VIII ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ

ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ

I. Эссе

1. «Семнадцать мгновений весны». В знаменитом романе Юлиана Семенова «Семнадцать мгновений весны» советский разведчик Отто фон Штирлиц едет по лесу после сеанса связи с центром. Начинается бомбежка. Штирлиц, который имеет математическое образование, рассуждает следующим образом.

«Поехали, машинка», – подумал он по-русски и включил радио. Передавали легкую музыку. Во время налетов обычно передавали веселые песенки. Это вошло в обычай: когда здорово били на фронте или сильно долбали с воздуха, радио передавало веселые, смешные программы. «Ну, едем, машинка. Быстро поедем, чтобы не попасть под бомбу. Бомбы чаще всего попадают в неподвижные цели. Поедем со скоростью семьдесят километров – значит, вероятность попадания уменьшится именно в семьдесят раз...»

Подумайте над рассуждением Штирлица. В чем Штирлиц прав, в чем неправ? Какие более правдоподобные рассуждения вы могли бы предложить? Может быть, нужно изменить скорость, ехать задним ходом или вообще не двигаться? Напишите все, что вы придумаете по данному вопросу.

Возможные идеи для эссе.

1. Конечно, в движущуюся цель попасть труднее, чем в неподвижную. Но это только при прицельной стрельбе. При бомбардировке с воздуха в эпоху неуправляемых бомб вероятность попасть под бомбу примерно одинакова для неподвижной и для движущейся цели.

2. Если считать, что взрыв опасен не только сам по себе, но и разлетающимися в течение нескольких секунд осколками, то вероятность попасть в зону разлета у движущейся машины может оказаться выше, чем у стоящей.

3. Если рассматривать зону бомбардировки, как некоторую область, то может быть, лучше выехать из этой области, чем оставаться в ней. В таком случае, двигаться лучше. С другой стороны, можно ненароком въехать в эту область. Кто знает?..

4. Даже при прицельном бомбометании мысль о том, что, что скорость 70 км/ч уменьшает вероятность попадания в 70 раз – совершенная чепуха. Если так рассуждать, то придется признать, что скорость 0,5 км/ч повышает вероятность попадания вдвое.

В общем и целом, у математика Штирлица (Максима Максимовича Исаева) с вероятностью были нелады в университете.

2. Оценка качества. В большом городе было 2000 самых разных школ – больших и не очень. Однажды Отдел Оценок Главного Управления решил провести Оценку Качества Знаний, то есть – контрольную работу. Оценку назначили на сентябрь и сделали случайную выборку из 20 школ, посчитав, что в них учится примерно 1% всех школьников. Это было в мае.

Когда в августе сотрудники Отдела вернулись из отпуска, они обнаружили, что за время их отдыха Служба Слияния и Оптимизации объединила школы самым разным образом – некоторые школы остались в неизменном виде, некоторые объединились по две в одну, некоторые – по три, и т.п. Всего получилось 1000 школ. При этом случилось так, что никакие две отобранные для Оценки школы не слились в одну. Отдел решил, что ничего страшного не произошло – если какая-то из отобранных школ объединилась с другой школой, то вся эта новая школа будет участвовать в Оценке. В Отделе посчитали, что поскольку теперь отобрано 20 случайных школ из 1000, теперь в Оценке будет участвовать примерно 2% всех учащихся города. Когда же вопрос изучили подробнее, то обнаружилось, что в действительности в отобранных школах учится не 2%, а 10% всех учащихся города! И выделенных денег на такую Оценку не хватит. Как могло такое произойти? Подумайте над возможными причинами такого явления. Какие из них наиболее правдоподобны? Попробуйте построить небольшую «модель города и школ в этом городе» и на примере этой модели показать, каким образом слияние школ может так резко изменить долю участников Оценки. Напишите небольшое эссе по результатам своих исследований.

Возможная идея для эссе. Если бы школы объединялись случайным образом, то десятикратное увеличение выборки было бы действительно странным. Но логично предположить, что Служба Слияния действовала неслучайно, а направленно, присоединяя малые школы к большим. Например, если в школе было 100 учащихся, а ее присоединили к школе, в которой было 900 учащихся, получилась школа, в которой 1000 учащихся, а значит число школьников, попавших в выборку, увеличилось не в два раза, а в десять раз.

3. Фальшивая случайность. Известный ученый, лауреат премии Филдса[1], Станислав Смирнов иногда проводит со своими студентами такой эксперимент.

Первой группе студентов профессор Смирнов предлагает 100 раз бросить монету. Когда выпадает орел, нужно записать 1, когда решка – 0. Получается случайная последовательность нулей и единиц. Ради иллюстрации мы тоже решили бросить монету 100 раз. Вот что у нас получилось:

1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1

[1] Филдсовская премия (англ. Fields Medal) — международная премия и медаль, которые вручаются один раз в 4 года на каждом международном математическом конгрессе двум, трем или четырем молодым математикам.

А вторая группа студентов должна, не бросая монету, просто придумать случайную последовательность длины 100 из нулей и единиц.

Профессор Смирнов сказал, что всегда сможет отличить настоящую случайную последовательность, полученную бросанием монеты, от фальшивой последовательности, которую студенты придумали. Правда, потом профессор Смирнов подумал и добавил: «Ну, хорошо. Почти всегда. По крайней мере, до сих пор я ни разу не ошибся».

Каким образом профессор Смирнов может отличить последовательности? Почему он добавил «почти всегда»?

Проведите такие эксперименты с помощью родителей, друзей, одноклассников. Попробуйте сами отличить придуманные случайные последовательности от настоящих. Напишите эссе по этому поводу и не забудьте подумать про «почти».

Возможная идея для эссе. Интересно посчитать, какой максимальной длины получатся группы нулей или единиц или «полосы удачи» (см. задачи 16 и 17), если 100 раз бросить монету? Оказывается, в таком эксперименте группы получаются довольно длинные. А человек, пытаясь имитировать случайность, вольно или невольно не допускает слишком длинных последовательностей единиц или нулей.

Есть и другие характеристики. Практически невозможно имитировать не только приблизительную частоту нулей, но и прочие параметры их распределения в длинной случайной последовательности.

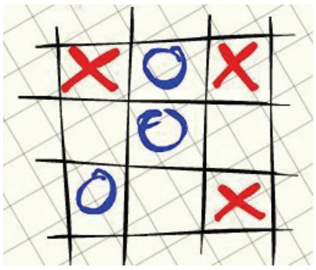
Но бывает так, что природа подкидывает совершенные чудеса. Трудно, но можно предположить, что при бросании настоящей монеты случится так, что получившуюся последовательность можно легко принять за «фальшивку». Поэтому профессор Смирнов на всякий случай добавил «почти».

II. Задачи

4. Соседи (от 6 класса. 1 балл). Имеются карточки с натуральными числами от 1 до 5. Карточки хорошо перемешали и наугад выбирают две штуки. Найдите вероятность того, что на выбранных карточках окажутся два последовательных числа.

Решение. Общее число способов выбрать две карточки равно $C_5^2 = 10$. Пар карточек с двумя последовательными числами всего 4. Все комбинации равновозможны, поэтому искомая вероятность равна $0,4$. Задачу можно решить перебором.

Ответ: 0,4.



5. Крестики-нолики (от 6 класса. 1 балл). Поле для игры в крестики-нолики (три на три клетки) случайным образом заполняют шестью крестиками и тремя ноликами. Найдите вероятность того, что все три нолика окажутся «в выигрышной позиции», то есть в один ряд по вертикали, по горизонтали или по диагонали.

Решение. Общее число способов расставить случайным образом три нолика и шесть крестиков равно $C_9^3 = 84$. Выигрышных позиций для ноликов восемь: три вертикали, три горизонтали и две диагонали. Следовательно, искомая вероятность равна $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

Ответ: $\frac{2}{21}$.

6. Жребий. В колоде 36 игральных карт четырех мастей от шестерки до туза. Володя и Маша тянут по одной карте. Сначала тянет карту Володя, а затем Маша. Маша выиграет, если она вытащит карту старше, чем карта Володи. Иначе выигрывает Володя.

а) **(от 6 класса. 1 балл)**. Докажите, что жребий несправедливый.

б) **(от 6 класса. 1 балл).** Как сделать его справедливым?

Решение: а) Жребий несправедливый, поскольку вероятность выигрыша Володи больше. Он выигрывает не только когда его карта старше Машиной, но и когда карты одинакового достоинства – ведь в колоде по четыре карты каждого достоинства.

б) Например, можно упорядочить масти. Обычно порядок такой: пики, трефы, бубны, червы. Тогда семерка треф старше семерки пик, но младше семерки бубен. Тогда про любые две карты можно сказать, какая старше. В этом случае, какие бы две карты Володя и Маша не вытянули, одна из них будет старше, и вероятности выигрышей будут одинаковы. Есть и другие способы сделать жребий справедливым.

Ответ: а) несправедливый; б) например, ввести старшинство мастей.

7. Акция. Магазин «Крокус и Кактус» объявил акцию: если покупатель берет три товара, то самый дешевый из них ему достается бесплатно. Покупатель взял десять товаров, все разной цены: за 100 рублей, за 200 рублей, за 300 рублей и так далее – самый дорогой товар стоил 1000 рублей.

а) **(от 6 класса. 1 балл).** Какова наименьшая сумма, которую покупатель заплатит, если удачно разложит свои покупки перед кассиром?

б) **(от 6 класса. 1 балл).** Какова наибольшая сумма, которую покупатель заплатит, если неудачно разложит покупки?

в) **(от 9 класса. 3 балла).** Найдите математическое ожидание суммы, которую покупатель заплатит, если разложит покупки случайным образом.

Решение. а) Самый дешевый товар в каждой тройке должен быть как можно дороже. Если покупатель разложит покупки по тройкам следующим образом (укажем только цены):

$(1000, 900, 800)$, $(700, 600, 500)$, $(400, 300, 200)$ и отдельно товар за 100 р.,

то он заплатит $1000+900+700+600+400+300+100=4000$ рублей.

б) Самая неудачная раскладка – когда покупатель бесплатно по акции забирает три самых дешевых товара за 100, 200 и 300 рублей. В этом случае покупатель заплатит 4900 рублей. Раскладка, например, такая:

$(1000, 900, 100)$, $(800, 700, 200)$, $(600, 500, 300)$ и отдельно товар за 400 р.

в) Возьмем товар ценой $100k$ рублей ($k=1,2,...,10$). Введем случайную величину – индикатор I_k, равный 1, если покупателю не пришлось за этот товар платить, и 0, если пришлось. Очевидно, что $I_{10}=I_9=0$.

В других случаях $I_k=1$, только если вместе с товаром ценой $100k$ в одну тройку попали два из $10-k$ более дорогих товаров. Составить такую комбинацию можно C_{10-k}^2 способами. Вероятность такой комбинации равна $\frac{C_{10-k}^2}{C_9^2}=\frac{(10-k)(9-k)}{72}$. Число C_9^2 в знаменателе дроби – это общее количество способов отобрать в тройку с товаром ценой $100k$ два товара из девяти оставшихся.

Получается распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2-19k+18}{72} & \frac{k^2-19k+90}{72} \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание: $\mathrm{E}I_k=\frac{k^2-19k+90}{72}$. Общая сумма, которую сэкономит покупатель, равна

$$S=100I_1+200I_2+...+1000I_{10}=100\left(I_1+2I_2+...+8I_8\right)=100\sum_{k=1}^{8} kI_k.$$

Переходя к ожиданиям, получаем:

$$\mathrm{E}S = 100\sum_{k=1}^{8}\frac{k\left(k^2-19k+90\right)}{72} =$$

$$=100\left(\frac{72}{72}+2\cdot\frac{56}{72}+3\cdot\frac{42}{72}+4\cdot\frac{30}{72}+5\cdot\frac{20}{72}+6\cdot\frac{12}{72}+7\cdot\frac{6}{72}+8\cdot\frac{2}{72}\right)=916\frac{2}{3}.$$

Найдена ожидаемая экономия. Значит, ожидаемая сумма к оплате равна

$$\frac{100+1000}{2}\cdot 10-916\frac{2}{3}=5500-916\frac{2}{3}=4583\frac{1}{3}\text{ (рублей)},$$

то есть 4583 рубля и 33 копейки.

Ответ: а) 4000 р.; б) 4900 р.; в) 4583 р. 33 к.

8. Укорачивание. Имеется последовательность из 2015 цифр. Все цифры выбирались из множества от 0 до 9 случайным образом независимо друг от друга. В полученной последовательности производится следующая операция. Если несколько одинаковых цифр идут подряд, то их заменяют одной такой же цифрой. Например, если был фрагмент ...044566667..., то вместо него получится ...04567....

а) **(от 7 класса. 1 балл).** Найдите вероятность того, что последовательность укоротится ровно на одну цифру.

б) **(от 8 класса. 1 балл).** Найдите математическое ожидание длины новой последовательности.

Решение. Первая цифра не меняется, а преобразование каждой следующей представляет собой испытание Бернулли. С вероятностью 0,1 цифра исчезает, и последовательность укорачивается на 1. Будем считать это успехом. С вероятностью 0,9 цифра остается неизменной. Получается серия из 2014 независимых одинаковых испытаний Бернулли.

а) Вероятность того, что последовательность укоротится на одну цифру, равна вероятности единственного успеха:

$$C_{2014}^{1}\cdot 0{,}1^{1}\cdot 0{,}9^{2013}=2014\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^{2013}\approx 1{,}564\cdot 10^{-90}.$$

б) Математическое ожидание числа успехов равно $2014\cdot 0{,}1=201{,}4$. Поэтому математическое ожидание длины новой последовательности равно

$$2015-201{,}4=1813{,}6.$$

Ответ: а) прибл. $1{,}564\cdot 10^{-90}$; б) $1813{,}6$.

9. Упрямые квадраты (от 7 класса. 2 балла). Даны 100 чисел. К каждому из них прибавили 2. Сумма квадратов чисел не изменилась. К каждому полученному числу еще раз прибавили число 2. Как изменилась сумма квадратов теперь?

Решение. Обозначим данные числа $x_1, x_2, ..., x_{100}$. Прибавив 2 к каждому числу, получим набор $y_j = x_j + 2$. Еще раз прибавив 2, получим набор $z_j = y_j + 2 = x_j + 4$. Но у всех трех наборов дисперсии равны, то есть[2]

$$\overline{x^2} - \overline{x}^2 = \overline{y^2} - \overline{y}^2 = \overline{z^2} - \overline{z}^2.$$

По условию $\overline{x^2} = \overline{y^2}$ и, очевидно, $\overline{y} = \overline{x} + 2$. Следовательно, $\overline{x}^2 = \left(\overline{x} + 2\right)^2$, откуда $\overline{x} = -1$. Тогда $\overline{z} = -1 + 4 = 3$. Следовательно,

$$\overline{z^2} = \overline{x^2} + \overline{z}^2 - \overline{x}^2 = \overline{x^2} + 9 - 1 = \overline{x^2} + 8.$$

Но всего чисел 100. Поэтому сумма квадратов увеличилась на $8 \cdot 100 = 800$.

Ответ: сумма квадратов увеличилась на 800.

10. Футбол (от 7 класса. 4 балла). Футбольный матч продолжается 90 минут. Ничья возможна. Что более вероятно в таком матче: что общее число заброшенных мячей будет четным или что оно окажется нечетным?

Решение. Пусть p – вероятность четного числа голов. Тогда $q = 1 - p$ – вероятность нечетного числа голов.

Рассмотрим отдельно первую и вторую половины матча. Пусть p_1 – вероятность того, что в ходе первой половины число забитых голов будет четным. Тогда $q_1 = 1 - p_1$ – вероятность того, что первая половина закончится с суммарным нечетным счетом. Если брать только вторую половину, то вероятности четного и нечетного числа забитых мячей такие же: p_1 и q_1.

Разумно считать, что голы, забитые во второй половине матча, не зависят от того, что было в первой и сколько мячей в ней было забито.

Общий четный счет может получиться одним из двух способов. Либо в обеих половинах матча число голов четное, либо в обеих – нечетное. Общий нечетный счет будет, только если в одной части число голов четное, а в другой – нечетное. Поэтому

$$p - q = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1 = \left(p_1 - q_1\right)^2 \geq 0.$$

---

[2] Мы используем формулу дисперсии числового набора $S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$, где $\overline{x}$ – среднее арифметическое чисел, а $\overline{x^2}$ – среднее арифметическое их квадратов.

Мы доказали, что $p \ge q$. Причем, это верно для матча любой продолжительности. Покажем теперь, что равенства $p = q$ быть не может. Продолжим деление. Первую половину матча разделим пополам. Получим вероятности p_2 и q_2 соответственно четного и нечетного числа голов в каждой из этих малых половин и т.д. Каждый раз будет выполняться равенство

$$p_{k-1} - q_{k-1} = \left(p_k - q_k\right)^2, \text{ а значит, } p - q = \left(p_k - q_k\right)^{2k}.$$

Но на некотором шагу, например, на шагу номер k, мы получим настолько короткий отрезок матча длиной $\frac{90}{2^k}$ минут, что вероятность забить хотя бы один гол в этом отрезке крайне мала. Поэтому p_k почти равняется единице, то есть заведомо $p_k > q_k$.

Но тогда $p - q = \left(p_k - q_k\right)^{2k} > 0$.

Ответ: четное число голов вероятнее.

11. Похожие события. Если бросают игральную кость, то событие $A = \{1,2,3\}$ состоит в том, что выпала одна из граней 1, 2 или 3. Аналогично, событию $B = \{1,2,4\}$ благоприятствуют грани 1, 2 и 4.

Игральную кость бросили 10 раз. Известно, что событие A осуществилось ровно 6 раз.

а) **(от 8 класса. 2 балла)** Найдите вероятность того, что при этом условии событие B не произошло ни разу.

б) **(от 9 класса. 3 балла)** Найдите математическое ожидание случайной величины X «Количество осуществлений события B».

Решение. а) Вероятность события «шесть раз случилось A» равна $\frac{C_{10}^6}{2^{10}}$. Событие «шесть раз случилось A и ни разу не случилось B» осуществится, только если шесть раз выпадет тройка, а в остальных случаях выпадет 5 или 6. Вероятность этого равна $C_{10}^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \frac{C_{10}^6}{3^{10}2^6}$.

Значит, условная вероятность события «ни разу не случилось B» при условии «шесть раз случилось A» равна

$$\frac{C_{10}^6}{3^{10}2^6} \cdot \frac{2^{10}}{C_{10}^6} = \frac{2^4}{3^{10}} \approx 2{,}71 \cdot 10^{-4}.$$

б) Рассмотрим сначала только те 6 испытаний, в которых случилось A. Пусть среди них X_1 тех испытаний, в которых случилось B. Если A случилось, то B случается в двух случаях из трех (при выпадении 1 или 2). Значит, вероятность B при условии A равна $\frac{2}{3}$. Поэтому $\mathrm{E}X_1 = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Теперь рассмотрим те 4 испытания, в которых A не случилось, то есть выпало 4, 5 или 6 очков. Пусть среди них X_2 испытаний, в которых случилось B. Если A не случилось, то вероятность события B равна $\frac{1}{3}$ (только один исход 4 из трех равновозможных). Поэтому $\mathrm{E}X_2 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}$.

Если обозначить X общее число наступлений события B при десяти бросках, то $X = X_1 + X_2$, и поэтому

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

Ответ: $\frac{16}{3}$.

12. Десятичная дробь (от 8 класса. 2 балла) Имеется последовательность из тысячи случайных цифр. Перед этой последовательностью поставили ноль и десятичную запятую. Получилось случайное число X, записанное десятичной дробью: $X = 0,x_1x_2x_3...x_{1000}$. Найдите $\mathrm{E}X$.

Решение. $\mathrm{E}X = 0 + 0,1\mathrm{E}x_1 + 0,01\mathrm{E}x_2 + ... + 0,1^k\,\mathrm{E}x_k + ... + 0,1^{1000}\,\mathrm{E}x_{1000}$. Все цифры принимают значения от 0 до 9 с равными вероятностями, поэтому $\mathrm{E}x_k = 4,5$ для любого k. Следовательно,

$$\mathrm{E}X = 0,45 + 0,045 + 0,0045 + ... + 0,\underbrace{00...0}_{999\text{ нулей}}45 = 0,4\underbrace{999...99}_{999\text{ девяток}}5.$$

Ответ: $0,4\underbrace{999...99}_{999\text{ девяток}}5$.

13. Тест (от 8 класса. 3 балла) Вася и Миша выполняли тест, в котором было 20 вопросов одинаковой сложности и к каждому вопросу даны варианты ответов. Поскольку ни Вася, ни Миша ничего не знали, они только угадывали ответы. Вася угадал верные ответы на 6 вопросов, а Миша – на 8 вопросов, не советуясь с Васей. Найдите математическое ожидание числа совпадений, то есть вопросов, где Вася и Миша оба угадали верные ответы или не угадали.

Решение. Пусть случайная величина I_k – индикатор совпадения в k-м вопросе, то есть $I_k = 1$, если Вася и Миша оба угадали или не угадали верный ответ на вопрос k, и $I_k = 0$, если один угадал, а другой – нет.

По условию Вася угадает верный ответ на этот вопрос с вероятностью $\frac{6}{20} = 0,3$, а Миша – с вероятностью $\frac{8}{20} = 0,4$. Не угадают ответ Вася и Миша с вероятностями $0,7$ и $0,6$ соответственно. Поскольку Вася и Миша трудятся независимо друг от друга, вероятность, что они оба угадают или оба не дают ответ на этот вопрос, равна

$$0,3\cdot 0,4+0,7\cdot 0,6=0,54\,.$$

Получаем распределение

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,46 & 0,54 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание равно $\mathrm{E}I_k=0,54$. Случайная величина X «Число совпадений» равна сумме индикаторов совпадения по всем вопросам:

$$X=I_1+I_2+\ldots+I_{20}\,.$$

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X=20\mathrm{E}I_1=20\cdot 0,54=10,8\,.$$

Ответ: 10,8.

14. Пилюли (от 9 класса. 2 балла). У Рассеянного Ученого болела коленка. Доктор прописал ему 10 пилюль от коленок: принимать по одной пилюле ежедневно. Пилюли помогают в 90% случаев, а в 2% случаев наблюдается побочное действие – исчезает рассеянность, если была.

Другой доктор прописал Ученому пилюли от рассеянности – тоже по одной в день 10 дней подряд. Эти пилюли излечивают рассеянность в 80% случаев, но в 5% случаев есть побочный эффект – перестают болеть коленки.

Баночки с пилюлями похожи, и когда Ученый уехал в десятидневную командировку, он взял с собой одну баночку, но совершенно не обратил внимания – какую. Десять дней он принимал по пилюле в день и вернулся совершенно здоровым. И рассеянность прошла, и коленка не болит. Найдите вероятность того, что Ученый взял с собой пилюли от рассеянности.

Решение. Рассмотрим события R «Ученый взял пилюли от рассеянности», A «Перестала болеть коленка» и B «Исчезла рассеянность».

Требуется найти условную вероятность $\mathrm{P}\left(R\middle|A\cap B\right)$:

$$\mathrm{P}\left(R\middle|A\cap B\right)=\frac{\mathrm{P}\left(R\cap A\cap B\right)}{\mathrm{P}\left(A\cap B\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(R\cap A\cap B\right)}{\mathrm{P}\left(R\cap A\cap B\right)+\mathrm{P}\left(\overline{R}\cap A\cap B\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot 0,05}{\frac{1}{2}\cdot 0,8\cdot 0,05+\frac{1}{2}\cdot 0,9\cdot 0,02}=\frac{0,04}{0,04+0,018}\approx 0,69.$$

Ответ: прибл. 0,69.

15. Загадочный зверь (от 9 класса. 2 балла). Ровно половина населения острова Невезения – зайцы, а все остальные – кролики. Если житель острова Невезения что-нибудь утверждает, он всегда искренне верит в то, что говорит. При этом зайцы добросовестно заблуждаются в среднем в каждом четвертом случае, а кролики добросовестно заблуждаются в среднем в каждом третьем случае. Однажды в центр острова вышел зверь и закричал: «Я не заяц!». Подумал и грустно сказал: «Я не кролик». Какова вероятность того, что он все же заяц?

Решение. Рассмотрим события A «Зверь – заяц», B «Зверь заявил, что он не заяц», C «Зверь заявил, что он не кролик».

Нужно найти условную вероятность $\mathrm{P}\left(A\middle|B\cap C\right)$:

$$\mathrm{P}\left(A\middle|B\cap C\right)=\frac{\mathrm{P}\left(A\cap B\cap C\right)}{\mathrm{P}\left(B\cap C\right)}=\frac{\mathrm{P}\left(A\cap B\cap C\right)}{\mathrm{P}\left(A\cap B\cap C\right)+\mathrm{P}\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{16}+\frac{2}{9}}=\frac{27}{59}\approx 0,458.$$

Ответ: прибл. $0,458$.

16. Чередующиеся группы (от 9 класса. 3 балла) Последовательность состоит из k нулей и m единиц, расположенных в случайном порядке. Разобьем последовательность на чередующиеся группы нулей и единиц (группа – участок, состоящий из всех одинаковых цифр, стоящих подряд)[3]. Общее число групп – случайная величина. Найдите ее математическое ожидание.

Решение. Для каждого элемента последовательности определим случайную величину I_j – индикатор, который равен 1, если этот элемент – первый в своей группе. В противном случае $I_j=0$. Очевидно, $I_1=1$. Для всех остальных индикаторов I_j вероятность события $I_j=1$ равна вероятности того, что на $(j-1)$-м месте и на j-м месте стоят разные символы:

$$\mathrm{P}\left(I_j=1\right)=\frac{k}{k+m}\cdot\frac{m}{k+m-1}+\frac{m}{k+m}\cdot\frac{k}{k+m-1}=\frac{2km}{(k+m)(k+m-1)}.$$

Следовательно, $\mathrm{E}I_j=\dfrac{2km}{(k+m)(k+m-1)}$. Общее число групп X равно числу первых элементов в группах, то есть

$$X=I_1+I_2+\ldots+I_{k+m}.$$

[3] Например, последовательность 00011011100 состоит из пяти групп 000, 11, 0, 111 и 00.

Перейдем к ожиданиям:

$$\mathrm{E}X = 1 + (k+m-1)\cdot\frac{2km}{(k+m)(k+m-1)} = 1 + \frac{2km}{k+m}.$$

Ответ: $1+\dfrac{2km}{k+m}$.

Примечание. Любопытно, что в этой задаче результат связан со средним гармоническим числа единиц и числа нулей.

17. Полоса удачи (от 9 класса. 4 балла). Монету бросают n раз. Полосой удачи длины k назовем последовательность из k выпавших подряд орлов. Найдите вероятность того, что при 10 бросаниях монеты самая длинная полоса удачи будет иметь длину 4.

Решение. Для краткости назовем длину максимальной полосы удачи «удачливостью» последовательности. Пусть S_n^k – число различных последовательностей длины n с удачливостью k. Каждая такая последовательность оканчивается либо решкой (Р), либо группой РООО…О, где количество орлов может быть любым от 1 до k.

Если в конце решка, то, удалив ее, мы получим последовательность длины $n-1$ с удачливостью k. Таких последовательностей всего S_{n-1}^k.

Если в конце РО, то удалив эту группу, мы получим одну из S_{n-2}^k последовательностей длины $n-2$ с удачливостью k. И так далее.

Остается случай, когда последовательность оканчивается группой РООО…О, где количество орлов равно k. Удалив эту группу, мы получим последовательность длины $n-k-1$ с удачливостью k или меньше. Таких последовательностей всего $S_{n-k-1}^k + S_{n-k-1}^{k-1} + S_{n-k-1}^{k-2} + \ldots + S_{n-k-1}^0$.

Следовательно,

$$S_n^k = S_{n-1}^k + S_{n-2}^k + \ldots + S_{n-k}^k + S_{n-k-1}^k + S_{n-k-1}^{k-1} + S_{n-k-1}^{k-2} + \ldots + S_{n-k-1}^0.$$

При любом $n = 0,1,\ldots$ верны равенства $S_n^n = S_n^0 = 1$.

Вычисления удобно провести в таблице.

k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
2			1	2	5	11	23	47	94	185	360
3				1	2	5	12	27	59	127	269
4					1	2	5	12	28	63	**139**

На рисунке видно, как происходит суммирование. Первую строку и диагональ нужно заполнить единицами, а затем последовательно искать остальные числа. Например, чтобы получить $S_4^2 = 5$, нужно сложить пять чисел, стоящих вдоль левой и нижней сторон квадрата 3×3, расположенного слева от нужной ячейки S_4^2. И так далее. Чтобы получить число $S_{10}^4 = 139$, нужно сложить 9 чисел вдоль левой и нижней сторон соответствующего квадрата 5×5. Бледным шрифтом показаны числа, которые при вычислении S_{10}^4 не используются. На них можно «сэкономить». С помощью электронной таблицы или небольшой программки расчет делается очень быстро.

Таким образом, существует всего 139 случайных равновозможных последовательностей длины 10 с удачливостью 4. А всего двоичных последовательностей длины 10 ровно $2^{10} = 1024$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{139}{1024}$ или, приблизительно, 0,136.

Ответ: $\frac{139}{1024}$.

18. Светофор (от 10 класса. 2 балла). Светофор на пешеходном переходе одну минуту разрешает переходить улицу, а две минуты – запрещает. Найдите среднее время ожидания зеленого света пешеходом, который подошел к перекрестку.

Решение. С вероятностью $\frac{1}{3}$ пешеход попадает в промежуток, когда ему горит зеленый свет (событие G), и поэтому условное математическое ожидание времени ожидания T в этом случае равно 0: $\mathrm{E}\left(T \middle| G\right) = 0$. С вероятностью $\frac{2}{3}$ пешеход попадает на красный сигнал и вынужден ждать (событие $\overline{G}$). В этом случае время ожидания распределено равномерно на отрезке от 0 до 2 минут, поэтому условное математическое ожидание величины T при условии $\overline{G}$ равно одной минуте: $\mathrm{E}\left(T \middle| G\right) = \frac{0+2}{2} = 1(\text{мин})$.

Получаем:

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}\left(T \middle| G\right) \cdot \mathrm{P}(G) + \mathrm{E}\left(T \middle| \overline{G}\right) \cdot \mathrm{P}\left(\overline{G}\right) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}(\text{мин}).$$

Ответ: 40 секунд.

19. Футбол-2. (от 10 класса. 6 баллов) Идет обычный футбольный матч. Ничья возможна. Время ожидания очередного гола не зависит от предыдущих событий матча. Известно, что математическое ожидание общего числа голов в футбольных матчах этих команд равно 2,8. Найдите вероятность того, что в течение матча будет забито четное число голов.

Решение. В указанных условиях время ожидания очередного гола – случайная величина, имеющая показательное распределение, а общее число голов в матче распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2,8$, то есть вероятность того, что будет заброшено n мячей, равна $p_n = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

Следовательно, вероятности четного и нечетного числа заброшенных мячей соответственно равны

$$p = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \ldots\right)e^{-\lambda} \text{ и } q = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \ldots\right)e^{-\lambda},$$

их сумма равна 1, а их разность равна

$$p - q = \left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} - \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} p + q = 1, \\ p - q = e^{-2\lambda}, \end{cases} \text{ откуда } p = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} \approx 0,502.$$

Ответ: прибл. $0,502$.

Примечание. Решение этой задачи является одновременно решением задачи 10: вероятность четного числа голов больше. Единственное, чего не хватает в 10 задаче – условия, что математическое ожидание числа забитых голов конечно. Этот факт можно считать очевидным, поскольку до сих пор в истории не случался матч, где было бы забито бесконечное число мячей.