# Задачи А. В. Акопяна

1. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AH_A$, $BH_B$ и $CH_C$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AH_BH_C$, $BH_AH_C$, $CH_AH_B$ равен треугольнику $H_AH_BH_C$.

Московская математическая олимпиада 2001, Задача 10.4.

2. Стороны $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ четырехугольника $ABCD$ касаются некоторой окружности в точках $K$, $L$, $M$ и $N$ соответственно, $S$ – точка пересечения отрезков $KM$ и $LN$. Известно, что вокруг четырехугольника $SKBL$ можно описать окружность. Докажите, что вокруг четырехугольника $SNDM$ также можно описать окружность.

Весенний тур Турнира Городов 2002, Тренировочный вариант, Задача 8-9.4.

3. Длина каждой стороны и каждой не главной диагонали выпуклого шестиугольника не превосходит 1. Докажите, что в этом шестиугольнике найдется главная диагональ, длина которой не превосходит $2/\sqrt{3}$ .

Устная геометрическая олимпиада, 2004-ый год, Задача 9.6.

4. а) Из картона вырезали 7 выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые 6 из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все 7 нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

б) Из картона вырезали 8 выпуклых многоугольников и положили на стол так, что любые 7 из них можно прибить к столу двумя гвоздями, а все 8 — нельзя. Приведите пример таких многоугольников и их расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

Московская математическая олимпиада 2004, Задача 8.5.

5. Пусть $I_A$ и $I_B$ – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ соответственно, а $P$ – точка на окружности $S$, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников $I_ACP$ и $I_BCP$, совпадает с центром окружности $S$.

В соавторстве с Л. А. Емельяновым. Всероссийская олимпиада по математике 2004, Финал, Задача 11.2.

6. На плоскости даны 1000 синих и 1000 красных точек. Расстояние между любыми точками разного цвета не превосходит 1. Доказать, что либо все красные, либо все синие точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{2}$.

В соавторстве с В. Л. Дольниковым. Турнир матбоев журнала Квант, 2004-ый год, Задача 9.6.

7. В четырехугольнике $ABCD$ углы $A$ и $C$ равны. Биссектриса угла $B$ пересекает прямую $AD$ в точке $P$. Перпендикуляр к $BP$, проходящий через точку $A$, пересекает прямую $BC$ в точке $Q$. Докажите, что прямые $PQ$ и $CD$ параллельны.

Всероссийская олимпиада по математике 2005, Этап 4, Задача 8.1.

8. В остроугольном треугольнике проведены высоты $AA'$ и $BB'$. На дуге $ACB$ описанной окружности треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Пусть прямые $AA'$ и $BD$ пересекаются в точке $P$, а прямые $BB'$ и $AD$ пересекаются в точке $Q$. Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка $PQ$.

Всероссийская олимпиада по математике 2005, Финал, Задача 9.7 и 10.6.

9. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов $P_1$, $P_2$, ..., $P_{12}$, ребра которых параллельны координатным осям $Ox$, $Oy$, $Oz$ так, чтобы $P_2$ пересекался (т.е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме $P_1$ и $P_3$, $P_3$ пересекался с каждым из оставшихся, кроме $P_2$ и $P_4$, и т.д., $P_{12}$ пересекался с каждым из оставшихся, кроме $P_{11}$ и $P_1$, $P_1$ пересекался с каждым из оставшихся, кроме $P_{12}$ и $P_2$? (Поверхность параллелепипеда принадлежит ему.)

Всероссийская олимпиада по математике 2005, Финал, Задача 11.6 (голосованием школьников была признана самой интересной).

10. По краю многоугольного стола ползут два муравья. Все стороны стола длиннее 1 *м*, а расстояние между муравьями всегда ровно 10 *см*. Сначала оба муравья находятся на одной из сторон стола.

а) Пусть стол выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы в каждой точке края побывал каждый из муравьев?

б) Пусть стол не обязательно выпуклый. Всегда ли муравьи смогут проползти по краю стола так, чтобы на краю не осталось точек, в которых не побывал ни один из муравьев?

Осенний тур Турнира Городов 2005, Задача 8-9.4 и 10-11.2.

11. Каждую букву русского алфавита закодировали последовательностью из нулей и единиц (последовательности могут быть разной длины). Используя этот код, Сеня записал слово «СЛОН». Оказалось, что полученная последовательность нулей и единиц расшифровывается однозначно. Какое наименьшее количество цифр могло в ней быть

Турнир матбоев журнала Квант, 2005-ый год, Командная олимпиада, Задача 4 (для 7ого класса).

12. На циферблате правильно идущих часов барона Мюнхгаузена есть только часовая, минутная и секундная стрелки, а все цифры и деления стерты. Барон утверждает, что может определять время по этим часам, поскольку, по его наблюдению, на них в течение дня (с $8-00$ до $19-59$) не повторяется два раза одно и то же расположение стрелок. Верно ли наблюдение барона? (Стрелки имеют различную длину, движутся равномерно.)

Весенний тур Турнира Городов 2005. Основной вариант, Задача 8-9.3.

13. Точки $A$, $B$ движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Докажите, что серединные перпендикуляры к $AB$ проходит через фиксированную точку.

Вторая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, 2006-ой год, Заочный тур, Задача 2.

14. Дан треугольник $ABC$. $M$ — середина стороны $BC$, а $P$ — проекция вершины $B$ на серединный перпендикуляр к $AC$. Прямая $PM$ пересекает сторону $AB$ в точке $Q$. Докажите, что треугольник $QPB$ равнобедренный.

Восьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, 2012-ой год, Заочный тур, Задача 4.

15. Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ подобны и по-разному ориентированы. На отрезке $AA_1$ взята точка $A'$, такая что $AA'/A_1A' = BC/B_1C_1$. Аналогично строим $B'$ и $C'$. Докажите, что $A'$, $B'$ и $C'$ лежат на одной прямой.

Вторая олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, Финал 2006-ой, Задача 9.3.

16. Даны две прямые $a$ и $b$, а также точки $A$ и $B$. Точка $X$ скользит по прямой $a$, а точка $Y$ по прямой $b$, так что $AX \parallel BY$. Найти ГМТ пересечения $AY$ с $XB$.

Вторая олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, 2006-ой год, Задача 13.

17. Через ортоцентр $H$ треугольника $ABC$ проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает $BC$ в точке $X$, а другая пересекает $AC$ в точке $Y$. Прямые $AZ$, $BZ$ параллельны соответственно прямым $HX$ и $HY$. Докажите, что точки $X$, $Y$, $Z$ лежат на одной прямой.

Вторая олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, 2006-ой год, Задача 18.

18. Дан треугольник $ABC$ и точки $P$ и $Q$, лежащие на его описанной окружности. Точку $P$ отразили относительно прямой $BC$ и получили точку $P_a$. Точку пересечения прямых $QP_a$ и $BC$ обозначим $A'$. Точки $B'$ и $C'$ строятся аналогично. Докажите, что точки $A'$, $B'$ и $C'$ лежат на одной прямой.

Московская математическая олимпиада 2006, Задача 10.6.

19. Можно ли на плоскости расположить конечное число прямоугольных салфеток с параллельными сторонами (и непересекающимися внутренностями) так, чтобы каждая граничила с двумя салфетками либо по отрезкам левой и правой границы, либо по отрезкам верхней и нижней?

В соавторстве с И. Межировым, Зимние сборы 2006 г, Первая олимпиада, Второй день, Задача 4.

20. На стороне $BC$ ромба $ABCD$ выбрана точка $M$. Прямые, про веденные через $M$ перпендикулярно диагоналям $BD$ и $AC$, пересекают прямую $AD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Оказалось, что прямые $PB$, $QC$ и $AM$ пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение $BM/MC$?

В соавторстве с С. Л. Берловым и Ф. В. Петровым. Всероссийская олимпиада по математике 2007, Финал, Задача 8.3.

21. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался?

В соавторстве с И. И. Богдановым. Всероссийская олимпиада по математике 2007, Финал, Задача 8.4

22. Ведущий загадал число от 1 до $n$. Ему можно задать сразу несколько вопросов про это число, на которые предполагается ответ «да» или «нет». После чего ведущий отвечает на все эти вопросы, правда не обязательно в том порядке в котором они задавались. Какое наименьшее число вопросов нужно задать, чтобы гарантировано узнать задуманное ведущим число?

Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2008, Второй тур, Задача 10.4.

23. Поставьте на плоскости 9 точек так, чтобы никакие 4 не лежали на одной прямой, но из любых 6-ти нашлись 3, лежащие на одной прямой.

Московская математическая олимпиада, 2008 год, Задача 8.5.

24. Окружность $\omega$ с центром $O$ вписана в угол $BAC$ и касается его сторон в точках $B$ и $C$. Внутри угла $BAC$ выбрана точка $Q$. На отрезке $AQ$ нашлась такая точка $P$, что $AQ \perp OP$. Прямая $OP$ пересекает окружности $\omega_1$ и $\omega_2$, описанные около треугольников $BPQ$ и $CPQ$, вторично в точках $M$ и $N$. Докажите, что $OM = ON$.

Всероссийская олимпиада по математике 2008, Финал, Задача 10.3.

25. Конечное множество точек на плоскости такого, что из любых трёх его точек найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1. Докажите, что это множество можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превосходит 1.

В соавторстве с В. Л. Дольниковым. Четвертая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, Финал 2008, Задача 10.8.

26. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$. Ее диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. На отрезке $AB$ нашлись такие точки $X$ и $Y$, что $AX = AM$, $BY = BM$. Пусть точка $Z$ – середина отрезка $XY$, а $N$ – точка пересечения отрезков $XD$ и $YC$. Докажите, что прямая $ZN$ параллельна основаниям трапеции.

В соавторстве с А. Г. Мякишевым XV Международная олимпиада «Туймаада», 2008-ой год, Младшая лига, Задача 6.

27. Пусть $AH_a$ и $BH_b$ — высоты треугольника $ABC$. $P$ и $Q$ проекции точки $H_a$ на стороны $AB$ и $AC$. Докажите, что прямая $PQ$ делит отрезок $H_aH_b$ пополам.

В соавторстве с К. Савенковым. Пятая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2009, Задача 8.3.

28. Дан треугольник $ABC$ такой, что $AB - BC = \frac{AC}{\sqrt{2}}$. Пусть $M$ — середина стороны $AC$, а $N$ — основание биссектрисы угла $B$. Докажите, что

$$\angle BMC + \angle BNC = 90^\circ.$$

Пятая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2009, Задача 9.6.

29. Радиусы описанной и вписанной окружности треугольника $ABC$ равны $R$ и $r$; $O$, $I$ — центры этих окружностей. Внешняя биссектриса угла $C$ пересекает $AB$ в точке $P$. Точка $Q$ — проекция $P$ на прямую $OI$. Найдите расстояние $OQ$.

В соавторстве с А.А.Заславским. Пятая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2009, Задача 10.3.

30. Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — целое положительное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее 30%?

Московская математическая олимпиада. 2009 год, Задача 10.1 Первоначально была в такой формулировке: Маша положила деньги на мобильный Володе через автомат. Володе пришло 228 рублей. Сколько Маша положила денег?

31. Дан треугольник $ABC$. Точка $B_1$ симметрична вершине $B$ относительно прямой $AC$, точка $C_1$ симметрична вершине $C$ относительно прямой $AB$. Точка $O_1$ симметрична центру описанной окружности треугольника $ABC$ относительно прямой $BC$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $AB_1C_1$ лежит на прямой $AO_1$.

XVI Международная олимпиада «Туймаада», 2009-ый год, Старшая лига, Задача 7

32. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD+\angle ACD > \angle BAC+\angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

Шестая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Заочный тур 2010, Задача 21.

33. Дана прямая $\ell$ в пространстве и точка $A$, не лежащая на ней. Для каждой прямой $\ell'$, проходящей через $A$, построим общий перпендикуляр $XY$ ($Y$ лежит на $\ell'$) к прямым $\ell$ и $\ell'$. Найдите ГМТ точек $Y$.

Шестая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Заочный тур 2010, Задача 24.

34. Даны две точки $A$ и $B$. Найти геометрическое место тоек $C$ таких, что треугольник $ABC$ можно накрыть кругом единичного радиуса.

Шестая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2010, Задача 8.2.

35. Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окуржности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого.

Шестая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2010, Задача 9.2.

36. У выпуклого многоугольника уменьшили все стороны и получили опять выпуклый многоугольник. Могут ли все диагонали при этом уменьшиться.

Шестая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2010, Задача 10.3.

37. Вписанная окружность $\omega$ касается стороны $BC$ треугольника $ABC$ в точке $P$. Точки $Q$ и $R$ получаются соответственно из точек $B$ и $C$ симметрией относительно $P$. Перпендикуляр к $BC$ в точке $Q$ пересекает прямую $AC$ в точке $M$, а перпендикуляр к $BC$ в точке $R$ пересекает прямую $AB$ в точке $N$. Докажите, что прямая $MN$ касается $\omega$.

Кубок памяти А.Н. Колмогорова 2010, Первый тур, Высшая лига, Задача 3.

38. Дан выпуклый многогранник с $n$ ($n \geq 4$) вершинами. Его объём не меньше 1000, а все вершины имеют целые координаты. При каких $n$ можно утверждать, что внутри или на границе этого многогранника найдётся ещё хотя бы одна точка с целыми координатами?

В соавторстве с И. Богдановым. Кубок памяти А.Н. Колмогорова 2010, Второй тур, Высшая лига, Задача 1.

39. Даны две единичные окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекающиеся в точках $A$ и $B$. На окружности $\omega 1$ взяли произвольную точку $M$, а на окружности $\omega_2$ точку $N$. Через пару точек $M$ и $N$ провели еще две единичные окружности $\omega_3$ и $\omega_4$. Обозначим повторное пересечение $\omega_1$ и $\omega_3$ через $C$, повторное пересечение окружностей $\omega_2$ и $\omega_4$ через $D$. Докажите, что $ACBD$ параллелограмм.

Седьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, 2011, Заочный тур, Задача 6.

40. На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ выбрали точки $P$ и $Q$ так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

Седьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, 2011, Заочный тур, Задача 7.

41. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка $M$ — середина диагонали $AC$, причем $\angle MCB = \angle CMD = \angle MBA = \angle MBC - \angle MDC$. Докажите, что $AD = DC + AB$.

В соавторстве с Ф. В. Петровым. Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2011, Второй тур, Задача 11.6.

42. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $K$. Точки $P$ и $Q$ — центры описанных окружностей треугольников $ABD$ и $BCD$. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.

Московская математическая олимпиада 2011, Задача 9.5.

43. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

Устная геометрическая олимпиада, 2011-ый год, 8-9-ый класс, Задача 6.

44. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$, точка $M$ — середина $AB$. На прямой $AB$ выбраны точки $S_1$ и $S_2$. Касательные, проведенные из $S_1$ к окружности $\omega_1$ касаются ее в точках $X_1$ и $Y_1$, а касательные из $S_2$ к $\omega_2$ касаются ее в точках $X_2$ и $Y_2$. Докажите, что если прямая $X_1X_2$ проходит через $M$, то прямая $Y_1Y_2$ тоже проходит через $M$.

XVIII Международная олимпиада «Туймаада», 2011-ый год, Старшая лига, Задача 2

45. Дан выпуклый шестиугольник $AC'BA'CB'$, у которого каждые две противоположные стороны равны. $A_1$ — точка пересечения $BC$ и серединного перпендикуляра к $AA'$. Точки $B_1$ и $C_1$ определяются аналогично. Докажите, что $A_1$, $B_1$ и $C_1$ лежат на одной прямой.

XVIII Международная олимпиада «Туймаада», 2011-ый год, Старшая лига, Задача 7

46. Окружность, проходящая через вершины $A$ и $B$ вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали $AC$ и $BD$ в точках $E$ и $F$ соответственно. Прямые $AF$ и $BC$ пересекаются в точке $P$, а прямые $BE$ и $AD$ — в точке $Q$. Докажите, что $PQ$ параллельно $CD$.

XVIII Международная олимпиада «Туймаада», 2011-ый год, Младшая лига, Задача 6.

47. Герцог Квадратный завещал своим трех сыновьям квадратное поместье 100 на 100 *км*, разделенное на 10000 квадратных участков со стороной 1 *км*. Для раздела наследства он указал каждому сыну по точке внутри поместья и завещал ему те участки, расстояния от центров которых до этой точки меньше, чем расстояния до точек его братьев. В результате все поместье оказалось разделено между сыновьями. Верно ли, что независимо от выбора точек доля каждого сына окажется связной (то есть между любыми двумя точками одной доли существует путь, не выходящий за границы этой доли).

XVIII Международная олимпиада «Туймаада», 2011-ый год, Младшая лига, Задача 8.

48. На плоскости отмечена точка $M$, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка $P$, а по оси абсцисс точка $Q$ так, что угол $PMQ$ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных $M$ относительно $PQ$.

Седьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2011, Задача 8.7.

49. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер $A_iA_j$ и $B_kB_l$, где $(i; j; k; l)$ — перестановка чисел $(1; 2; 3; 4)$ (например, $A_1A_2$ и $B_3B_4$). Известно, что во всех парах, кроме одной, ребра перпендикулярны. Докажите, что в оставшейся паре ребра тоже перпендикулярны.

Седьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2011, Задача 10.3.

50. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые $BF$ и $CE$ параллельны.

Всероссийская олимпиада по математике 2012, Региональный этап, Задача 10.2.

51. Дан равносторонний треугольник $ABC$ и прямая $\ell$, проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами $AB$ и $BC$ отразили относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника $ABC$.

Устная геометрическая олимпиада, 2012-ый год, Задача 8-9.3.

52. $H$ — точка пересечения высот $AA'$ и $BB'$ остроугольного треугольника $ABC$. Прямая, перпендикулярная $AB$, пересекает эти высоты в точках $D$ и $E$, а сторону $AB$ — в точке $P$. Докажите, что ортоцентр треугольника $DEH$ лежит на отрезке $CP$.

В соавторстве с Д. Швецовым. Устная геометрическая олимпиада, 2012-ый год, Задача 10-11.3.

53. Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с углом при вершине $B$, равным $120°$. На продолжениях сторон $AB$ и $CB$ за точку $B$ взяли точки $P$ и $Q$ соответственно так, что угол между $AQ$ и $CP$ прямой. Докажите, что $\angle PQB = 2\angle PCQ$.

В соавторстве с Д. Швецовым. Восьмая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, Финал 2012, Задача 8.4.

54. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ (радиус $\omega_1$ меньше радиуса $\omega_2$) вписаны в угол $T_1OT_2$ и пересекаются в точках $A$ и $B$. Точка $K$ лежит на прямой $AB$ по другую сторону от $OT_2$, чем окружности. Из $K$ проведены касательные $KX_1$ и $KX_2$ к окружностям $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно (точки $X_1$ и $X_2$ лежат в другой полуплоскости относительно $AB$, нежели $O$). Лучи $KX_1$ и $OT_1$ пересекаются в точке $P_1$, а лучи $KX_2$ и $OT_2$ – в точке $P_2$. Касательная из $P_1$ к $\omega_2$, отличная от $OT_1$, пересекает прямую $AB$ в точке $U$, лежащей по другую сторону от $OT_1$, нежели окружности. Докажите, что прямая $UP_2$ касается $\omega_1$.

Кубок памяти А.Н. Колмогорова 2012, Первый тур, Высшая лига, Задача 7.

55. Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ (радиус $\omega_1$ меньше радиуса $\omega_2$) вписаны в угол с вершиной $O$ и пересекаются в точках $P$ и $Q$. Прямая, проходящая через $O$, пересекает $\omega_1$ в точках $A_1$ и $B_1$, а $\omega_2$ — в точках $A_2$ и $B_2$ так, что $B_i$ лежит на отрезке $OA_i$. Прямая $PA_1$ пересекает $\omega_2$ вторично в точке $C$, а прямая $QA_2$ пересекает $\omega_1$ вторично в точке $D$. Докажите, что точки $O$, $C$ и $D$ лежат на одной прямой.

Кубок памяти А.Н. Колмогорова 2012, Третий тур, Высшая лига, Задача 1.

56. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $I$ и $J$ — центры окружностей, вписанных в треугольники $ABC$ и $ADC$ соответственно, а $I_a$ и $J_a$ — центры вневписанных окружностей треугольников $ABC$ и $ADC$ соответственно (вписанных в углы $BAC$ и $DAC$ соответственно). Докажите, что точка $K$ пересечения прямых $IJ_a$ и $JI_a$ лежит на биссектрисе угла $BCD$.

В соавторстве с П. А. Кожевниковым. Устная геометрическая олимпиада, 2013-ый год, Задача 10-11.6.

57. На плоскости дано $n$ выпуклых попарно пересекающихся $k$-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих $k$-угольников.

Всероссийская олимпиада по математике 2014, Финал, Задача 10.8.

58. Каждый ученик класса вышел к доске и записал одно неравенство вида $x * a$, где $x$ — переменная, $a$ — какое-то число, $*$ — один из знаков неравенства. Верно ли, что, учитель может указать такое значение $x$, что не менее половины записанных неравенств окажутся верными?

XXI турнир математических боев памяти А. П. Савина, 2015 год, 8 класс, ТУР I, задача 8.1.

59. Треугольники $AMB$ и $BNC$ — равносторонние, $AK = AB$, $CK = CB$. Докажите, что точки $K$, $M$ и $N$ лежат на одной прямой.

XXI турнир математических боев памяти А. П. Савина, 2015 год, 9 класс, ТУР III. Задача 9.8

60. В треугольнике $ABC$ точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ — середины сторон $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно. Точки $B_2$ и $C_2$ — середины отрезков $BA_1$ и $CA_1$ соответственно. Точка $B_3$ симметрична $C_1$ относительно $B$, а точка $C_3$ симметрична $B_1$ относительно $C$. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников $BB_2B_3$ и $CC_2C_3$ лежит на окружности, описанной около треугольника $ABC$.

XI олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина, Финал 20015-ой, Задача 10.3.