Голоморфно энгелевы многообразия

Франсиско Пресас и Луис Эдуадро Сола-Конде (в пересказе Р. Деева)

2013 (2015)

Содержание

1 Введение

Определение. *Распределением* D на многообразии X называется подрасслоение в касательном расслоении $TX \supseteq D$.

Теорема (Фробениус). *Многообразие X разбивается в объединение непересекающихся подмногообразий X_i таких, что $T_xX_i = D_x$, если и только если $[D, D] \subseteq D$.*

Распределения, для которых существуют семейства касающихся подмногообразий, называются *интегрируемыми.* Мерой неинтегрируемости, согласно теореме Фробениуса, служит величина $\Phi\colon \Lambda^2 D \to T/D$, называемая *тензором Фробениуса* (или, в случае риманова многообразия, когда T/D можно отождествить с подрасслоением в T, *тензором О'Нилла*).

Теорема (Рашевский, Чжоу). *Пусть D — вполне неинтегрируемое распределение на X, сиречь такое, что фильтрация $D_0 = D$, $D_{k+1} =$*

$[D_k, D]$ является исчерпывающей. Тогда любые две точки X можно соединить путём, касающимся D.

Допустим, что D состоит из ядер 1-формы α на $2n+1$-мерном многообразии X. Тогда теорема Рашевского — Чжоу влечёт, что D вполне неинтегрируемо, если только $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$. Многообразия с такими распределениями называются *контактными*, они являются нечётномерным аналогом симплектических.

Теорема (Дарбу, контактный вариант). *Всякое контактное многообразие локально контактоморфно шару в $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_i\}_{i=1}^n$, z и формой $\sum_i x dy_i - dz$.*

В 1990-х Монтгомери доказал следующую теорему:

Теорема (Монтгомери). *В категории гладких многообразий вариант теоремы Дарбу имеет место только для следующих типов распределений:*

1. *поля прямых;*
2. *контактные распределения;*
3. *чётно-контактные распределения;*
4. *энгелевы распределения.*

Первые два случая более-менее известны (вариант теоремы Дарбу для полей прямых называется теоремой о выпрямлении и хорошо знаком специалистам в динамических системах). Чётно-контактные структуры определяются на $2n$-мерных многообразиях аналогчино контактным, только требовать мы должны невырожденности формы $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)}$. На самом деле, правильнее требовать, чтобы форма α была с коэффициентами в линейном расслоении L', тогда форма $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)}$ будет формой с коэффициентами в $L'^{\otimes n}$.

Теперь мы можем перейти непосредственно к энгелевым структурам.

2 Энгелевы многообразия

Те, кто хоть раз в жизни задумывался о том, как управлять машиной, едущей по римановой поверхности, понимают, что её конфигурационное пространство четырёхмерно: помимо координат на самой римановой поверхности, важно, куда смотрит сама машина и куда смотрят её ведущие колёса. При этом мы можем менять только два параметра: менять скорость и крутить руль. Таким образом, в конфигурационном пространстве машина всегда движется вдоль некого двумерного распределения F, которое вполне неинтегрируемо в силу того, что из любой точки в конфигурационном пространстве можно добраться в любую. Каждый, кто хоть раз наблюдал процесс парковки, знает, что $[D, D] = E$ ещё не даёт всего касательного пространства, а вот $[E, E]$ уже даёт.

Определение. Четырёхмерное многообразие X с двумерным распределением D называется *энгелевым*, если E трёхмерно, а $[E, E] = T$.

Фридрих Энгель, соавтор Софуса Ли (известный своей теоремой о существовании точного представления нильпотентной группы Ли, сдвигающего полный флаг), был, видимо, первым *математиком*, рассмотревшим такие распределения (за крайней практичностью и наглядностью нет совершенно никакой надежды выяснить, кто из механиков первым рассматривал эту структуру), он же доказал для них вариант теоремы Дарбу.

Утверждение 1. *Пусть D — энгелева структура. Тогда существует линейное подрасслоение $L \subset D$ такое, что $[L, D] = D$.*

Доказательство. Пусть $L' = T/E$. Тензор Фробениуса Φ есть отображение $\Lambda^2 E \to L'$. E трёхмерно, так что $\Lambda^2 E$ также трёхмерно, и ядро Фробениуса F двумерно. Пусть ещё $L'' = E/D$, тогда $\Lambda^2 E = \Lambda^2 D \oplus D \otimes L''$. Как F располагается относительно этого расщепления? Коммутатор отображает $\Lambda^2 D$ в E, так что при факторизации по E он уйдёт. Стало быть, $\Lambda^2 D \subset F$, и $F/\Lambda^2 D$ есть линейное подрасслоение в $D \otimes L''$. Значит, $F/\Lambda^2 D \otimes (L'')^\vee$ есть линейное подрасслоение в D. Нужное нам условие легко видеть. □

Тем самым, в каждой точке энгелева многообразия имеется флаг $0 \subset L \subset D \subset E \subset T$, так что все энгелевы многообразия параллелизуемы. Теорема Фогеля 2009 года обращает этот результат в гладкой категории: всякое параллелизуемое четырёхмерное многообразие допускает энгелеву структуру.

Обозначим L за L_0, а последующие факторы за $L_1 = D/L$, $L_2 = E/D$ и $L_3 = T/E$. Из определений и определительной точной последовательности следуют равенства $\Lambda^2 D = L_0 \otimes L_1$, $\Lambda^3 E = \Lambda^2 D \otimes L_2$ и $\omega_X^{-1} = \Lambda^3 E \otimes L_3$. Кроме того, невырожденность тензора Фробениуса для D даёт изоморфизм $\Lambda^2 D = E/D = L_2$, а невырожденность тензора Фробениуса для E вкупе с определением L даёт равенство $L_1 \otimes L_2 = (D/L) \otimes L_2 = L_3$. Мы доказали следующее

Утверждение 2. *Имеют место равенства:*

1. $T/E = \Lambda^2(E/L) = L \otimes L_1^{\otimes 2}$;
2. $E/D = \Lambda^2 D = L \otimes L_1$;
3. $\Lambda^3 E = L^{\otimes 2} \otimes L_1^{\otimes 2}$;

4. $\Lambda^3(T/L) = L^{\otimes 2} \otimes L_1^{\otimes 4}$;
5. $\omega_X^{-1} = L^{\otimes 3} \otimes L_1^{\otimes 4}$.

3 Теорема Дарбу

Как уже упоминалось, вариант теоремы Дарбу для энгелевых многообразий доказал сам Энгель. Поскольку мы интересуемся комплексной геометрией, нам понадобится следующая комплексная версия этой теоремы.

Утверждение 3 (вариант Энгеля теоремы Дарбу, комплексная версия)**.** *Всякое комплексное энгелево многообразие локально энгеleморфно диску в $\mathbb{C}^4$ с распределением, равным пересечению ядер форм $dx - ydz = 0$ и $dy - wdx = 0$.*

Доказательство. Нам понадобятся следующие факты из комплексной контактной геометрии.

Лемма (стабильности Грея, голоморфная версия)**.** *Пусть*

$$\mathcal{F}_t \to T_X \xrightarrow{\theta_t} \mathcal{O}$$

есть семейство контактных структур, параметризованное диском с координатой t. Тогда для некоторой окрестности V точки x существует семейство голоморфных отображений $\varphi_t \colon V \to X$ таких, что $\varphi_t^* \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ для малых t.

Доказательство. Утверждение леммы равносильно утверждению $\varphi_t^* \theta_t = f_t \theta_0$, где f_t — семейство функций. Дифференцируя требуемое по времени, получаем

$$\varphi_t^* \left(\frac{d}{dt}\theta_t + \mathrm{Lie}_{v_t}\theta_t\right) = \frac{df_t}{dt}\theta_0,$$

где v_t — векторные поля, определяющие потоки φ_t, что может быть переписано как

$$\frac{d}{dt}\theta_t + \mathrm{Lie}_{v_t}\theta_t = h_t \theta_t,$$

где $h_t = (\frac{1}{f_t}\frac{d}{dt}f_t) \circ \varphi_t^{-1}$. Для контактных структур, фактор по которым тривиален, существует так называемое *поле Риба R*, удовлетворяющее условиям

$$\iota_R d\theta = 0,$$
$$\iota_R \theta = 1,$$

поскольку $\ker d\theta$ есть поле прямых в силу невырожденности контактной структуры, а второе условие есть просто нормировка. Положим $h_t = \iota_{R_t} \frac{d}{dt}\theta_t$. Утверждается, что после этого v_t восстанавливается однозначно. □

Утверждение 4 (теорема Дарбу, контактная версия, голоморфный вариант). *Всякое контактное многообразие локально контактоморфно контактному шару.*

Доказательство. Возьмём на шаре контактную форму, продолженную на нём, как на шар в векторном пространстве, из его центра. Быть контактным — локально выпуклое условие, так что на маленьком шарике с тем же центром их можно соединить прямолинейным путём. Значит, они локально контактоморфны. □

Теперь достаточно показать, что локальные автоморфизмы чётноконтактных структур настолько богаты, что любое поле прямых можно перевести в любое. Это некоторое вычисление в локальных координатах, которое мне не хочется проделывать. □

4 Картановское продолжение контактной структуры

Два примера голоморфно энгелевых многообразий, которые мы здесь рассмотрим, являются комплексными версиями вещественных энгелевых многообразий, известных ещё Эли Картану. Заметим, что конструкция Фогеля, о которой говорилось в начале доклада, существенно неголоморфна. Мы будем давать вещественные версии, но в таком виде, что их алгебраичность будет очевидна.

Пусть Z — трёхмерное многообразие с контактной структурой $F \subset T_Z$. Рассмотрим четырёхмерное многообразие $X = \mathbb{P}(F)$. Его точки суть пары (z, l), где z — точка многообразия Z, а $l \subset F_z$ — прямая в контактной плоскости. Касательный вектор в точке (z, l) состоит из касательного вектора к Z в точке z и касательного вектора к l в проективизации $\mathbb{P}(F_z)$. Энгелево распределение D в каждой точке состоит из таких векторов, что компонента их, касательная к Z, коллинеарна прямой l. Это — двумерное распределение, коммутатор которого с собой в точке (z, l) состоит из тех векторов, компонента которых, касательная к Z, лежит в плоскости F_z. Оно, понятно, трёхмерно; его коммутатор с собой уже даёт всё касательное расслоение.

Эта конструкция очень похожа на конструкцию контактной структуры на проективизации кокасательного расслоения: именно, на них контактная структура состоит из тех векторов, компонента которых, направленная вдоль многообразия, лежит в гиперплоскости касательной структуры. Если применить описанную выше конструкцию к проективизации кокасательного расслоения к римановой поверхности, мы получим конфигурационное пространство машинки, которая паркуется на этой римановой поверхности.

Утверждение 5. *Пусть X — четырёхмерное проективное с энгелевой структурой $0 \subset L \subset D \subset E \subset T$. Допустим, что все листы L компактны. Тогда они рациональны.*

Доказательство. Пусть C — какой-то лист. Проекция на пространство листов есть проекция локально-тривиального расслоения, так что нормальное расслоение $T/L|_C$ к C тривиально. $\omega_X^{-1}|_C = TC = L|_C$. Но $\omega_X^{-1} = L^{\otimes 3} \otimes (D/L)^{\otimes 4}$, так что дивизор $L^{\otimes 2} \otimes (D/L)^{\otimes 4}|_C = (\omega_X^{-1} \otimes L^\vee)|_C = (L \otimes L^\vee)|_C$ степени ноль (а значит и $L \otimes (D/L)^{\otimes 2}|_C = T/E|_C$). С другой стороны, точная последовательность $0 \to E/L|_C \to T/L|_C \to T/E|_C \to 0$ говорит, что $T/E|_C$ глобально порождён, следовательно, тривиален. Значит, и $E/L|_C$ тривиален (как ядро отображения тривиальных расслоений).

Поскольку $L \otimes (D/L)^{\otimes 2}|_C$ тривиален, $K_C = (D/L)^{\otimes 2}|_C$, и $\deg(D/L)|_C = \frac{\deg K_C}{2} = g-1$. Следовательно, $\deg L \otimes (D/L)|_C = -(2g-2)+(g-1) = 1-g$. В силу точной последовательности $0 \to D/L|_C \to E/L|_C \to E/D|_C = L \otimes (D/L)|_C \to 0$ расслоение $L \otimes (D/L)|_C$ является фактором тривиального, следовательно, не может иметь отрицательную степень, так что $g \leqslant 1$.

Если $g = 1$, то $L|_C$ и $(D/L)|_C$ тривиальны. Пусть $Z \subset \mathrm{Chow}(X)$ параметризует листы, тогда, если $X \xrightarrow{\pi} Z$ — проекция, то $D/L = \pi^* L_Z \subset T_Z$. Значит, $D = (d\pi)^{-1} L_Z$ тривиален по слоям π, что противоречит его неинтегрируемости. $\square$

Отсюда получается пример чётно-контактной структуры, не приходящей из энгелевой структуры: достаточно взять расслоение на кривые большого рода над трёхмерным контактным многообразием и взять прообраз контактной структуры относительно проекции.

5 Лоренцевы трубы

В комплексном векторном пространстве невырожденная квадратичная форма имеет конус, состоящий из векторов нулевой длины; проективизация этого конуса есть квадрика размерности $r-2$, где r — ранг расслоения. Эта конструкция может быть распростёрта над любым многообразием; в таком случае квадратичной форме позволительно будет иметь коэффициенты в любом линейном расслоении. Послойная проективизация конуса векторов нулевой длины будет расслоением на квадрики. Такие расслоения называются *трубами*.

Определение. *Лоренцева труба* есть труба на касательном расслоении.

Пусть Y — трёхмерное многообразие. Проективизация его касательного расслоения пятимерна и имеет каноническое трёхмерное подрасслоение, хорошо известное пен-спиннерам: оно определяется законом «точка приложения скользит вдоль прямой». Если $\lambda \in H^0(Y, S^2\Omega_Y \otimes M)$ —

квадратичная форма в касательном расслоении, то X — соответствующая ей лоренцева труба — коразмерности один в этой проективизации, и трансверсальна этому расслоению. Его ограничение определяет двумерное подрасслоение D в четырёхмерном многообразии X. Легко видеть, что коммутаторы полей из этого подрасслоения двигают точку приложения прямой вдоль по ортогоналу к этой прямой (который будет двумерен и содержать прямую). Таким образом, коммутатор $[D, D]$ трёхмерен, а вот уже его коммутатор с собой порождает всё. Таким образом, это энгелева структура.

Такие примеры не очень богаты в силу следующей теоремы, доказанной в 2005 году двумя учениками Петернелла:

Теорема (Приска Янке, Иво Радлофф). *Если трёхмерное проективное многообразие допускает голоморфную квадратичную форму, то оно принадлежит к следующему списку:*

1. *Трёхмерная квадрика;*

2. *Неразветвлённое накрытие абелева трёхфолда;*

3. *Фактор симметрического пространства, двойственного к трёхмерной квадрике.*

Напомним, что симметрическое пространство определяется полупростой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вкупе с автоморфизмом s векторного пространства $\mathrm{forget}_{k-\mathrm{Vect}}^{k-\mathrm{Lie}}\,\mathfrak{g}$ таким, что $s^2 = 1$. Он определяет разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$, где $\mathfrak{g}_+$ — подалгебра Ли. Двойственное симметрическое пространство определяется выбором в векторном пространства $\mathrm{forget}_{\mathbb{R}-\mathrm{Vect}}^{\mathbb{C}-\mathrm{Lie}}\,\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$ подпространства $\mathfrak{g}_+ \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_-$, являющегося подалгеброй Ли в алгебре ли $\mathrm{forget}_{\mathbb{R}-\mathrm{Lie}}^{\mathbb{C}-\mathrm{Lie}}\,\mathbb{C}\otimes\mathfrak{g}$, которая, вкупе с инволюцией, приходящей из комплексного сопряжения на $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, определяет *двойственное симметрическое пространство.* Теорема Картана — Бореля — Хариш-Чандры утверждает, что симметрическая область, двойственная к компактной эрмитовой, голоморфно вкладывается как ограниченное открытое множество в комплексном векторном пространстве.

6 Канонический класс энгелева многообразия

Определение. Линейное расслоение над кэлеровым многообразием называется *псевдоэффективным*, если его класс Черна лежит в замыкании конуса классов замкнутых положительных $(1,1)$-потоков.

В частности, произведение двух псевдоэффективных расслоений псевдоэффективно. Всякое псевдоэффективное расслоение обладает эрмитовой метрикой, кривизна которой — положительная форма. На проективном многообразии псевдоэффективное расслоение — это в точности такое, первый класс Черна которого есть предел классов Черна эффективных расслоений.

Напомним следующие теоремы из алгебраической геометрии.

Теорема (Дюмаи). *Ядра 1-формы с коэффициентами в расслоении, обратном к псевдоэффективному, на кэлеровом многообразии касаются листов.*

Эта теорема доказывается выписыванием локального потенциала для эрмитовой метрики упомянутого псевдоэффективного расслоения и интегрированием по частям, так что я не буду воспроизводить её доказательство. Впрочем, в проективном случае форма $\theta \wedge d\theta$ является элементом $H^0(X, \Omega_X^3 \otimes L^2)$, которое двойственно по Серру $H^n(X, \Omega_X^{n-3} \otimes L^{-2})$, которое зануляется в силу теоремы Кодаиры — Накано.

Теорема (Буксом, Дюмаи, Петернелл, Паун). *На проективном многообразии дивизор псевдоэффективен тогда и только тогда, когда он неотрицательно пересекается с каждой подвижной кривой.*

Утверждение 6. *Пусть кэлерово многообразие X допускает голоморфную энгелеву структуру $L \subset D \subset E$. Тогда либо L^{-1}, либо $(D/L)^{-1}$ не является псевдоффективным. Более того, если либо L псевдоэффективно, либо $\Lambda^2 D$ псевдоэффективно, то канонический дивизор X не псевдоэффективен, или, что то же самое, X унилинейчато.*

Доказательство. Применяя теорему Дюмаи к расслоению T/E, можно заключить, что $(T/E)^\vee$ не может быть псевдоэффективно. Но $T/E = L \otimes (D/L)^{\otimes 2}$, значит, или $L^\vee$, или $(D/L)^\vee$ не псевдоэффективно.

В силу теоремы БДПП, $(T/E)^{-1}|_C$ будет обязательно отрицательной степени для какой-нибудь подвижной кривой C. Соответственно, $(T/E)|_C$ будет положительно на ней. Но $\omega_X^{-1} = L \otimes (T/E)^{\otimes 2} = \Lambda^2 D \otimes (T/E)$, так что $\omega_X^{-1} \cdot C > 0$, а $\omega_X \cdot C < 0$. Значит, эта подвижная кривая рациональна, то есть многообразие унилинейчато. $\square$

7 Первый случай: L^{-1} не псевдоэффективно

Оставим без доказательства следующий вспомогательный факт.

Утверждение 7. *Пусть X — проективное многообразие, и L — поле прямых на нём. Если $L^\vee$ не численно эффективен, то X изоморфно $\mathbb{P}^1$-расслоению над какой-то базой Z, так что слои касаются L.*

Утверждение 8. *Если на энгелевом многообразии $0 \subset L \subset D \subset E \subset T$ расслоение $L^\vee$ не является численно эффективным, то оно получается конструкцией Картана.*

Доказательство. Согласно факту, оставленному без доказательства, X изоморфно $\mathbb{P}^1$-расслоению над какой-то базой Z. Имеет место точная последовательность:

$$0 \to E/L \to T_X/L = \pi^* T_Z \to T/E \to 0.$$

Аналогично одному из предыдущих рассуждений, E/L и T/E постоянны вдоль слоёв. Согласно упражнению 12.9 из третьей главы Хартсхорна $E/L = \pi^* E_Z$, $T/E = \pi^* L'_Z$, где E_Z и L'_Z — локально свободные пучки рангов 2 и 1 соответственно. Применяя π_* к пресловутой точной последовательности и замечая, что $R^1\pi_* E/L = 0$, имеем точную последовательность

$$0 \to E_Z \to T_Z \xrightarrow{\phi} L'_Z \to 0.$$

E_Z есть контактная структура на Z, из которой исходная энгелева структура получается картановской конструкцией. □

8 Второй случай: $(D/L)^{-1}$ не псевдоэффективно

Утверждение 9. *Пусть $L \subset D \subset E$ — энгелева структура на многообразии X такая, что $(D/L)^{-1}$ не численно эффективно. Если L — прямое слагаемое D, то существует трёхмерное многообразие Z с голоморфно римановой метрикой такой, что X — его лоренцева труба.*

Доказательство. Вложим D/L в D, пользуясь нашим предположением. Пользуясь упомянутым выше фактом, мы рассматриваем X как $\mathbb{P}^1$-расслоение над какой-то базой Y. Тогда L низводится прямой проекцией на Y, □