Геометрия кардиоиды

Арсений Акопян

Аннотация

В этой заметке мы обсудим некоторые геометрические свойства каридоиды.

Определения и основные свойства

Изображенная на рисунке 1 кривая называется *кардиоидой*. Название происходит от греческого «$\kappa\alpha\rho\delta\iota\alpha$», что переводится как «сердце». Эта фигура обладает множеством интересных свойств и поэтому часто встречается в математике. В полярных координатах уравнение кардиоиды записывается так:

$$r = 1 - \cos\varphi. \tag{1}$$

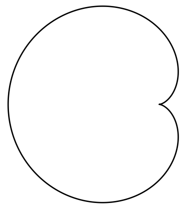

Рис. 1

Упражнение 1. Напишите уравнение кардиоиды в декартовых координатах.

В этой статье речь пойдет о геометрических свойствах кардиоиды, поэтому дадим геометрическое описание.

Пусть по неподвижной окружности диаметра 1 катится другая окружность такого же диаметра. Тогда траекторией фиксированной точки катящейся окружности будет кардиоида (рис. 2).

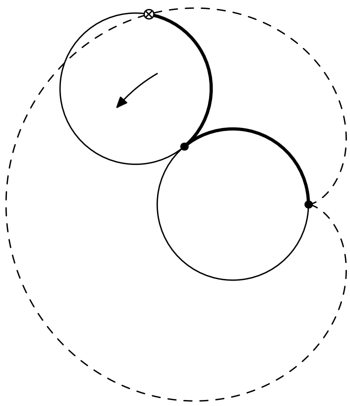

Рис. 2

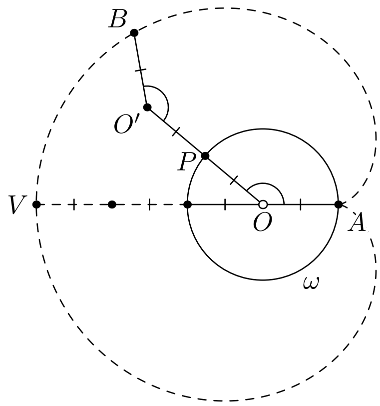

Рис. 3

Определение с катящимися окружностями не очень удобно для исследования кардиоиды (но оно нам еще пригодится), поэтому мы сформулируем его следующим образом. Пусть дана окружность ω с центром O, точка A на ней и точка P двигающаяся по ω (рис. 3). Пусть O' это точка симметричная O относительно P. А точка B выбирается так, что $\angle BO'P = \angle POA$ и $O'B = OA$ (точнее, B симметрична A относительно серединного перпендикуляра к отрезку OO'). Тогда если точка P пройдет окружность ω, точка B опишет кардиоиду.

Точка A называется *каспом* кардиоиды, а точка V кадиоиды, лежащая на луче AO называется её *вершиной*.

Упражнение 2. Пусть окружность диаметра 1 катится по внутренности окружности диаметра 2. Какова будет траектория фиксированной точки катящейся окружности?

Поскольку треугольник AOP равнобедренный, а AB параллельна OP, получаем следующее полезное утверждение.

Лемма 1. *AP является биссектрисой угла OAB.*

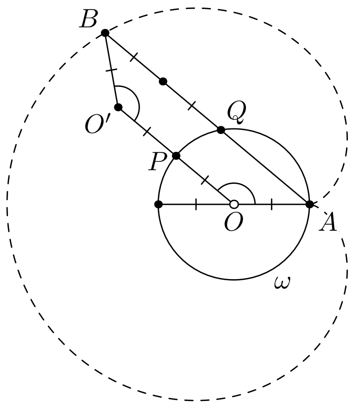

Рис. 4

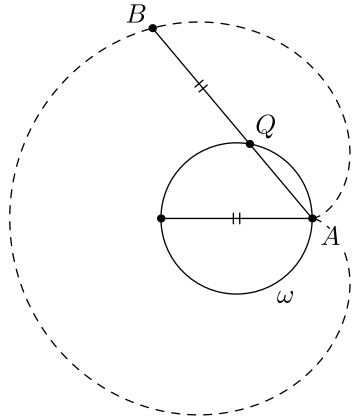

Рис. 5

Обозначим через Q повторную точку пересечения BA и ω (рис. 4). Тогда четырехугольник $BO'OQ$ будет параллелограммом (две его стороны равны, а другие две параллельны, и это не трапеция), и, следовательно, BQ равна $O'O$ или, что тоже самое, диаметру окружности ω.

Поэтому можно определить кардиоиду следующим наглядным образом. Пусть дана окружность ω диаметра 1 и точка A на ней. Пусть точка Q движется по ω и на прямой AQ выбрана точка B так, что BQ равна диаметру окружности ω (рис. 5). Тогда B будет двигаться по кардиоиде. Точку B, конечно, можно выбрать двумя способами (по разные стороны от точки Q), обе получившиеся точки будут лежать на кардиоиде (докажите!). Из данной конструкции хорошо видно, что получающая кривая задается уравнением (1) с началом координат в точке A, (проверьте это!), так что все данные нами определения равносильны.

Упражнение 3. Пусть окружность радиуса 2 катится вокруг окружности радиуса 1, содержащейся внутри неё. Какова будет траектория фиксированной точки катящейся окружности?

Касательные к кардиоиде и её инверсный образ

Как построить касательную к кардиоиде?

Порассуждаем несколько неформально и вернемся к самому первому определению кардиоиды. Пусть окружность ω', катится по окружности ω и в некоторый момент времени, эти две окружности касаются друг друга в точке P (рис. 6). Как при этом направлена скорость точки B? Вспомним школьные уроки физики. Заметим, что скорость точки P (на окружности ω') равна нулю, т. е. эта точка покоится. Вектор скорости точки B должен быть перпендикулярен отрезку BP, поскольку расстояние BP не изменяется. Тем самым мы получили следующее утверждение.

Лемма 2. *Касательная к кардиоиде в точке B перпендикулярна BP.*

Таким образом, кардиоида касается всех окружностей с центрами P на окружности ω и радиуса $PB = PA$. Говоря научным языком, кардиоида будет *огибающей* этого семейства окружностей (рис. 7).

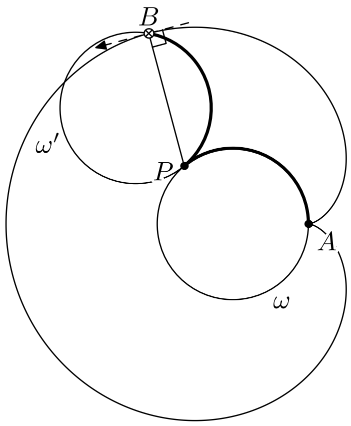

Рис. 6

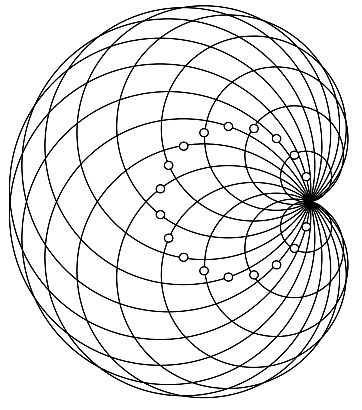

Рис. 7

Что случится со всеми этими окружностями, если сделать инверсию с центром в точке A и радиусом, равным диаметру окружности ω? Окружность ω перейдет в прямую ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему касп и вершину кардиоиды. Рассмотрим любую окружность нашего семейства с центром в некой точке I. Пусть она пересекает луч AI в точке Y. Тогда образом окружности будет прямая, проходящая через образ точки Y и перпендикулярная лучу AI. Но образом точки I (так как она лежит на ω) будет точка X пересечения луча AI с прямой ℓ. Поскольку Y в два раза дальше от A, чем I, то образ точки Y будет в два раза ближе к A, чем точка X. Тем самым мы доказали, что все окружности нашего семейства перейдут в прямые — серединные перпендикуляры к отрезкам AX, где X — точка, движущаяся по прямой ℓ (рис. 8).

Как известно, все такие прямые касаются параболы с фокусом в A и директрисой ℓ. Таким образом, наша кардиоида — это её инверсный образ.

Тут надо дать некоторое пояснение. *Параболой* называется множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (называемой *фокусом*) и некоторой прямой (*директрисы*). Хорошо известно *фокальное свойство* параболы: луч света, пущенный из фокуса параболы, отразившись от её поверхности дальше идет по прямой, перпендикулярной директрисе. Геометрически, это означает, что если X — точка на параболе, Y — проекция X на директрису, а A — фокус параболы, то касательная к параболе в точке X будет биссектрисой угла YXA (рис. 9). Подробнее о параболе можно почитать в [2].

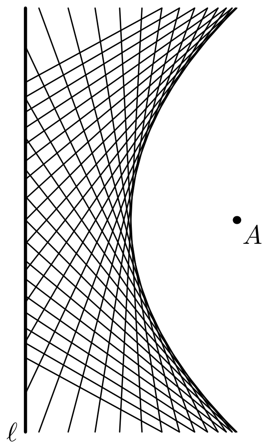

Рис. 8

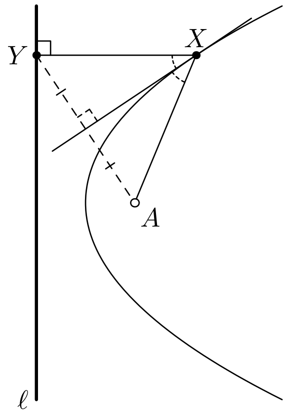

Рис. 9

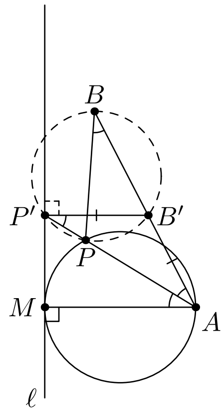

Рис. 10

Сформулируем утверждение о том, что парабола и кардиоида инверсны, в виде теоремы и дадим ей строгое доказательство.

Теорема 3. *Пусть κ — кардиоида с каспом в точке A и вершиной в точке V, а ℓ — серединный перпендикуляр к AV. Тогда после инверсии с центром в A и радиусом $\frac{AV}{2}$ кардиоида κ переходит в параболу с фокусом в A и директрисой ℓ.*

Доказательство. Мы явно покажем, почему точка кардиоиды при инверсии перейдет в точку на параболе. При этом способ доказательства явно следует из вышеописанных конструкций.

Обозначим середину AV через M, пересечение AP с ℓ через P' (рис. 10). Пусть B' инверсный образ точки B. Тогда из свойств инверсии следует, что четырехугольник $P'PB'B$ вписанный, ведь точки P и P' тоже инверсны.

Заметим, что выполнено следующее равенство углов:

$$\angle B'P'P = \angle B'BP = \angle PAB = \angle MAP = 90^\circ - \angle MP'A. \tag{2}$$

Таким образом, угол $MP'B'$ прямой, а треугольник $AB'P'$ равнобедренный. Это как раз и означает, что точка B' равноудалена от прямой ℓ и от точки A, т. е. лежит на параболе из условия теоремы. □

Поскольку касающиеся кривые при инверсии переходят в касающиеся, утверждение леммы 2 тоже можно считать доказанным.

Несколько свойств кардиоиды

Если вернуться к обозначениям рисунка 4, то из леммы 1 легко видеть, что угол между BP и BA равен половине угла OAB. Поскольку касательная в точке B к кардиоиде перпендикулярна BP, элементарный подсчёт углов дает нам следующую лемму.

Лемма 4. *Ориентированный угол между касательной в точке B к кардиоиде и прямой AV равен $90^\circ - \frac{3}{2}\angle BAV$, где A — касп кардиоиды, а V — её вершина.*

Под ориентированным углом мы понимаем угол, на который надо повернуть касательную по часовой стрелке, чтобы она стала параллельна AV (если угол отрицательный, то поворачиваем против часовой стрелки).

Таким образом, при движении точки B угол наклона касательной в ней меняется в полтора раза быстрее, чем угол наклона BA. Вот два симпатичных следствия из этого наблюдения.

Следствие 5. *Пусть X и Y — две точки на кардиоиде такие, что отрезок XY содержит касп. Тогда касательные в точках X и Y пересекаются под прямым углом (рис. 11).*

Следствие 6. *Пусть на кардиоиде с каспом A выбраны такие три точки X, Y и Z, что*

$$\angle XAY = \angle YAZ = \angle ZAX = 120^\circ. \tag{3}$$

Тогда касательные в точках X, Y и Z параллельны (рис. 12).

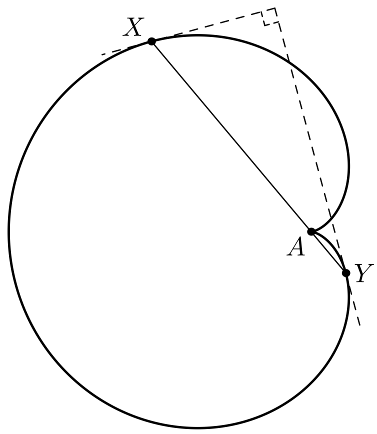

Рис. 11

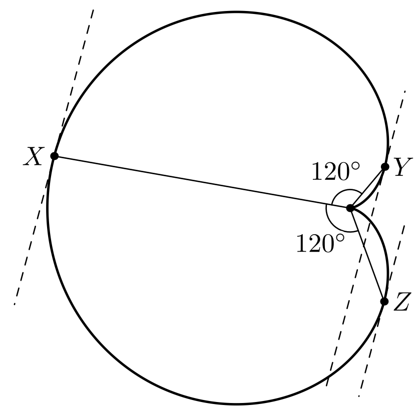

Рис. 12

Продолжим изучать конструкцию, изображенную на рисунке 4. Обозначим повторное пересечение прямой AB с кардиоидой через C, окружность с центром в O и радиусом OV обозначим через Ω. Пересечение лучей OP и OQ с Ω обозначим через M и N соответственно (рис. 13).

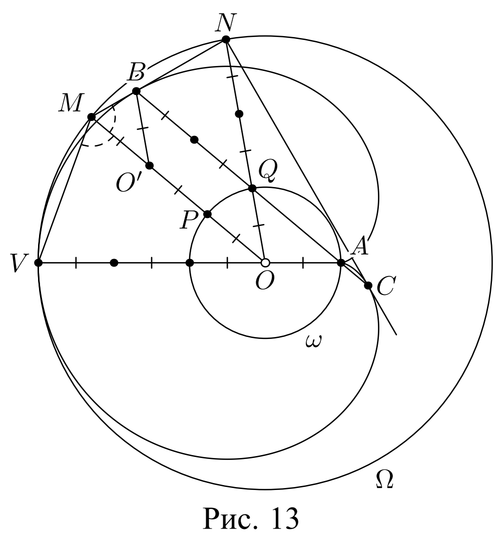

Рис. 13

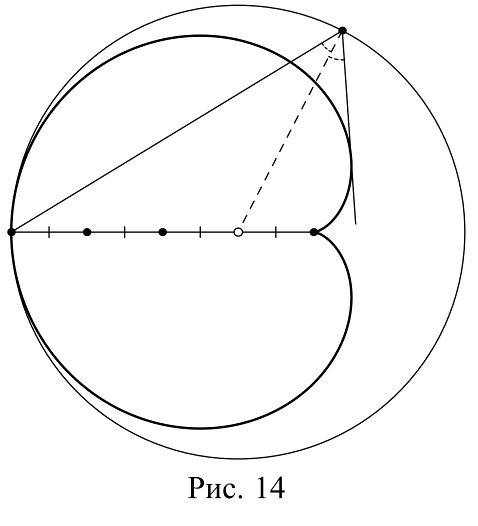

Рис. 14

Из построения кардиоиды мы знаем, что Q — середина BC. Поэтому QN равна половине BC, следовательно угол BNC прямой. Покажем, что BN и NC будут касательными к кардиоиде. Как мы знаем, $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle QAO$. С другой стороны, треугольник BQN равнобедренный, следовательно $\angle QBN = 90° - \frac{1}{2}\angle BQN = 90° - \frac{1}{2}\angle QAO$. Значит угол PBN прямой, а следовательно, BN будет касательной (аналогично для CN). Тем самым, мы показали, *что касательные в следствии 5 не только перпендикулярны, но и пересекаются на окружности* Ω.

Кроме того, углы POV и POQ равны друг другу (так как оба равны углу QAO), откуда видно, что $\angle VMO = \angle OMN = 90° - \frac{1}{2}QAO$. Таким образом, *луч выходящий из V, отразившись от внутренней поверхности Ω, идет по касательной к кардиоиде* (рис. 14). Другими словами, кардиоида является *каустикой* окружности с источником света, расположенным на окружности, так что её можно часто встретить в природе (рис. 15, фото Gérard Janot). Вы можете провести такой эксперимент дома, взяв металлическую кастрюлю и расположив фонарик у края кастрюли. Лучи света, отразившись от стенок, нарисуют на дне кардиоиду.

Упомянем еще один примечательный факт про кардиоиду. Она является центральной частью хорошо известного *множества Мандельброта* (рис. 16). Подробнее об этом можно почитать, например в [4].

Рис. 15

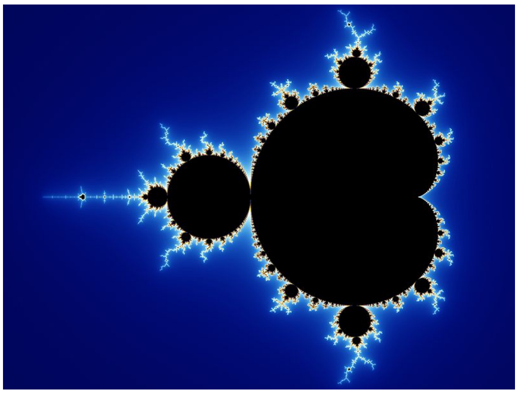

Рис. 16

Список литературы

1. Акопян А. В. О лемнискате Бернулли // Квант. 2009. Т. 3. С. 46–48.
2. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.
3. Заславский А. А. Геометрические преобразования. М.:МЦМНО, 2004.
4. Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М: Мир, 1993.