КР-структура на группе диффеоморфизмов окружности

Р. Деев

2015

Пусть $A_0(\Delta)$ — пространство гладких комплекснозначных функций на $\overline{\Delta}$, голоморфных во внутренности и зануляющихся в нуле. Пусть $\mathcal{F}$ — подмножество функций таких, что они дают дифференцируемое вложение $\overline{\Delta}$ в $\mathbb{C}$. $A_0(\Delta)$ — комплексное пространство Фреше, и $\mathcal{F}$, будучи его открытым подмножеством, наследует структуру комплексного многообразия.

Теорема 1. *Вирасора имеет естественную лево-инвариантную комплексную структуру и изоморфна $\mathcal{F}$.*

Теорема 2. Diff *имеет естественную лево-инвариантную КР-структуру и изоморфна строго псевдовыпуклой гиперповерхности в $\mathcal{F}$, состоящей из тех вложений, которые имеют конформный радиус* 1.

Алгебра Ли $\mathfrak{diff}$ изоморфна алгебре векторных полей на окружности с отрицательной скобкой:

$$[e^{int}\partial_t, e^{ikt}\partial_t] = i(n-k)e^{i(n+k)t}\partial_t.$$

Выберем в качестве подалгебры подалгебру, состоящую из положительных членов ряда Фурье:

$$\mathfrak{h}^{1,0} = \{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{int}\partial_t\}$$

Более того, $\mathfrak{h}^{1,0} \oplus \overline{\mathfrak{h}^{1,0}}$ коразмерности один в $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{diff}$; кроме того, имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{int}\partial_t, \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a_n} e^{-int}\partial_t = i \sum_{k,n=1}^{+\infty} (k+n) a_n \overline{a_k} e^{i(n-k)t}\partial_t,$$

и его правая часть не лежит в $\mathfrak{h}^{1,0} \oplus \overline{\mathfrak{h}^{1,0}}$, если только все a_n не равны нулю. Стало быть, Diff — строго псевдовыпуклое КР-многообразие. Нам осталось только вложить Diff в $\mathcal{F}$.

Напомним сперва, что такое конформный радиус. Для жордановой кривой Γ существует единственная (с точностью вращения аргумента) однолистная функция, отправляющая внешность единичного круга на внешность Γ. Будучи разложена по степеням аргумента, она будет равна $\beta\zeta + \beta_0 + \beta_{-1}\zeta^{-1} + \dots$. Тогда $|\beta|$ не зависит от вращения аргумента и является хорошим инвариантом Γ. Будем обозначать за $\beta(f)$ конформный радиус $f(\partial\Delta)$. Это гладкая функция на $\mathcal{F}$; его коническая симметрия умножает функцию β на множитель, так что подмножество $\mathcal{F}_1$ является в самом деле гиперповерхностью.

Определим отображение $\mathcal{F}_1 \xrightarrow{p} \mathrm{Diff}$ следующим образом. Для $f \in \mathcal{F}_1$ разложим функцию, униформизующую внешность единичного диска на внешность образа $f(\partial\Delta)$, по степеням ζ:

$$g(\zeta) = \zeta + \beta_0 + \beta_{-1}\zeta^{-1} + \dots$$

Раз g продолжается до диффеоморфизма границ, положим $P(f) = f^{-1} \circ g = \Phi \in \mathrm{Diff}(\partial\Delta)$ и $p(f) = \varphi \in \mathrm{Diff}$, определённое формулой

$$\Phi(e^{it}) = e^{i\varphi(t)}.$$

Получившиеся функции, конечно, гладки. Довольно легко понять, что таким образом получится вообще любой диффеоморфизм, притом единственно.

Надо проверить теперь, что это КР-изоморфизм. Зафиксируем такую тривиализацию $T\,\mathrm{Diff} = \mathrm{Diff} \times \mathfrak{diff}$: пусть касательный вектор w в точке φ_0 касается кривой φ_t. Тогда $\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}|_{t=0}$ — функция на окружности. Теперь представим w как $(\varphi_0, \dot\varphi\frac{d}{dt})$.

Чтобы понять, как устроен дифференциал отображения p, допустим, что f_ε — кривая в $\mathcal{F}_1$, и пусть $g_\varepsilon(\zeta) = \zeta + \beta_0(\varepsilon) + \dots$ — однолистное отображение $\mathbb{C} - \Delta$ на внешность $f_\varepsilon(\partial\Delta)$. Тогда

$$g_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon,$$

откуда, дифференцируя, имеем

$$\dot g = \dot f \circ \Phi + (f' \circ \Phi)\dot\Phi.$$

Пусть теперь $w \in H^{0,1}_f \mathcal{F}_1$. Значит, $w = v + \sqrt{-1} I_f v$, где $I_f v$ есть касательный вектор к кривой f^*_ε с $\dot f^* = i\dot f$. По выведенной выше формуле

$$\dot g^* = \dot f^* \circ \Phi + (f' \circ \Phi)\dot\Phi^*,$$

откуда

$$\dot g + i\dot g^* = (f' \circ \Phi)(\dot\Phi + i\dot\Phi^*).$$

С другой стороны, дифференцируя, имеем $g' = (f' \circ \Phi)\Phi'$, так что

$$(\dot g + i\dot g^*)/g' = (\dot\Phi + i\dot\Phi)/\Phi'.$$

Значит, то, что справа, продолжается вовне, то есть $(0,1)$-вектора отправляются в $(0,1)$-вектора, то есть это КР-морфизм.

Заметим, что $H^{1,0}$ право-инвариантна относительно действия $\mathrm{U}(1)$, так что КР-структура на Diff низводится до комплексной структуры на $\mathrm{Diff} / \mathrm{U}(1)$ (поскольку векторное поле, которым действует окружность на Diff, касается нейтрального линейного подрасслоения, которое соответствует подалгебре констант).

Теперь мы попытаемся построить вложение Diff в некоторое пространство, а именно (довольно большой) грассманиан. Для функции $u \in L^1([0,1])$ (то есть функции на отрезке, интегрируемой по Лебегу) абой производной называется такая функция v, что $\int u(t)\varphi'(t)dt = -\int v(t)\varphi(t)dt$ для любой функции $\varphi \in C^1([0,1])$ с $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. *Пространством Соболева* $W^{k,p}$ называется подпространство функций в L^p (то есть функций, для которых p-норма $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu}$ конечна), у которых первые k слабых производных существуют и также имеют конечную p-норму. Будем обозначать за H^r пространство $W^{r,2}(S^1)$. На нём также имеют место разложения в ряды Фурье, и можно ввести разложение $H^r = H^r_+ \oplus H^r_-$, где H^r_+ состоит из функций, ряды Фурье которых содержат только отрицательные частоты, и H^r_- — его ортогональное дополнение. Грассманиан Gr есть комплексное гильбертово многообразие подпространств $Z \subset H$ таких, что проекция $Z \to H_+ = H^0_+$ фредгольмова, а проекция на $H_- = H^0_-$ — гильберт-шмидтова. Этот грассманиан имеет отмеченную точку, именно H_+. Для близких к ней точек Z проекция $Z \to H_+$ обратима, и, компонируя её обращение с проекцией $Z \to H_-$, имеем гильберт-шмидтов оператор $H_+ \to H_-$, который служит локальной координатой на Gr. Будем обозначать $\mathrm{Gr}^\star$ открытое подмножество грассманиана, на котором проекция $Z \to H_+$ обратима; соответствующая координата устанавливает биголоморфизм между $\mathrm{Gr}^\star$ и $L^2(H_+, H_-)$.

Зафиксируем комплексное число λ на критической прямой. Со всяким $\varphi \in \mathrm{Diff}$ можно связать унитарный оператор U_φ на H, определённый как

$$U_{\varphi^{-1}} h = (\varphi')^\lambda h \circ \varphi.$$

Это есть представление Diff на H, не непрерывное, впрочем, в операторной норме. Тем не менее, она имеет смысл в пространстве H^r, и отображение $\mathrm{Diff} \to L(H^r, H^{r-2})$ не только непрерывно, но и непрерывно дифференцируемо. Его производная вдоль вектора $(\varphi, \dot\varphi) \in T\,\mathrm{Diff}$ равна

$$H^r \ni h \mapsto \lambda(\varphi')^{\lambda-1}\dot\varphi' h \circ \varphi + (\varphi')^\lambda \dot\varphi h' \circ \varphi \in H^{r-2}.$$

....

1 Группа Вирасоры

Касательная алгебра группы Вирасоро есть абелево расширение $\mathfrak{diff}$ при помощи $\mathbb{R}$, то есть состоит из пар (v, ξ), которые умножаются по закону

$$[(v, \xi), (w, \eta)] = ([v, w], [v, \eta] + [\xi, w] + c(v, w)),$$

а поскольку оно ещё и центральное, закон умножения будет совсем простой:

$$[(v, \xi), (w, \eta)] = ([v, w], c(v, w)).$$

В качестве c мы будем брать *коцикл Гельфанда-Фукса*,

$$c(u\frac{d}{dt}, v\frac{d}{dt}) = \int_0^{2\pi} u'dv' - v'du'.$$

Выберем (быть может, не чисто) мнимое число τ и определим подалгебру

$$\mathfrak{vir}^{1,0} = \{(\sum_0^{+\infty} a_n e^{int}\frac{d}{dt}, \tau a_0)\},$$

а потом положим $\mathfrak{vir}^{0,1} = \overline{\mathfrak{vir}^{1,0}}$. Это определяет лево-инвариантную комплексную структуру на Vir.

Композиция проекций $\mathrm{Vir} \to \mathrm{Diff}$ и $\mathrm{Diff} \to \mathrm{Diff} / \mathrm{U}(1)$ голоморфна в начале группы и, следовательно, всюду. Более того, верно следующее: $\mathrm{Vir} \xrightarrow{\varpi} \mathrm{Diff} / \mathrm{U}(1)$ — главное $\mathbb{C}^\times$-расслоение. В самом деле, слой над началом есть одномерная комплексная группа Ли, гомеоморфная цилиндру. Она действует голоморфно и транзитивно по слоям. Его голомофрная тривиальность влекла бы, что это то, что нужно. Очевидное сечение даётся формулой

$$s([\varphi]) = (\varphi_0, 0) \in \mathrm{Vir},$$

где $\varphi_0 \in [\varphi]$ и $\varphi_0(0) = 0$.

Дальше Лемперт приговаривает какие-то слова:

Если u — гладкое сечение, то se^u голоморфно, если $0 = \overline{\partial}(se^u) = s(\overline{\partial}u)e^u + \overline{\partial}se^u$, то есть

$$\overline{\partial}u = -s^{-1}\overline{\partial}s.$$

Итак, если мы решим это уравнение, то мы докажем голоморфную тривиальность. Ну, а это анализ.