le g(в) - g(a) \le M\cdot(в-a)$, причем, если g – не линейная ф-ция, то оба нер-ва строгие. Док-во Применим предыдущее следствие к $g(x) - mx$ и $Mx - g(x)$.

Замечание. Во всех предыдущих рез-тах можно заменить f'_r на f'_e.

Сформулируем теперь теорему о функциях на $\mathbb{C}$.

Предл. Пусть U – откр. выпуклое мн-во в $\mathbb{C}$, и $f: U \to E$ – дифф. Если $\|f'(z)\| \le M$ $\forall z \in U$, то $\|f(в) - f(a)\| \le M\cdot|в - a|$ $\forall a, в \in U$.

Док-во. Положим $g(t) = \frac{1}{в-a} f(a + t(в-a))$, $t \in [0, I]$ $\overset{\text{Тогда}}{\therefore}$ $g'(t) = f'(a + t(в-a))$ $\Rightarrow \|f(в) - f(a)\| = \|g(I) - g(0)\| \cdot |в - a| \le M\cdot|в - a|$.

Следствие. Пусть U – область в $\mathbb{C}$ (т.е. открытое и связное мн-во), и $f: U \to E$ – непр. Тогда $f = const \Longleftrightarrow f' \equiv 0$.

Док-во. Пусть $f' \equiv 0$, и $a \in U$ – фикс. точка. Мн-во $\{z \in U \mid f(z) = f(a)\}$ замкнуто, т.к. f –непр.; в силу предл. оно и открыто $\Longrightarrow$ оно совпадает с U, что и треб.

Приложения теоремы о конечных приращениях. Теорема о дифференцируемости последовательности. Пусть U – открытое связное мн-во в K ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), E – банахово пр-во над K, и (f_n) – послед. диф. отображений $U \to E$. Предположим, что: (I) Послед. $(f_n(x_0))$ сходится для некоторой точки $x_0 \in U$; (2) $\forall a \in U$ $\exists$ круг $B(a)$ с центром в a, в котором послед. (f'_n) сходится равномерно. Тогда $\forall a \in U$ послед. (f_n) сход. равномерно в $B(a)$. Если $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, и $g(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$, то $f(x)$ диф. в U, и $f'(x) = g(x)$.

Док-во. Пусть r – радиус $B(a)$. Применив т. о конечных приращениях к $f_n(x) - f_m(x)$ в $B(a)$, получим:

$$\|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))\| \le \|x - a\| \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\| \le r \cdot \sup_{z \in B(a)} \|f'_n(z) - f'_m(z)\|. \quad (*)$$

Из критерия Коши (поскольку E – банахово) мы видим, что если послед. (f_n) сходится в нек. точке $B(a)$, то она сходится в точке $B(a)$. Отсюда следует что оба мн-ва $\{x \in U \mid f_n(x)$ сходится$\}$ и $\{x \in U \mid f_n(x)$ не сходится$\}$ открыты в U. Поскольку U – связно, из условия (I) следует, что $f_n(x)$ сходится $\forall x \in U$. Из $(*)$ вытекает, что сходимость в $B(a)$ – равномерная. Осталось док-ть, что $f' = g$. Нужно д-ть, что для x, близких к a, $f(x) - f(a)$ мало отличается от $g(a)(x - a)$ /меньше, чем на $\varepsilon\cdot|x-a|$/. Достаточно применить $\varepsilon/3$ прием к $((f(x) - f(a)) \overset{}{\underset{(f_n(x) - f_n(a))}{\approx}} \overset{}{\underset{f'_n(a)(x-a)}{\approx}} g(a)(x-a)$ для больших n.

Вариант для рядов. Если ряд $\sum u_n(x_0)$ сходится для нек. $x_0 \in U$, и $\forall a \in U$ ряд $\sum u'_n$ равномерно сходится в $B(a)$, то ряд $\sum u_n(x)$ равномерно сходится в B(a), и $\left(\sum u_n(x)\right)' = \sum u_n'(x)$.

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)$

Применение к аналитическим функциям. Предл. Степенной ряд дифференцируем в своем круге сходимости, и его производная равна $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$.

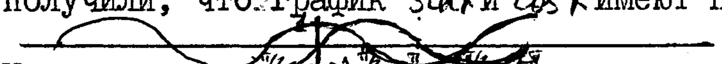
Док-во. Достаточно д-ть, что радиусы сходимости рядов $\sum c_n z^n$ и $\sum n c_n z^{n-1}$ совпадают. Это вытекает из формулы Коши-Адамара, т.к. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Приложения к элементарным функциям. I. При $-1 < x < 1$ имеем $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots$.Док-во. Обе ф-ции равны 0 при x=0 и их производные равны $1/(1+x)$ при $-1 < x < 1$. Значит, эти ф-ции равны. Как уже упоминалось, из т.Абеля следует, что равенство справедливо и при $x = 1$.

2. Имеем $(e^z)' = e^z \ \forall z \in \mathbb{C}$. Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ определялись из равенства $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, дифференцированием мы получаем, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. $\forall x \in \mathbb{R}$ (в действительности это верно и при $x \in \mathbb{C}$).

Предложение. Гомоморфизм $t \mapsto e^{it}$ есть сюръекция $\mathbb{R}$ на $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Его ядро (т.е. $\{t \in \mathbb{R} \mid e^{it} = 1\}$) состоит из целочисленных кратных некоторого положительного числа. По определению это число называется 2π.

Док-во. Рассм. мн-во $I = \{x \geq 0 \mid \cos y > 0$ при $0 \leq y < x\}$. Поскольку cos – непр. ф-ция, и $\cos 0 = 1$, мы видим, что $I = [0, a]$, где $0 < a < +\infty$. Имеем $(\sin x)' = \cos x > 0$ на $[0, a) \Rightarrow \sin x$ возрастает на $I \Rightarrow \sin x > 0$ на $(0, a) \Rightarrow (\cos x)' = -\sin x < 0$ на $(0, a) \Rightarrow \cos x$ убывает на I. Предположим, $a = +\infty$. Тогда $\exists \lim_{x\to\infty} e^{ix} = u \in \mathbb{C}$. Но $\exists x_0$ (близкое к 0), такое, что $e^{ix_0} \neq 1$. Имеем $u = \lim_{x\to\infty} e^{i(x+x_0)} = e^{ix_0} u \Rightarrow u = 0$, чего не может быть, т.к. $|e^{ix}| = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Итак, $a < +\infty$. Отсюда ясно, что $\cos a = 0$, $\sin a = 1$, т.е. $e^{ia} = i$, и отображение $x \mapsto e^{ix}$ есть гомеоморфизм $[0, a]$ на часть S^1, лежащую в первом квадранте. Поскольку $e^{ix} = e^{i(x-a)}$, мы видим, что $x \mapsto e^{ix}$ гомеоморфно отображает отрезки $[a, 2a]$, $[2a, 3a]$, $[3a, 4a]$ на части S^1, лежащие соответственно во II, III и IV квадрантах. Отсюда $4a = 2\pi$, т.е. $a = \pi/2$, и предложение доказано. Попутно мы получили, что график $\sin x$ и $\cos x$ имеют привычный вид:



Следствие. Из каждого комплексного числа извлекается корень всякой натуральной степени (это заполняет пробел в док-ве основной теоремы алгебры в I семестре). Док-во: пусть $z \neq 0$. Тогда $|z| = e^x$ и $\frac{z}{|z|} = e^{iy}$ при некоторых x и y из $\mathbb{R}$, т.е. $z = e^{x+iy}$. Это означает, что $z = w^n$, где $w = e^{1/n\,(x+iy)}$.

Примитивные и интегралы. Пусть I – промежуток в $\mathbb{R}$, E – банахово пр-во над $\mathbb{R}$, и $f: I \to E$ – отображение. Грубо говоря, мы хотим построить ф-цию $g: I \to E$, такую, что $g' = f$. Условие, что f есть чья-то производная на всем I, оказывается очень сильно ограничивающим, как показывает следующее предл.

Предложение. Пусть $g: (a, b) \to E$ – непр. и дифф. на $(a, b) \setminus$ нек-ое счетное подмн-во A. Предположим, что $\exists \lim_{\substack{x\to a_+ \\ x \notin A}} g'(x) = c$. Тогда g продолжается по непрерывности в т.a, и продолженная ф-ция имеет $g_r'(a) = c$.

Д-во. Применим т. о конечных приращениях к ф-ции $g(z) - c\cdot z$; мы получим $\|g(y) - g(x) - c(y-x)\| \leq (y-x)\cdot \sup_{x<z<y,\, z\notin A} \|g'(z) - c\|$ (здесь $a < x < y$). Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ будем иметь (ж) $\|g(y) - g(x) - c(y-x)\| \leq \varepsilon(y-x)$ при x и y достаточно близких к a. Из (ж) видно, что колебание g в т.a равно 0 $\Rightarrow$ по критерию Коши $\exists \lim_{x\to a_+} g(x) \overset{def}{=} g(a)$. Переходя в (ж) к пределу при $x \to a_+$, видим, что $g_r'(a) = c$, что и треб.

Замечание. Можно заменить в условии a на b, и $g_r'(a)$ на $g_l'(b)$.

Следствие. Если g диф. на (а,в), и для нек-го $x_0 \in (а,в)$ $\exists \lim_{x \to x_0+} g'(x)$ и $\lim_{x\to x_0-} g'(x)$, то оба эти предела совпадают с $g'(x_0)$. Иными словами, производная не может иметь разрывов первого рода. Например, "ступенька" не является производной. Но она есть производная кусочно-линейной ф-ции всюду, кроме одной точки. Это подсказывает

Определение. Если f: I → E, то ф-ция g наз. примитивной (или первообразной функции f, если g непр. на I, и имеет производную, равную $f(x)$, всюду кроме некоторого счетного подмн-ва I.

Замечание. Примитивная не изменится, если f изменить на счетном мн-ве точек. В частности, можно считать, что f не определена на счетном мн-ве точек I.

Предложение. Примитивная определена с точностью до прибавления постоянной функции (любые две примитивные f отличаются на константу). Док-во- сразу вытекает из т.о конечных приращениях.

Существование примитивных. Правильные функции.

Будем считать дальше, что I=[а,в]- отрезок в $\mathbb{R}$.

Теорема. Пусть f_n: I → E - послед.ф-ий, и пусть g_n:I → E - примитивная f_n $\forall$ п. Предположим, что $\exists \lim_{n\to\infty} g_n(x_0)$ для нек-го $x_0 \in$ I, и что послед. ($f_п$) равномерно сходится на I к ф-ции f. Тогда послед.($g_п$) равномерно сходится на I к ф-ции g, являющейся примитивной f. Док-во дословно такое же, как у теоремы о почленной дифф. последовательности (это есть ее обобщение).

Следствие.1. Множество $\mathcal{H}$ ограниченных ф-ций I → E, имеющих на I примитивную, есть замкнутое векторное подпространство пр-ва B(I,E) огранич.отображ. I → E; в частности $\mathcal{H}$ банахово.

Следствие 2. Пусть $x_0 \in$ I. Пусть для $f \in \mathcal{H}$ P(f) - есть примтивная f, обращающаяся в 0 при $x=x_0$. Тогда P: $\mathcal{H} \to \mathcal{C}$(I,E) (пр-во непр. отображ.)- есть непрерывный линейный оператор.

Мы выведем из следствия 1 существование примитивных для важного класса функций.

Определение. f:[а,в]→E наз. ступенчатой, если $\exists$ разбиение [а,в] на конечное число промежутков, на каждом из которых функция f постоянна. Иными словами, $\exists$ конечная послед. $а=x_0 < x_I < \ldots < x_п = в$, такая, что f постоянна на всех $(x_{к-I}, x_к)$. Ясно, что ступенчатые ф-ции образуют вект. пр-во. Элементы его замыкания называются правильными функциями.

Следствие 3. Всякая правильная функция на [а,в] имеет примитивную.

Док-во. Ясно, что всякая ступенчатая ф-ция имеет примитивную. Опишем более явно правильные ф-ции. Из определения ясно, что $\forall$ правильная ф-ция ограничена и имеет не более чем счётное число точек разрыва (каждая ступенчатая ф-ция имеет конечное число точек разрыва; если f_n равномерно сходится к f то f непр. всюду, где непр. все f_n (это было раньше)).

Характеризация правильных функций. Предл. Ф-ция f:[а,в] → E правильна ⟺ она имеет односторонние пределы в каждой точке [а,в]. Док-во. ⟹) ясно, что заключение верно для любой ступенчатой ф-ции. Дальше - стандартный $\varepsilon/3$- прием. ⟸) Пусть $\varepsilon>0$. По условию $\forall$ $x\in$[а,в] $\exists V_x=(c_x, д_x) \ni$ x такой, что колебание f на каждом из интервалов I ∩ (c_x, x) и I ∩ (x, $д_x$) не больше ε. Выберем из покрытия $\{V_x\}_{x\in I}$ конечное подпокрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$. Расположим все точки а,в,$x_к$, $c_{x_к}$ и $д_{x_к}$ в последовательность $а=a_0 < a_I < \ldots < a_M = в$. Легко видеть, что каждый интервал $(a_{к-I}, a_к)$ лежит в одном из $(c_{x_к}, x_к)$ или

$(x_к, д_к)$, а значит, колебание f на нем $\le \varepsilon$. Положим $g(a_к) = f(a_к)$, и g на $(a_{к-1}, a_к)$ равным $f(c)$ для нек-го $c \in (a_{к-1}, a_к)$. Ясно, что g – ступенчата, и $\|f-g\| \le \varepsilon$. Отсюда f – правильна.

Замечание. Из определения с односторонними пределами совсем не очевидно, что f ограничена и имеет лишь счетное число точек разрыва (докажите это непосредственно!). Мы будем исследовать примитивные и интегралы только от правильных функций (хотя неверно то, что всякая ф-ция, имеющая примитивную, правильна).

Следствия из характеризации правильных функций: 1. Всякая непр. ф-ция $f: I \to E$ и всякая монотонная ф-ция $f: I \to \mathbb{R}$ правильны.

2. Если $f_к: I \to E_к$ – правильны $(1 \le к \le n)$, и $g: \Pi f_к(I) \to F$ – непр., то сложная ф-ция $g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ правильна. В частности: если f правильна то $\|f\|$ – правильна; правильные числовые функции образуют кольцо.; если f и g правильны, то $\max(f, g)$ и $\min(f, g)$ – правильны.

3. Пусть f – правильна на I, и g – ее примитивная. Тогда $\forall x \in I \; \exists g'_r(x)$ и $g'_e(x)$ (кроме $g'_r(в)$ и $g'_e(a)$), и $g'_r(x) = \lim_{y \to x+} f(y)$, $g'_e(x) = \lim_{y \to x-} f(y)$. В частности, g дифф. в точках непр. f, и $g'(x) = f(x)$. Таким образом, если f – непр., то g – точная примитивная f, т.е. $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ (интересно, что для док-ва этого мы вышли за пределы непр. ф-ций.) Это следствие сразу вытекает из первого предложения в этом раздел

Интегральное исчисление. Определение. Пусть $f: [a, в] \to E$ – правильная функция (E– банахово пр-во над $\mathbb{R}$). Мы полагаем $\int_a^в f(x)\,dx = g(в) - g(a)$, где g – (какая-нибудь) примитивная f.

Связь с интегралом Римана. Разбиением $[a, в]$ назовем конечную послед. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = в$; число $\delta = \max(x_к - x_{к-1})$ наз. диаметром разбиения. Суммой Римана для f относительно разбиения $(x_к)$ будем называть сумму вида: $\sum_{k=1}^{n} f(t_к) \cdot (x_к - x_{к-1})$, где $t_к \in [x_{к-1}, x_к]$.

Предл. Пусть f – правильна на $[a, в]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \|\int_a^b f(t)\,dt - S\| \le \varepsilon$ для любой суммы Римана относительно любого разбиения диаметра $\le \delta$.

Док-во. Обычный $\varepsilon/3$-трюк сводит дело к случаю, когда f – ступенчатая. Пусть g – примитивная f, и $y_1 < y_2 < \ldots < y_м$ – мн-во точек разрыва ф-ции f. Ясно, что $\exists$ не более чем 2м отрезков $[x_{к-1}, x_к]$ на которых f не постоянна. На каждом из них $\|g(x_i) - g(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})\| \le 2M(x_i - x_{i-1}) \le 2M\delta$, где $M = \sup_{[a,b]} \|f\|$ (это т.о конечных приращениях для функции $g(x) - f(t_i) \cdot x$); в то же время на остальных отрезках $g(x_к) - g(x_{к-1}) - f(t_к)(x_к - x_{к-1}) = 0$. Отсюда $\|\int_a^b f(t)\,dt - S\| \le 4Mm \cdot \delta$ и достаточно взять $\delta = \varepsilon/4Mm$.

Таким образом, для нашего интеграла выполняются все наглядные представления, связанные с интегралом Римана.

Заметим, что т. Ньютона – Лейбница ($(\int_a^x f(t)\,dt)' = f(x)$ для непр. f), являющаяся краеугольным камнем анализа, при нашем подходе становится просто определением.

Свойства интегралов. Все они получаются простым переложением на язык интегралов свойств производных, доказанных раньше.

1. $\forall x, y, z \in [a, в]$ имеем $\int_x^x f(t)\,dt = 0$; $\int_x^y f\,dt + \int_y^x f\,dt = 0$; $\int_x^y f\,dt + \int_y^z f\,dt + \int_z^x f\,dt = 0$

2. Линейность: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dt = \alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt$

3. Если E, F – банаховы, $u: E \to F$ – непр. лин. опер., $f: I \to E$ – правиль

на, то $u \circ f$: I – F – правильна, и $\int_a^b u(f(t))\,dt = u\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)$.

4. Интегрирование по частям. Пусть E, F и G – банаховы пр-ва $(x,y) \to [x,y]$ – непр. билинейное отображ. $E \times F \to G$, $f: I \to E$ и $g: I \to F$ – непр. ф-ии, явл. примитивными правильных ф-ций (обозначим их f' и g'). Тогда ф-ции $[f,g']$ и $[f',g]$ – правильны и $\int_a^b [f'(t)g(t)]\,dt = [f(t),g(t)]\Big|_a^b - \int_a^b [f(t),g'(t)]\,dt$.
(обозначение $F(t)\Big|_a^b$ обозначает $F(в) - F(a)$).

5. Замена переменных. Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ – непр. ф-ция, явл. примитивной правильной ф-ции $J \supset f(I)$ – откр. интервал, $g: J \to E$ непр. (или g – прав., а f – монотонная). Тогда $\int_a^b g(f(t))f'(t)\,dt = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,du$.
Док-во: если h – примитивная g, то $h \circ f$ – примитивная ф-ции $g(f(t))\cdot f'(t)$.

6. Теорема о среднем. Пусть числовая ф-ция f правильная на $I = [a,в]$, $J \subset I$ – мн-во точек, где f непр., $m = \inf_{x \in J} f(x)$, $M = \sup_{x\in J} f(x)$. Тогда $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \le M$; если $f(x) \ne const$ на J, то оба нер-ва – строгие.
Следствие I. Если $f(x) \geqslant 0$ на J, то $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$; если $f \ne 0$ на J, то оба нер-ва – строгие.
Следствие 2. Пусть числовая ф-ция g прав. на I и $g(x) \geqslant 0$ в своих точках непр. Тогда $m\int_a^b g(t)\,dt \le \int_a^b f(t)g(t)\,dt \le M\int_a^b g(t)\,dt$.

Теорема о среднем для вектор-ф-ций. Пусть $f: I \to E$ – прав. Тогда
$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

Приложение: длина дуги кривой. Пусть E – банахово пр-во. Кривой в E наз. непр. отобр. $\gamma: [a,в] \to E$. Длиной кривой γ назовем $\sup \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = в)$, т.е. верхнюю грань длин ломаных, вписанных в данную кривую. γ наз. спрямляемой, если длина $\gamma < \infty$.

Следующие св-ва очевидны из определения (и нер-ва тр-ка):
1) Если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = в$ – разбиение $[a,в]$ и $\gamma_i = \gamma|[x_{i-1},x_i]$, то γ – спрямляема $\Longleftrightarrow$ все γ_i спрямляемы, причем длина γ равна сумме длин γ_i.
2) Если $\tau: [c,d] \to [a,в]$ – гомеоморфизм, то γ спрямляема $\Longleftrightarrow \gamma\circ\tau$ спрямляема, и их длины равны (длина не зависит от параметризации кривой).

Предл. Пусть γ является примитивной кусочно-непр. правильной ф-ции γ'. Тогда γ спрямляема и ее длина равна $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$.

Док-во. В силу св-ва 1) выше можно считать, что γ' непр. на $[a,в]$. Имеем
$$\sum_{i=1}^{n} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| = \sum \left\|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt\right\| \le \sum \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$
$\Longrightarrow$ длина $\gamma \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$. В обратную сторону воспользуемся тем, что γ' равномерно непр. (докажем это чуть позже). Выберем $\varepsilon > 0$, а затем $\delta > 0$ такое, что $\|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \le \varepsilon$ при $|s-t| \le \delta$. Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = в$ – разбиение диаметра $< \delta$. Если $t \in [x_{i-1}, x_i]$, то $\|\gamma'(t)\| \le \|\gamma'(x_i)\| + \varepsilon \Longrightarrow$
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \le \|\gamma'(x_i)\|\cdot(x_i - x_{i-1}) = \left\|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\gamma'(t) + \gamma'(x_i) - \gamma'(t))\,dt\right\|$$
$$\le \left\|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt\right\| + \left\|\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\gamma'(x_i) - \gamma'(t))\,dt\right\| \le \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + \varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$
Складывая по $i = 1,\ldots,n$, получаем, что $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \le$ длина $\gamma + 2\varepsilon(в-a)$. Поскольку ε – произвольно, предл. доказано.

Следствие. (натуральная параметризация кривой). В условиях предложения пусть $\gamma''(x)=0$ лишь в конечном числе точек. Положим $s(x)=\int_a^x\|\gamma'(t)\|dt$. Тогда s – гомеоморфизм $[a,b]\to[0,\ell]$, (где ℓ – длина γ). Пусть $\tau:[0,\ell]\to$ $\to[a,b]$ – обратный гомеоморфизм; параметризация $s\to\gamma(\tau(s))$ наз. натуральной. Имеем: $(\gamma\circ\tau)'(s)=\gamma'(\tau(s))/\|\gamma'(\tau(s))\|$ (в тех точках s, где $\gamma'(\tau(s))$ существует и $\neq 0$); в частности, $\|(\gamma\circ\tau)'(s)\| = 1$. Иными словами, параметр s имеет смысл длины кривой.

Пример. Параметризация окружности $[0,2\pi]\to S^1$ ($t\mapsto e^{it}$) – натуральная, поскольку $(e^{it})'=ie^{it}\Rightarrow\|(e^{it})'\| = 1$. Это значит, что t есть длина дуги окружности, проходимой в положительном направлении от $(1,0)$ до e^{it} = $=(\cos t,\sin t)$. В частности, длина S^1 равна (как и следовало ожидать) 2π.

/Долг из I семестра/. Если X – компакт, Y – метрич.пр-во, и $f: X\to Y$ – непр., то f – равномерно непр. Док-во. От противного. Если f – не равномерно непр., то $\exists\varepsilon>0$ и две последовательности (x_n) и (y_n) в X такие, что $d(x_n,y_n)\leq 1/n$ и $d(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon$. Выберем из (x_n) сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}\to x$. Тогда $y_{n_k}\to x$, и из непр. f в точке x следует, что $d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))<\varepsilon$ при больших к. Противоречие!

Нахождение примитивных.

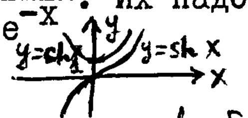
Предл. Если $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ – ф-ция, аналитическая в круге $|x-a|<R$, то она имеет примитивную в этом круге $g(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ (т.е. $g'(x)=$ $=f(x)$), и радиусы сходимости f и g совпадают.

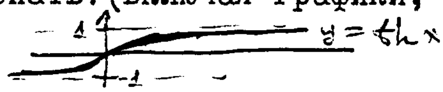
Это сразу следует из предложения о производной аналитической ф-ции.

Чтобы находить примитивные, надо иметь запас "табличных" интегралов, т.е. элементарных ф-ций.

Список элементарных ф-ций: прежде всего e^z $(z\in\mathbb{C})$, $\ln x$ $(x>0)$, x^a $(x>0$ $a\in\mathbb{R})$. Далее, из e^z получаются функции $\cos z$ и $\sin z$ $(z\in\mathbb{C})$: $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Остальные тригонометрические ф-ции: $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{ctg}x$. Обратные тригонометрические ф-ции: $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$; (впрочем, $\arccos x=\pi/2-\arcsin x$), $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$.

Гиперболические ф-ции: $\operatorname{ch}x=\cos ix=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh}x=-i\sin ix=1/2\cdot(e^x-e^{-x})$, $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Их надо знать! (включая графики, основные тождества и т.д.)





Обратные гиперболические ф-ции: arcsh, $\operatorname{arcch}:[1,+\infty)\to[0,+\infty)$; $\operatorname{arcth}:(-1,1)\to\mathbb{R}$

Доказать самим: $\operatorname{arcsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $\operatorname{arcch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$, $\operatorname{arcth}x=$ $=1/2\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$. От всех этих функций надо знать производные и уметь использовать их для нахождения примитивных, т.е. интегрирования.

Таблица ("табличные интегралы")

f	f'	f	f'	f	f'	f	f'	f	f'
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{ch}x$	$\operatorname{sh}x$	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arcsh}x$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\ln$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{sh}x$	$\operatorname{ch}x$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\operatorname{arcch}x$	$1/\sqrt{x^2-1}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\operatorname{tg}z$	$1/\cos^2 z$	$\operatorname{ctg}z$	$-1/\sin^2 z$	$\operatorname{arctg}x$	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{arcth}x$	$1/(1-x^2)$

Два примера вычисления примитивных: I.Мы знаем примитивную для e^{az}: это $\frac{1}{a}e^{az}$ ($a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$). Поскольку $\sin x$, $\cos x$, а также их натуральные степени есть линейные комбинации экспонент (с мнимым показателем), это позволяет находить примитивные ф-ций вида $e^{ax}\cdot(\cos\beta x)^p\cdot(\sin\gamma x)^q$ ($p,q\in\mathbb{Z}_+$).

Пример: Имеем $\sin^{2n}x=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}(e^{ix}-e^{-ix})^{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}e^{2(n-k)ix}=\frac{1}{2^{2n}}\left(\binom{2n}{n}+2\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\cdot\binom{2n}{n-j}\cdot\cos 2jx\right)$, откуда $\int_0^x\sin^{2n}t\,dt=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\left[\binom{2n}{n}x+\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\frac{1}{j}\binom{2n}{n-j}\cdot\sin 2jx\right]$. В частности, $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$. Для $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt$ этот метод дает довольно сложное выражение, но он может быть вычислен другим полезным приемом: положим $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt$. При $n\geqslant 1$ имеем: $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}(-\cos t)'dt=-\sin^{2n}t\cos t\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot 2n\cdot\sin^{2n-1}t\cdot\cos t\,dt=2n\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2t)\sin^{2n-1}t\,dt=2n\cdot I_{n-1}-2n\cdot I_n$, откуда $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. Значит, $I_n=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot I_0=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ (вычисленный выше интеграл $J_n=\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt$ может быть вычислен точно так же).

Следствие. Формула Валлиса: $\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)$.

Док-во: очевидно, $I_{n-1}\geqslant J_n\geqslant I_n>0$, и $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$. Значит, $\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{J_n}=1$, а это и есть формула Валлиса.

2. Интегрирование рациональных функций. Пусть $R(x)$ – рац. ф-ция вещественного аргумента x (с комплексными коэффициентами). Покажем, как можно найти ее примитивную. Из алгебры (должно быть) известно, что $R(x)$ есть линейная комбинация ф-ций вида x^n ($n\in\mathbb{Z}_+$) и $1/(x-a)^m$ ($m\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{C}$). Примитивная x^n равна $x^{n+1}/(n+1)$; примитивная $1/(x-a)^m$ при $m>1$ равна $-\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$; наконец, при $a\in\mathbb{R}$ примитивная $1/(x-a)$ равна $\ln|x-a|$. Для нахождения примитивной $1/(x-a)$ при $a\notin\mathbb{R}$ нам нужен

Комплексный логарифм. Пусть $B=\{x+iy\in\mathbb{C}\mid -\pi<y<\pi\}$ – полоса в $\mathbb{C}$, а $F=\mathbb{C}\setminus\{x\leqslant 0\}$. Тогда ф-ция e^z задает биекцию B на F. Поскольку e^z переводит квадратик  в фигуру , ясно, что e^z есть открытое отображ., т.е. является гомеоморфизмом B на F. Обозначим обратное отображение $F\to B$ через $\ln z$ (на положительной веществ. оси он совпадает с ранее определенным $\ln x$). По теореме о диф. обратной ф-ции $\ln z$ диф. в F и $(\ln z)'=1/z$ при $z\in F$. Тем самым, примитивная ф-ции $1/(x-a)$ /$x\in\mathbb{R}$, $a\notin\mathbb{R}$) равна $\ln(x-a)$. Явная формула для $\ln z$: пусть $\ln(x+iy)=u+iv$. Тогда $u=\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, а
$$v=\begin{cases}\pi/2-\operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \text{при } y>0\\ 0 & \text{при } y=0\\ -\pi/2-\operatorname{arctg}\frac{x}{y} & \text{при } y<0\end{cases}$$
(Докажите! Это – обязательная задача).

Замечание. Ф-ция $\ln z$ не имеет предела в точках отрицат. веществ. полуоси. Более точно, при $x_0<0$ имеем: $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0+}}\ln(x+iy)=\ln|x_0|+i\pi$, а $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\ln(x+iy)=\ln|x_0|-i\pi$.

Высшие производные. По определению $f''(x)=(f')'(x),\ldots,f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$ /Другое обозначение $D^n f(x)=f^{(n)}(x)$/. Ясно, что $D^m(D^n f)=D^{m+n}f$.

Предложение. Мн-во ф-ций $:I\to E$, n раз дифференцируемых на I (или в данной точке $x_0\in I$) есть вект. пр-во, а отображение $f\mapsto D^n f$ (соотв. $f\mapsto f^{(n)}(x_0)$) – линейно. Д-во. очевидно.

Предложение. /Формула Лейбница/. Если $(x,y)\mapsto[xy]$ – непр. билинейное отображение $E\times F\to G$, $f: I\to E$ и $g: I\to F$ – имеют на I производные n-го порядка, то $[fg]$ также имеет n-ю производную, и она равна

$$Д^п[fg]=\sum_{k=0}^{n}\binom{п}{к}[f^{(k)}g^{(n-k)}]$$

(Это сразу получается индукцией по п.) Индукцией по к легко получить ф-лу Лейбница для к сомножителей: $Д^п[f_1f_2\cdots f_k]=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1;n_2;\ldots;n_k}\cdot[f_1^{(n_1)}\cdot f_2^{(n_2)}\cdots f_k^{(n_k)}]$, где $\binom{n}{n_1;n_2;\ldots;n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ – полиномиальный коэффициент.

Менее известное, хотя и очень полезное обобщение формулы $[fg]'=[f'g]+[fg']$ дает формула: $[f^{(n)}g]+(-1)^n[fg^{(n)}]=\mathcal{D}([f^{(n-1)}g]-[f^{(n-2)}g']+\ldots+(-1)^{n-1}[fg^{(n-1)}])$ (док-во очевидно).

В интегральной форме отсюда следует формула интегрирования по частям п-го порядка: $\int_a^b[f^{(n)}g]dt=(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[f^{(n-1-k)}g^{(k)}])\Big|_a^b+(-1)^n\int_a^b[fg^{(n)}]dt$

Она часто позволяет сразу вычислить примитивные, заменяя многократное обычное интегрирование по частям. Пример. Примитивная $e^{ax}\cdot x^п$ ($п\in\mathbb{Z}_+, a\in\mathbb{C}$) равна $e^{ax}\cdot\left[\frac{x^n}{a}-\frac{nx^{n-1}}{a^2}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3}-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\right]$ (сделать самим, взяв $f(x)=e^{ax}/a^п$, $g(x)=x^п$).

Еще одно приложение: многочлены Лежандра. Рассмотрим евклидово пр-во вещественных многочленов на $[-I,I]$ со скалярным произведением $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(x)\cdot Q(x)\,dx$. Применим процесс отрогонализации к многочленам $1,x,x^2,\ldots$ Что получится? Ответ: с точностью до положительных множителей получаются многочлены Лежандра: $P_п(x)\overset{def}{=}\frac{I}{2^пп!}Д^п((x^2-I)^п)$. Док-во: ясно, что $\deg P_п=п$ и старший коэффициент $P_п(x)$ положителен (и равен $\frac{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{2^n\cdot n!}$).

Осталось доказать, что $\int_{-1}^{1}P_п(x)\cdot x^м\,dx=0$ при $0\le м<п$. По формуле интегрирования по частям п-го порядка имеем $\int_{-1}^{1}P_п(x)x^м\,dx=\frac{I}{2^пп!}\sum_{k=0}^{n-1}Д^{п-I-к}((x^2-I)^п)\cdot Д^кx^м\Big|_{-1}^{1}$ (*) /второй интеграл отсутствует, т.к. $Д^пx^м=0$/. Но очевидная индукция показывает, что многочлен $Д^{п-I-к}((x^2-I)^п)$ делится на $(x^2-I)^{к+I}$, так что все слагаемые в правой части (*) обращаются в 0.

Обязательная задача. Доказать, что $\|P_п\|^2=\frac{2}{2п+I}$. /Указание: вычислите $\int_{-1}^{1}P_п(x)x^п\,dx$. Интегрирование по частям п-го порядка сводит его к интегралу $\int_{-1}^{1}(I-x^2)^п dx$, а последний сводится заменой переменных к интегралу $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt$. Все эти (и подобные) интегралы надо уметь вычислять!/

Еще задача: Доказать, что $P_п(I)=I$, $P_п(-I)=(-I)^п$ /Воспользуйтесь ф-лой Лейбница/.

Рассмотрим геометрический смысл второй производной.

Выпуклые функции. Пусть I – промежуток в $\mathbb{R}$, и $f:I\to\mathbb{R}$ – ф-ция. $\forall x\in I$ положим $M_x=(x,f(x))\in\mathbb{R}^2$ – соотв. точка графика f.

Определение: f наз. выпуклой, если $\forall$ точек $x\le z\le x'$ из I точка M_z лежит не выше отрезка $[M_x M_{x'}]$. Иными словами, $f(\lambda x+(1-\lambda)x')\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(x')$ $\forall\lambda\in[0,1]$.

Предл. Если $x_I\le x_2\le\ldots\le x_п$ – точки I, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n>0$ и $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=I$, то $f(\sum_i\lambda_ix_i)\le\sum_i\lambda_if(x_i)$. Док-во: при п=2 это определение выпуклой ф-ции. Далее – индукция по п. Положим $\mu=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}$, $x=\frac{1}{\mu}\sum_{i\le n-1}\lambda_ix_i$. Ясно, что $x_1\le x\le x_п$, т.е. $x\in I$, и по предполож. индукции $\mu f(x)\le\sum_{i\le n-1}\lambda_if(x_i)$. Но тогда $f(\sum_{i\le n}\lambda_ix_i)=f(\mu x+(I-\mu)x_п)\le\mu f(x)+(I-\mu)f(x_п)\le\sum_{i\le n}\lambda_if(x_i)$, что и требовалось.

Критерий выпуклости. Ф-ция $f:(a,в)\to\mathbb{R}$ выпукла на $(a,в)\iff f$ явл. примитивной некоторой монотонно неубывающей ф-ции $g:(a,в)\to\mathbb{R}$.

Следствие. Пусть f дважды дифференцируема на $(a,в)$. Тогда f выпукла $\iff$ $f''(x)\ge0$ $\forall x\in(a,в)$.

<u>Приложение</u>. Функция e^x выпукла на $\mathbb{R}$, т.к. $(e^x)''=e^x>0$. Значит, $e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i} \le \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{x_i}$ $\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, $\lambda_i>0$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$. Положим $a_k=e^{x_k}$, т.е. $a_k>0$ – произвольные положительные числа. Мы снова получаем нер-во $\prod_k a_k^{\lambda_k}\le\sum_k \lambda_k a_k$. При $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=1/n$ – это нер-во Коши.

<u>Док-во критерия выпуклости</u>. <u>Достаточность</u>. Пусть $a<x<x'<в$, и $z=\lambda x+(1-\lambda)x'$ $(\lambda\in(0,1))$, т.е. $z-x=(1-\lambda)(x'-x)$ и $x'-z=\lambda(x'-x)$. Сдвигая f на константу (на свойстве выпуклости это не отразится), можно считать, что $f(y)=\int_x^y g(t)\,dt$ на $[x,x']$. Преобразуем нер-во, кот. мы должны док-ть:

$$\int_x^z g(t)\,dt \le (1-\lambda)\int_x^{x'} g(t)\,dt \iff \lambda\int_x^z g(t)\,dt \le (1-\lambda)\int_z^{x'} g(t)\,dt.$$

По условию, $g(t)\le g(z)$ при $t\le z \Rightarrow \lambda\int_x^z g(t)\,dt \le \lambda g(z)(z-x) = \lambda(1-\lambda)g(z)(x'-x)$, аналогично, $(1-\lambda)\cdot\int_z^{x'}g(t)\,dt \ge (1-\lambda)g(z)(x'-z)=\lambda(1-\lambda)g(z)(x'-x)$, ч.т.д.

<u>Необходимость</u> докажем в несколько шагов. (1) Пусть f – выпукла на $(а,в)$ и $а<x<y<x'<в$. Тогда $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\le\frac{f(x')-f(y)}{x'-y}$ это очевидно:

(2) В силу шага (1), f имеет конечные f'_r и f'_l в каждой точке $(а,в)$, причем $f'_l(x)\le f'_r(x)\le\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\le f'_l(x')\le f'_r(x')$. В частности, f – непр. на $(а,в)$

(3) Положим $g(x)=f'_r(x)$. В силу (2) $g(x)$ неубывает. Осталось док-ть, что f – примитивная ф-ции g, т.е. $f'(x)=g(x)$ всюду, кроме м.б. счетного числа точек. Иначе говоря, нужно док-ть, что мн-во $\{x\in(а,в) \mid f'_l(x)\ne f'_r(x)\}$ не более, чем счетно. Это снова ясно из (2), поскольку интервалы $(f'_l(x), f'_r(x))$ для таких точек попарно не пересекаются. Критерий доказан.

<u>Формула Тэйлора</u>: Если $\exists f^{(n)}(a)$, то положим $r_n(x)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Тогда: (а) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\ne a}}\frac{r_n(x)}{(x-a)^n}=0$. (б) Если $f^{(n)}(x)$ – существует на I, непр. и является примитивной правильной ф-ции $f^{(n+1)}(x)$, то $r_n(x)=\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$. (в) Если $\|f^{(n+1)}(x)\|\le M$ на I, то $\|r_n(x)\|\le M\cdot\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$; Если же f – числовая, и $m\le f^{(n+1)}(x)\le M$ на I, то $m\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\le r_n(x)\le M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ при $x\ge a$.

<u>Док-во</u>. (а) Индукция по n. При n=1 утв. верно. Имеем $r'_n(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)-\dots-\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ – это остаточный член (n-1)-го порядка для ф-ции f'. По предп. индукции $\forall\varepsilon>0\ \exists h>0: \|r'_n(y)\|\le\varepsilon\cdot|y-a|^{n-1}$ при $|y-a|\le h$ и $y\in I$. Пусть $a<x<a+h$. По т. о конечных приращениях, примененной к функциям r_n и $\frac{\varepsilon}{n}(y-a)^n$, получаем $\|r_n(x)\|\le\frac{\varepsilon}{n}(x-a)^n$, что и треб. Аналогично для $a-h<x<a$.

(б) В формуле интегрир. по частям n-го порядка заменим f на f', g на $\frac{(t-x)^n}{n!}$ и в на х. Мы получим: $\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(t-x)^n}{n!}\,dt=-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(n-k)}(a)\cdot\frac{(a-x)^{n-k}}{(n-k)!}+(-1)^n\big(f(x)-f(a)\big)$. Умножив обе части на $(-1)^n$, получим требуемое.

(в) сразу следует из (б) и теоремы о среднем.

<u>Ф-ла Тэйлора для ф-ций комплексного аргумента</u>. Пусть $U\subset\mathbb{C}$ – откр., содержащее отрезок $[a,x]$, и $f:U\to E$ имеет непр. $f^{(n+1)}$ в U. Тогда

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+t(x-a))\,dt\cdot(x-a)^{n+1}$$

В частности, если $\|f^{(n+1)}(x)\| \leq M$ в V, то остаточный член по норме не превосходит $M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. Док-во. Надо применить обычную формулу Тэйлора к функции $g(t)=f(a+t(x-a))$.

Ряд Тэйлора. Пусть f беск.дифф. в окрестности точки а. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ наз. рядом Тэйлора ф-ции f относительно т.а. Он может расходиться, а если он сходится, то его сумма не обязана равняться $f(x)$. Пример. $f(x)=e^{-1/x^2}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ бесконечно дифф. на $\mathbb{R}$, и $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$ (проверьте это) т.е. ее рад Тэйлора относит.0 равен 0.

Однако справедливо следующее

Предложение. Если $f(x)$ представляется как сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ в нек-ой окрестн. т. а, то она беск. дифф. в этой окрестн. и этот ряд есть ее ряд Тэйлора, т.е. $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Тем самым коэффициент c_n определяется однозначно значениями f в сколь угодно малой окрестности т.а.

Д-во. Ясно, что сдвигая аргумент можно считать, что $a=0$; очевидно, что $c_0=f(0)$. Ранее было доказано, что $f'(x)=\sum_{n\geq 1}nc_nx^{n-1}$, причем этот ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный. Беря следующие производные, получаем, что f беск.дифф. в своем круге сходимости, и $f^{(n)}(x)=\sum_{k\geq n}k(k-1)\cdots(k-n+1)c_k\cdot x^{k-n}$. В частности, $f^{(n)}(0)=n!\,c_n$, что и треб.

Разложение элементарных функций. Мы уже знаем разложение экспоненты $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots$ (ряд сходится на всем $\mathbb{C}$). Ф-ла Тэйлора позволяет оценить скорость сходимости: n-ый остаток равен $r_n(z)=z^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}e^{zt}dt$. Если $z=x+iy$, то $|e^{zt}|=e^{xt}\leq\begin{cases}1 & \text{при } x\leq 0\\ e^x & \text{при } x>0\end{cases}$, откуда $|r_n(z)|\leq\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$ при $x\leq 0$, и $|r_n(z)|\leq\frac{|z|^{n+1}e^x}{(n+1)!}$ при $x>0$. При $z=x\in\mathbb{R}$ получаются оценки с двух сторон: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}<r_n(x)<\frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$ при $x>0$; знак $r_n(x)$ равен $(-1)^{n+1}$ и $\frac{|x|^{n+1}e^x}{(n+1)!}<r_n(x)<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ при $x<0$.

По той же схеме оценивается скорость сходимости рядов $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots$, $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots$, $\operatorname{sh}z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots$, $\operatorname{ch}z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots$.

Обязат. задача. При $x\in\mathbb{R}$ и $\forall n$ остаточный член n-го порядка в ряде Тэйлора $\sin x$ и $\cos x$ не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда и совпадает с ним по знаку. В частности, получаем: $1-x^2/2\leq\cos x\leq 1\ \forall x\in\mathbb{R}$, $x-x^3/6\leq\sin x\leq x\ \ \forall x\geq 0$.

Биномиальная формула. Функция $f(x)=(1+x)^a$ определена при $x>-1$ $(a\in\mathbb{R})$. Поскольку $f^{(n)}(x)=a(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)\cdot(1+x)^{a-n}$, ряд Тэйлора ф-ции f отн-но $x=0$ имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$. Этот ряд имеет смысл $\forall a\in\mathbb{C}$; обозначим его через $g(x)$. Предл. Радиус сходимости $g(x)$ равен 1 $\forall a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_+$ (при $a\in\mathbb{Z}_+$) $g(x)$ – полином, т.е. имеет бесконечный радиус сходимости). Док-во: $\left|\frac{\binom{a}{n+1}\cdot x^{n+1}}{\binom{a}{n}\cdot x^n}\right|=\left|\frac{a-n}{n+1}\right||x|\to|x|$ при $n\to\infty$. Поэтому радиус сходимости равен 1 по признаку Даламбера. Доопределим ф-цию $(1+z)^a$ при $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, $a\in\mathbb{C}$ формулой $(1+z)^a=e^{a\ln(1+z)}$ ($\ln$ – комплексный, определен выше).

Теорема. $(1+z)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}z^n$ при $|z|<1$ $(\forall a\in\mathbb{C})$. Док-во. Снова обозначим левую и правую части через $f(z)$ и $g(z)$. Они определены в круге $|z|<1$, Значит, ряд $\arcsin 1$ сходится по признаку сравнения.

дифф. в этом круге, и верно $(1+z)f'(z)=af(z)$; $(1+z)g'(z)=ag(z)$. (Последнее равенство легко проверяется вычислениями со степенными рядами) Отсюда $f'(z)\,g(z)=g'(z)\,f(z) \Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)'(z)=0$ /$f(z)\neq 0$ – очевидно/ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{g}{f}=\mathrm{const}=\frac{g(0)}{f(0)}=1$, что и треб.

<u>Разложения $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$</u>. Имеем по биномиальной формуле: $(\ln(1+x))'=\frac{1}{(1+x)}=1-x+x^2-x^3+\ldots$, $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$,

$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}x^{2n}+\ldots$

(все при $|x|<1$). Интегрируя, получаем, что при $|x|<1$

$\ln(1+x)=x-x^2/2+x^3/3-\ldots+(-1)^{n-1}x^n/n+\ldots$; $\operatorname{arctg}(x)=x-x^3/3+x^5/5+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot(x^{2n-1})/(2n-1)+\ldots$; $\arcsin x=x+x^3/6+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot x^{2n+1}+\ldots$ На границе круга сходимости: при $x=1$ ряды $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$ сходятся (неабсолютно) по признаку Лейбница о знакопеременных рядах. По т.Абеля получаем тождества: $\ln 2=1-1/2+1/3-\ldots$; $\pi/4=\operatorname{arctg} 1=1-1/3+1/5-\ldots$ (тожд. Лейбница). Ряд $\arcsin x$ при $x=1$ сходится абсолютно, а значит нормально сходится в замкнутом круге $|x|\leq 1$.

<u>Док-во</u>: по формуле Валлиса $\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)/\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{(2n+1)^{3/2}}\right)\to 1$ при $n\to\infty$.

Следствие: $\arcsin 1=\pi/2=1+1/6+\ldots+1/(2n+1)\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}+\ldots$ Этот ряд сходится намного быстрее, чем ряд Лейбница. Впрочем, еще намного быстрее сходится ряд $\arcsin(1/2)=\pi/6=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$.

<u>Упражнение</u>. Получите разложения обратных гиперболических функций.

Мы получили разложение в ряды всех элементарных ф-ций, кроме tg и ctg. Разложим в ряд Тэйлора ф-цию $z\operatorname{ctg} z$ (как ни странно, это трудная и важная задача). (Значение ф-ции в 0 по непр. равно 1). (Ясно, что $z\neq n\pi$.)

<u>Теорема</u>. а) (Эйлерово разложение $\operatorname{ctg} z$): $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\cdot\pi$ имеем: $\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right)$, причем ряд в правой части нормально сходится на любом компакте в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\cdot\pi$. б) Обозначим через S_{2k} сумму $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\ldots$ ($k\geq 1$). Тогда при $|z|<\pi$ $z\operatorname{ctg} z$ раскладывается в степенной ряд: $z\operatorname{ctg} z=1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}}{\pi^{2k}}\cdot z^{2k}$

Ясно, что $1\leq S_{2k}\leq S_2$ $\forall k\in\mathbb{N}$, откуда радиус сходимости последнего ряда равен π. <u>Следствие</u>: Имеем тождество $\left(1-\frac{2S_2}{\pi^2}\cdot z^2-\frac{2S_4}{\pi^4}\cdot z^4-\ldots\right)\cdot\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\right)=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)$ откуда можно последовательно найти все S_{2k}. Например, $S_2=\pi^2/6$, $S_4=\pi^4/90$; вообще, S_{2k}/π^{2k} – рациональное число. <u>Док-во теоремы</u>. Прежде всего, выведем б) из а). В силу а) имеем при $|z|<\pi$ $1-z\operatorname{ctg} z=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2-z^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{1}{1-z^2/n^2\pi^2}\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}=$ $=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\cdot\pi^{2k}}$. При $|z|<\pi$ семейство $\left(\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}\right)_{(k,n\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})}$ абсолютно суммируемо, как следует из проведенной выкладки, т.к. сумма всякого конечного числа членов семейства $\frac{|z|^{2k}}{n^{2k}\cdot\pi^{2k}}$ не превосходит $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{n^2\pi^2-|z|^2}<\infty$. Используя ассоциативность абс. сходящихся семейств, получим $1-z\operatorname{ctg} z=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}=$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_{2k}\cdot z^{2k}}{\pi^{2k}},$$

что и требуется.

Перейдем к док-ву части а). Прежде всего сформулируем и докажем (уже ис-

пользовавшуюся выше) теорему о разложении рациональной ф-ции: каждая рациональная ф-ция $R(z)$ над $\mathbb{C}$ однозначно представляется в виде $R(z)$ = многочлен от z + лин. комбинация (над $\mathbb{C}$) выражений вида $1/(z-a)^n$ ($n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{C}$).
Д-во. Лемма из алгебры: Если $Q_1(z)$ и $Q_2(z)$ взаимно простые полиномы, то $\exists$ полиномы $P_1(z)$ и $P_2(z)$, такие, что $P_1(z)Q_1(z)+P_2(z)Q_2(z)\equiv 1$.
Док-во леммы.: идеал в $\mathbb{C}[z]$, порожденный Q_1 и Q_2, главный, т.к. $\mathbb{C}[z]$ - кольцо главных идеалов. Поскольку НОД$(Q_1,Q_2)=1$, этот идеал равен $\mathbb{C}[z]$, отсюда следует наше утверждение.

Док-во теоремы о разложении. Пусть $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, где P и Q полиномы. Если $Q=Q_1Q_2$, где НОД $(Q_1,Q_2)=1$ и $P_1Q_1+P_2Q_2=1$, то $R(z)=\frac{P(P_1\cdot Q_1+P_2\cdot Q_2)}{Q_1\cdot Q_2}=$
$=\frac{P\cdot P_1}{Q_2}+\frac{P\cdot P_2}{Q_1}$. По основной теореме алгебры $Q(z)=c\prod\limits_k(z-a_k)^{n_k}$, откуда следует, что $R(z)$ представляется как сумма дробей со знаменателями $(z-a_k)$ в степени n_k. Раскладывая знаменатель такой дроби по степеням $(z-a_k)$, получаем требуемое разложение. Единственность. приравнивая два разложения ф-ции $R(z)$, мы видим, что достаточно док-ть следующее: если $P(z)\equiv$
$\equiv\sum\limits_{k=1}^{n}P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$, где P - полином, все P_k - полиномы без свободного члена, а a_k - различные комплексные числа, то $P=P_1=P_2=\ldots=P_n=0$. Это очевидно, т.к. если (скажем) $P_1\neq 0$, то левая часть этого равенства имеет конечный предел при $z\to a_1$, а правая - не имеет.

Следствие из док-ва. Если $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, и a - корень $Q(z)$ кратности k (т.е. $Q(z)$ делится на $(z-a)^k$ и не делится на $(z-a)^{k+1}$), то в разложении $R(z)$ нет членов $(z-a)^{-m}$ при $m>k$. В частности, если все корни $Q(z)$ простые, т.е. $Q(z)=\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)$ (все a_k различны), то $R(z)=P_1(z)+$
$+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{B_k}{z-a_k}$ (P_1 - многочлен, $B_k\in\mathbb{C}$). Коэффициент B_k наз. вычетом рациональной функции $R(z)$ в точке a_k; очевидно, он может быть вычислен по формуле: $B_k=\lim\limits_{z\to a_k}R(z)\cdot(z-a_k)$. Отметим еще, что если $\deg P<\deg Q$, то "многочленная" часть в разложении $R(z)=P(z)/Q(z)$ отсутствует, т.к. $\lim\limits_{|z|\to\infty}R(z)=0$.

Эйлер получил разложение $\operatorname{ctg} z$, основываясь на замечательной идее, что с $\operatorname{ctg} z$ можно обращаться как с рациональной функцией, рассматривая отношени $\cos z/\sin z$ как отношение двух "многочленов". В самом деле, корни $\sin z$ это в точности точки $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; все корни - простые, т.к. производная $(\sin z)'=$ $=\cos z$ в них отлична от 0; "вычет" $\operatorname{ctg} z$ в точке $k\pi$ равен $\lim\limits_{z\to k\pi}\operatorname{ctg} z(z-k\pi)$ $=\lim\limits_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\operatorname{tg} z}$ =(по правилу Лопиталя) $\lim\limits_{z\to k\pi}\cos^2 z=1$; наконец, $\cos z=(\sin z)'$ поэтому $\cos z$ естественно рассматривать как "многочлен" меньшей степени, чем $\sin z$, т.е. считать, что многочленная часть в разложении $\operatorname{ctg} z$ отсутствует. Учитывая все это, получаем эйлерово разложение (разумеется, все сказанное ни в какой мере не является доказательством).

Идея предстоящего док-ва состоит в следующем: мы докажем, что при всех натуральных, нечетных n $\operatorname{ctg} z$ является (настоящей!) рациональной функцией от $n\operatorname{tg}\frac{z}{n}$. Выпишем разложение этой ф-ции на простейшие дроби и устремим n к ∞. Тогда $n\operatorname{tg}\frac{z}{n}\to z$, и наше разложение в пределе перейдет в эйлеров

Подготовительный материал из тригонометрии. Лемма. Имеем $\forall z\in\mathbb{C}$ и $n\in\mathbb{N}$
$\sin nz = 2^{n-1}\sin z\cdot\sin(z+\pi/n)\cdot\sin(z+2\pi/n)\cdot\ldots\cdot\sin(z+\frac{(n-1)\pi}{n})$.

Док-во: имеем $\sin nz = \frac{e^{niz}-e^{-niz}}{2i} = \frac{e^{-niz}(e^{2niz}-1)}{2i} = \frac{1}{2i}\cdot e^{-niz}(e^{2iz}-1)\cdot(e^{2iz}-e^{-\frac{2i\pi}{n}})(e^{2iz}-e^{-\frac{2i\cdot 2\pi}{n}})\cdot\ldots\cdot(e^{2iz}-e^{-\frac{2i(n-1)\pi}{n}})$ (поскольку $(X^n-1)=\prod_{k=0}^{n}(X-e^{-\frac{2ik\pi}{n}})$). Далее $e^{2iz}-e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i(z-\frac{k\pi}{n})}\cdot(e^{i(z+k\pi/n)}-e^{-i(z+k\pi/n)}) = 2ie^{i(z-k\pi/n)}\cdot\sin(z+\frac{k\pi}{n})$, откуда следует, что $\sin nz = A\sin z\cdot\sin(z+\pi/n)\cdot\ldots\cdot(\sin z+\frac{(n-1)\pi}{n})$, где: $A=(2i)^{n-1}\cdot e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+\ldots+(n-1))} = (2i)^{n-1}\cdot e^{-i(n-1)\cdot\pi/2} = 2^{n-1}$ ч.т.д.

Следствие.1. $\forall n\in\mathbb{N}$ имеем $\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (поделим предыдущее равенство на $\sin z$ и устремим z к 0). Следствие 2. Пусть n=2M+1 – всюду в дальнейшем натуральное, нечетное. Тогда $\forall z\notin\mathbb{Z}\cdot\pi/n$ имеем: $\operatorname{ctg} nz = (-1)^M\operatorname{ctg}z\cdot\operatorname{ctg}(z+\pi/n)\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}(z+\frac{(n-1)\pi}{n})$. Док-во: Сделаем в лемме замену $z\to z+\pi/2$. Тогда $\sin n(z+\frac{\pi}{2}) = \sin(nz+\pi/2+m\pi) = (-1)^m\cos nz \Rightarrow \cos nz = (-1)^m\cdot 2^{n-1}\cdot\cos z\cdot\cos(z+\pi/n)\cdot\ldots\cdot\cos(z+(n-1)\pi/n))$. Поделим это равенство на равенство из леммы (там, где $\sin nz\neq 0 \Leftrightarrow z\notin\mathbb{Z}\cdot\pi/n$). Имеем $\operatorname{ctg}nz = (-1)^M\prod_{k=0}^{2m}\operatorname{ctg}(z+\frac{k\pi}{n}) = (-1)^m\prod_{k=-m}^{m}\operatorname{ctg}(z-\frac{k\pi}{n})$ ⊛ (поскольку при $M+1\le k\le 2M$, и $j=2M+1-k$ имеем $\operatorname{ctg}(z+\frac{k\pi}{n}) = \operatorname{ctg}(z+\pi-\frac{j\pi}{n}) = \operatorname{ctg}(z-\frac{j\pi}{n})$) ⊛ $=(-1)^m\prod_{k=-m}^{m}\frac{1+\operatorname{tg}z\cdot\operatorname{tg}k\pi/n}{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}k\pi/n}$.

Мы видим, что $\operatorname{ctg}nz$ есть рац. дробь от $u=\operatorname{tg}z$, числитель которой имеет степень n-1, а знаменатель – многочлен степени n, имеющий n простых корней $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$ $(-M\le k\le M)$. Отсюда $\operatorname{ctg}nz = \sum_{k=-m}^{m}\frac{a_k}{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}$; имеем $a_k = \lim_{z\to k\pi/n}\operatorname{ctg}nz(\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}) = \lim_{z\to\frac{k\pi}{n}}\frac{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}{\operatorname{tg}nz}$ = (по правилу Лопиталя) $=\lim_{z\to\frac{k\pi}{n}}\frac{\cos^2 nz}{n\cos^2 z} = \frac{1}{n\cos^2\frac{k\pi}{n}}$.

Отсюда, заменив nz на z, окончательно получаем $\operatorname{ctg}z = \frac{1}{n\operatorname{tg}z/n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\cos^2\frac{k\pi}{n}}\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}+\frac{1}{\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}}\right) = \frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{z}{n}} + \sum_{k=1}^{m}\frac{2n\operatorname{tg}z/n}{\cos^2\frac{k\pi}{n}(n\operatorname{tg}\frac{z}{n})^2-(n\sin\frac{k\pi}{n})^2}$ (при $z\notin\mathbb{Z}\cdot\pi$). Для n= 2M+1 $z\notin\mathbb{Z}\pi$, и $k\in\mathbb{Z}_+$ определим число $v_k(n,z)$ формулой:

$$v_k(n,z)=\begin{cases}1/n\operatorname{tg}z/n, & \text{если } k=0\\ 0, & \text{если } k>m\\ \dfrac{2n\operatorname{tg}z/n}{\cos^2\frac{k\pi}{n}(n\operatorname{tg}\frac{z}{n})^2-(n\sin\frac{k\pi}{n})^2} & (\text{если } 1\le k\le m)\end{cases}$$

Мы доказали, что $\operatorname{ctg}z=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(n,z)$ для всех n и z. Положим $v_k(+\infty,z) = \lim_{n\to\infty}v_k(n,z)$. Ясно, что $v_0(+\infty,z)=\frac{1}{z}$ и $v_k(+\infty,z) = \frac{2z}{z^2-k^2\pi^2}$ при $k>0$. Поэтому эйлерово разложение означает, что $\operatorname{ctg}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}v_k(n,z) = \sum_{k=0}^{\infty}v_k(\infty,z)$, и нам осталось только доказать справедливость предельного перехода, приводящего к этому результату. Фиксируем компакт $K\subset\mathbb{C}$, не пересекающийся с $\mathbb{Z}\cdot\pi$, и пусть E=C(K) – банахово пр-во непр. ф-ций $f: K\to\mathbb{C}$ с обычной нормой max модуля. Пусть $\mathcal{T}=\{2m+1\mid m\in\mathbb{Z}_+\}\cup\{+\infty\}\subset\overline{\mathbb{R}}$. Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ определим ф-цию $v_k:\mathcal{T}\to E$ формулой $v_k(n)(z)=v_k(n,z)$ /На самом деле все v_k определены в нек-ой окрестности точки $+\infty$/. Эйлерово разложение сразу вытекает из следующих двух утверждений: (1) все v_k непрерывны на $\mathcal{U}$; (2) $\exists$ окр. $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ точки $+\infty$ в $\mathcal{T}$, такая, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ нормально сходится на $\mathcal{U}'$. В самом деле, поскольку пр-во непр. отображений $C(\mathcal{U}',E)$ – банахово (теорема начала семестра), сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty}v_k$ есть непр. ф-ция на $\mathcal{U}'$. При $n\neq+\infty$ имеем $\sum_{k=0}^{\infty}v_k(n)=\operatorname{ctg}z$. Поэтому непрерывность суммы ряда в точке

$+\infty$. Это в точности и есть утверждение теоремы!
Поскольку $+\infty$ -единств.пред.точка $\mathcal{T}$, утверждение (I) означает, что $\forall$ к ф-ция $v_к(n, z)$ стремится к $v_к(+\infty, z)$ при $n\to+\infty$ равномерно по $z\in K$. Заметим, что E является кольцом относительно умножения ф-ций на K. Воспользуемся тем, что алгебраические операции на E непрерывны (т.е. умножение $E\times E\to E$ и взятие обратного элемента, определенное на открытом подмножестве $\{f\in E \mid f$ не обращается в 0 на $K\}$). Это доказывается аналогично непрерывности алг.операций над числами (сделайте это сами!) Итак, если $f_n\to f$, $g_n\to g$ в E, то $f_n/g_n\to f/g$ в E (т.е. равномерно на K). Учитывая это, мы видим, что достаточно установить, что $n\,tg\frac{z}{n}\to z$ при $n\to\infty$ равномерно на K, а для этого в свою очередь достаточно д-ть, что $\cos\frac{z}{n}\to 1$, и $n\sin\frac{z}{n}\to z$ при $n\to\infty$ равномерно на K. Пусть $|z|\le R$ на K. Фиксируем $\varepsilon>0$ и выберем $\delta>0$ так, чтобы $|\cos z-1|\le\frac{\varepsilon}{R}$ при $|z|\le\delta$. Тогда при $n\geqslant\frac{R}{\delta}$ имеем $|\cos\frac{z}{n}-1|\le\frac{\varepsilon}{R}$ и $|n\sin\frac{z}{n}-z|\le\varepsilon$ (по теореме о конечных приращениях, т.к. $(n\sin\frac{z}{n}-z)'=\cos\frac{z}{n}-1$). Утверждение (I) доказано.

Докажем (2). Поскольку при $n\to+\infty$ $n\,tg\frac{z}{n}\to z$ равномерно по $z\in K$, имеем при достаточно больших n $|n\,tg\frac{z}{n}|\le M$ $\forall z\in K$. Кроме того при $0\le x\le\pi/2$ $\sin x\geqslant x-x^3/6\geqslant x/2$ (т.к. $\pi<2\sqrt{3}$); значит, при $1\le к\le м$ имеем $n\sin\frac{k\pi}{n}\geqslant\frac{k\pi}{2}$. Отсюда следует, что при дост.больших n и $k\pi/2>M$ имеем $\|v_k\|\le\frac{2M}{\frac{k^2\pi^2}{4}-M^2}$. Поскольку ряд $\sum_k\frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{4}-M^2}$ сходится, утверждение (2), а с ним и вся теорема док.

ЗАДАЧИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

1. Если $U(x)$ - квадратная матрица, дифференцируемая и обратимая в точке x_0, то производная определителя $\Delta(x)=\det U(x)$ может быть вычислена по формуле: $\Delta'(x_0)=\Delta(x_0)\cdot Tr(U'(x_0)\cdot U^{-1}(x_0))$. Ф-ция $U^{-1}(x)$ (обратная матрица) дифф. в x_0, и $(U^{-1})'(x_0)=-U^{-1}(x_0)\cdot U'(x_0)\cdot U^{-1}(x_0)$.

2. а) Пусть $x_0\in(a,b)$, и $f:(a,b)\to E$ - отображение в банахово пр-во E, непр. в т.x_0. Док-ть, что f дифф. в $x_0 \iff \exists\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-k)}{h+k}$ причем этот предел равен $f'(x_0)$.

б) ф-ция f, равная $x^2\sin(1/x)$ при $x\neq0$, и 0 при $x=0$, диф. в $\mathbb{R}$, но предел $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x,y>0}}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ не существует.

в) Определим последовательность непр. ф-ций f_n на $[0,1]$ след.образом: $f_0(t)=t$; при $n\geqslant1$ ф-ция f_n линейна в каждом из 3^n промежутков $\frac{k}{3^n}\le t\le\frac{k+1}{3^n}$ и в концах этих промежутков имеем: $f_n(\frac{k}{3^n})=f_{n-1}(\frac{k}{3^n}+\frac{\varepsilon}{3^n})$, где $k\equiv 1 \bmod 3$, $\varepsilon=0,1,-1$. Доказать, что последовательность (f_n) равномерно сходится в $[0,1]$ к (непрерывной) ф-ции f, не имеющей производной ни в одной точке $[0,1]$.
Указание: воспользуйтесь п.а).

3. а) Пусть a и b - две точки в банаховом пр-ве E. Доказать, что отображение $t\mapsto\|a+tb\|$ имеет левую и правую производную в каждой точке $\mathbb{R}$.

б) Пусть $u:(a,b)\to E$ - отображ., имеющее $u'_r(t_0)$ для нек-го $t_0\in(a,b)$. Доказать, что отображение $t\mapsto\|u(t)\|$ имеет правую производную в t_0 и $\|u\|'_r(t_0)\le\|u'_r(t_0)\|$.

4. Пусть ℓ_∞ - банахово пр-во ограниченных последовательностей с нормой $\sup|x_n|$. Построить пример непр.отображения $f=(f_n):\mathbb{R}\to\ell_\infty$, при котором каждая координатная ф-ция $f_n(t)$ дифференцируема в $t=0$, но f не диф-ма в этой точке.

5. Существует ли непр. ф-ция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, такая, что $f'_r(x)=+\infty$ $\forall x\in(a,b)$?

Задачи по дифференциальному исчислению

6. а) Док-ть, что если $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ – дифференцируема на (а,в), то при отображении f' образ любого промежутка в (а,в) снова есть промежуток (т.е. для производной всегда справедлива теорема о промежуточном значении, даже когда она не является непрерывной).

   б) Пусть функция $f:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$ определена формулой:

$$f(t)=\begin{cases}(0,0) & \text{при } -1\le t\le 0\\ (t^2\sin 1/t,\ t^2\cos 1/t) & \text{при } 0<t\le 1\end{cases}$$

   Доказать, что f дифф. на $(-1,1)$, но что $f'(-1,1)$ не есть связное множество в $\mathbb{R}^2$.

7. Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ – непр., не обращается в 0 и имеет f'_r в каждой точке (а,в). Тогда для того, чтобы $|f|$ была неубывающей функцией, необходимо и дост. чтобы $\operatorname{Re}(f'_r/f)\geqslant 0$ на (а,в).

8. Пусть $f:(a,b)\to E$ – дважды дифференцируема в точке x_0. Док-ть, что $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

9. а) Пусть $I=[-a,a]$, и $f:I\to E$ – дважды дифференцируема, и $M_0=\sup\limits_{x\in I}\|f(x)\|$, $M_2=\sup\limits_{x\in I}\|f''(x)\|$ Док-ть, что $\forall x\in I$ $\|f'(x)\|\le\dfrac{M_0}{a}+\dfrac{x^2+a^2}{2a}M_2$.

   (Выразите $f(a)-f(x)$ и $f(-a)-f(x)$ по формуле Тейлора.)

   б) В условиях а) док-ть, что если $a\geqslant\sqrt{M_0/M_2}$, то $M_1=\sup\limits_{x\in I}\|f'(x)\|$ конечно, и $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$; если же $I=\mathbb{R}$, то $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$.

10. Пусть f диф-ма на $[a,b]$, $f(a)=0$ и $\exists A>0$ такое, что $\|f'(x)\|\le A\cdot\|f(x)\|$ $\forall x\in[a,b]$. Док-ть, что $f(x)\equiv 0$.

Выпуклые функции

11. Пусть f – выпуклая убывающая (соответственно возрастающая) функция на I, а g – обратная ф-ция (на $f(I)$). Док-ть, что g – выпукла (соотв. вогнута).

12. Пусть $I\subset(0,+\infty)$. Док-ть, что $f(1/x)$ выпукла $\Longleftrightarrow x\cdot f(x)$ выпукла.

13. Пусть f выпукла на $I\subset\mathbb{R}$, а g выпукла и возрастает на интервале, содержащем $f(I)$. Док-ть, что $g\circ f$ выпукла на I.

Интегральное исчисление

14. Пусть f – правильная (вектор-)функция на $[a,b]$ и $g(x)=\int_a^x f(t)\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$ Доказать, что g имеет на $[a,b]$ $(n-1)$ непрерывную производную, и $g^{(n-1)}$ есть примитивная для f (если Вы собираетесь дифференцировать под знаком интеграла, дайте обоснование; но можно обойтись и без этого!)

15. Пусть $f:I\to E$ – правильная (E – банахово). Док-ть, что $\forall$ компакта $K\subset I$ замыкание множества $f(K)$ компактно в E; построить пример, когда $f(K)$ не замкнуто.

16. Построить непр. числовую функцию $f(x)$, такую, что сложная функция $\operatorname{sgn} f(x)$ не является правильной (хотя sgn – правильная ф-ция).

17. Ф-ция $f:[a,b]\to E$ (E– банахово) называется <u>функцией ограниченной вариации</u>, если $\exists\, C>0$ такое, что $\forall$ цепочки $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\|f(x_{i+1})-f(x_i)\|\le C$.

   а) док-ть, что $f([a,b])$ предкомпактно в E.

   б) док-ть, что f правильна.

18. Док-ть, что $\forall$ правильной ф-ции f на $[a,b]$ и $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ непрерывная g на $[a,b]$, такая, что $\int_a^b\|f(t)-g(t)\|dt\le\varepsilon$

19. Пусть ф-ция f на $[a,b]$ есть примитивная правильной ф-ции f', и $f(a)=f(b)=0$. Док-ть, что если $M=\sup\limits_{[a,b]}\|f'(x)\|$, то $\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|\le M\cdot\dfrac{(b-a)^2}{4}$

20. Док-ть нер-во Юнга $ab\le\int_0^a\varphi(x)\,dx+\int_0^b\varphi^{-1}(y)\,dy$ (см. начало семестра) в

предположении, что φ есть примитивная правильной функции φ'.
(Указание: рассмотрите ав $- \int_0^в \varphi^{-1}(y)\,dy$ как ф-цию от в при фиксир. а)

21. Пусть $f: [a,в] \to \mathbb{R}$ – правильная, а $g: [a,в] \to \mathbb{R}$ – монотонная ф-ции Док-ть, что $\exists\ c \in [a,в]$, такое, что $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(a)\int_a^c f(t)\,dt + g(b)\int_c^b f(t)\,dt$ ("Вторая теорема о среднем").
Указание: приблизьте g монотонными ступенчатыми ф-циями).

22. Пусть f – правильная ф-ция на $[a,в]$. Док-ть, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cos nt\,dt = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\cdot|\sin nt|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt$$

(Указание: приблизьте f ступенчатыми ф-циями.)

23. Док-ть, что при $n \to \infty$ многочлены $f_n(x) = \dfrac{\int_0^x (1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt}$ равномерно стремятся к $-I$ на всяком отрезке $[-I, -\varepsilon]$ и равномерно стремится к $+I$ на всяком отрезке $[\varepsilon, I]$, где $\varepsilon > 0$.
Указание: воспользуйтесь оценкой $\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geqslant \int_0^1 (1-t)^n dt$
Выведите отсюда, что многочлены $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$ равномерно стремятся к $|x|$ на $[-I, I]$.

Элементарные функции

24. а) Док-ть, что ф-ция $(I + I/x)^{x+p}$ является убывающей (соотв. возрастающей при $x > 0 \iff p \geqslant I/2$ (соотв. $p \leqslant 0$). Для $0 < p < I/2$ ф-ция убывает на $(0, x_0)$ и возрастает на $(x_0, +\infty)$. Во всех случаях она стремится к е при $x \to +\infty$.
б) Исследовать так же ф-ции $(I + p/x)^x$

25. Док-т-ь, что при $x, y > 0$ имеем $xy \leqslant x\ln x + e^{y-I}$; когда достигается равенство?

26. Пусть $A = (a_{kn})$ – дважды стохастическая матрица, т.е. все $a_{kn} > 0$, и суммы по строкам и столбцам равны I. Пусть $x = (x_I, \ldots, x_M)$ и $y = (y_I, \ldots, y_M)$ – два вектора с положительными координатами, и $y = Ax$. Док-ть, что $y_I \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_M \quad x_I \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_M$.

27. Док-ть, что если $x, y, a, в > 0$, то $x\ln(x/a) + y\ln(y/в) \geqslant (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+в}\right)$; причем равенство достигается лишь в случае $x/a = y/в$.

28. Доказать формулу: $\mathcal{D}^n(\operatorname{arctg} x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\cdot\sin\left(n \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$.

29. Доказать, что в векторном пр-ве отображений $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ различные ф-ции вида $x^n e^{ax}$ ($n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{C}$) линейно независимы.

30. Док-ть, что отображение $\cos z$ гомеоморфно отображает полуполосу $\{|\operatorname{Re} z| < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ на дополнение до $\mathbb{C}$ полупрямой $\{x \leqslant I\}$.

31. Доказать, что если $f(x,y)$ – многочлен над $\mathbb{C}$, то вычисление примитивной для $f(x, \ln x)$ и $f(x, \arcsin x)$ сводится к вычислению примитивной для рациональной функции.

32. Док-ть, что вычисление примитивных следующих функций сводится к вычислению примитивной рациональной функции: а) $R(e^{ax})$, где R – рациональная функция, $a \in \mathbb{R}$; б) $f(\sin(ax), \cos(ax))$, где f – рациональная функция двух переменных, $a \in \mathbb{R}$ (вспомните про tg "половинного угла).

в) $(ax+в)^p x^q$ $(p,q\in\mathbb{R})$, если одно из чисел $p, q, p+q$ – целое.

33*) Доказать иррациональность числа π (если $\pi = p/q \in \mathbb{Q}$, то рассмотрим $q^n\int_0^\pi \frac{(x\cdot(\pi-x))^n}{n!}\sin x\,dx$; доказать, что это число должно лежать в $\mathbb{N}$, а с другой стороны, стремится к 0 при $n\to\infty$).

34. Докажите, что ф-ция $|x|$ на $[-1,1]$ является пределом равномерно сходящейся последовательности многочленов, заметив, что $|x|=(1-(1-x^2))^{1/2}$

Эйлеровы разложения

35. а) Числа Бернулли B_n определяются из разложения $\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\cdot z^n$

Докажите, что $B_0=1, B_1=-1/2$, $B_{2n-1}=0$ при n 1, и $B_{2n}=(-1)^{n-1}(2n)!\cdot$ $\cdot\frac{2S_{2n}}{(2\pi)^{2n}}$ при $n\geqslant 1$ (здесь $S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\dots$).

б) Разложите в ряд Тейлора в 0 ф-ции $tg\,z$ и $1/\sin z$

(Указание: выразите ф-ции $\frac{z}{e^z-1}$, $tg\,z$ и $1/\sin z$ через ф-ции $ctg\,z, ctg\,2z, ctg\,\frac{z}{2}$ и т.д.).

36. Док-ть формулу Вейерштрасса: $\Gamma(x)=e^{-\gamma x}\cdot\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$,

где γ – константа Эйлера, а произведение равномерно сходится на всяком компакте в $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$. (Указание: перейдите к логарифмам).

37. Док-ть формулу умножения:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(z+1/n)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n^{1/2-nz}\cdot\Gamma(nz)$$

38. Док-ть формулы:

а) $$(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdot\ldots=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)};$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x/2}\cdot\frac{1}{1+x/3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1+x/n}\cdot n^x=\Gamma(x+1)$$

в) $$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}=2\ln 2.$$