доклад про h-принцип

Фредерик Кампана и Йорг Винкельман

20 февраля 2014

Содержание

1 предыстория

по Громову, комплексное пространство[1] X называется *удовлетворяющим h-принципу* ($hP(X)$), если для каждого непрерывного отображения из штейнова многообразия[2] $S \xrightarrow{f} X$ существует голоморфное отображение $S \xrightarrow{h} X$, гомотопное f. истоки этого обозначения лежат в работах Грауэрта[3] и Оки[4]: Грауэрт показал, что всякое сечение голоморфного главного расслоения на комплексные группы Ли над штейновым многообразием гомотопно голоморфному. классификации непрерывных комплексных и голоморфных расслоений над штейновыми многообразиями тем самым одинаковы; Ока установил это независимо для линейных расслоений. теорема Грауэрта для тривиального расслоения означает, что

[1]многообразие, быть может, с особенностями

[2]комплексного подмногообразия n-мерного пространства над $\mathbb{C}$

[3]*Ханс Грауэрт* (1930 — 2011) — германский комплексный аналитик и геометр; его использование пучков в этой области в дальнейшем повлияло на алгебраическую геометрию.

[4]*Киёши Ока* (1901 — 1978) — знаменитый японский комплексный аналитик, в конце 1930х решил проблемы Кузена и предвосхитил изобретение Лере пучков, в 1950 году доказал когерентность пучка голоморфных функций на комплексном многообразии (теорема когерентности Оки).

комплексная группа Ли удовлетворяет h-принципу. Громов в дальнейшем обобщил это на «эллиптические» (а Форстнерич — на «субэллиптические») многообразия, в том числе $\mathbb{P}^n$, грассманианы, торы, а также $\mathbb{C}^n - A$, где A — алгебраическое подмногообразие коразмерности хотя бы 2. (суб)эллиптические многообразия содержат так много «целых» кривых, как это возможно, и в этом противоположны Броди-гиперболичным многообразиям[5]. коль скоро «гиперболичность» предполагается совпадающей с «общим типом» в алгебраической геометрии, проективные hp-многообразия *«специальны»* в том или ином смысле.

2 «специальность»

довольно странное определение «специальности» — это обобщение на высокие размерности рациональных и эллиптических кривых, в противоположность многообразиям «общего типа» (которые напоминают куда более чаще встречающиеся кренделя), в том смысле, что они и их конечные (этальные) накрытия не допускают невырожденных мероморфных отображений в «орбиобразия» общего типа. многие качественные свойства кривых малых родов хочется ожидать обобщающимися на «специальные многообразия», может быть, в неузнаваемом виде. Пусть X — компактное кэлерово многообразие.

пусть $p > 0$, и $L \subset \Omega^p_X$ — когерентный насыщенный[6] подпучок ранга 1. положим

$$\kappa^{sat}(X, L) = \limsup_{m>0} \frac{\log(h^0(X, \overline{mL}))}{\log(m)},$$

где $H^0(X, \overline{mL}) \subset H^0(X, (\Omega^p_X)^{\otimes m})$ — подпространство сечений со значениями в $L_x^{\otimes m} \subset (\Omega^p_X)_x^{\otimes m}$ в общей точке $x \in X$. эта величина называется размерностью Кодаиры одномерного пучка L; размерностью Кодаиры многообразия называется размерность Кодаиры его канонического пучка. согласно обобщению Богомолова теоремы Кастельнуово — де Франши, $\kappa^{sat} \leqslant p$, причём равенство достигается только если $L = f^* K_Y$ в общей точке для некоторого мероморфного доминантного отображения[7] в компактное p-мерное многообразие Y. такой пучок мы будем называть *пучком Богомолова*, и что X «специально», если на нём нет пучка Богомолова.

заметим, что «специальные» многообразия «очень слабо специальны», то есть не допускают нетривиального доминантного отображения в многообразие «общего типа» — оттяг его канонического пучка был бы пучком Богомолова. в частности, они не общего типа. «специальность» очевидным образом бимероморфное свойство, и что всякое мно-

[5] не допускающим непостоянных голоморфных отображений в себя из $\mathbb{C}$
[6] такой, что $L \subset L^{**}$
[7] с Зариски-плотным образом

гообразие, субмиссивное X, также специально. конечнолистное неразветвлённое накрытие специального многообразия также специально; доказательство этого удивительно трудно. это свойство влёчёт свойство «слабой специальности» (которое утверждает, что какое-то неразветвлённое накрытие «очень слабо специально» в вышеизложенном смысле). несмотря на естественный вид, условие слабой специальности не даёт какой-либо адекватной геометрической структуры, вроде той, что предоставляется ядерным отображением (см. ниже). С другой стороны, характеризация занулением метрики Кобаяши слишком слабая. компактные кэлеровы многообразия, которые либо покрываются рациональными кривулями, либо имеют $\kappa = 0$, специальны; для каждого $n > 0$ и всякого $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n-1\}$ существуют специальные многообразия $\dim X = n$ и $\kappa X = \kappa$ для кривых специальность эквивалентна очень слабой специальности, а также негиперболичности. для поверхностей специальность эквивалентна слабой специальности, а также условию $\kappa < 2$ вместе с почти абелевостью π_1. они исчерпываются следующими классами: $\kappa = -\infty$ и $h^{1,0} \leqslant 1$, $\kappa = 0$, $\kappa = 1$ и $h^{1,0}(X') \leqslant 1$ для всякого конечнолистного накрытия $X' \to X$. гипотетическая другая характеризация компактных кэлеровых специальных поверхностей такова: X специально согда оно субмиссивно $\mathbb{C}^2$ (с возможными исключениями в виде неэллиптических K3, которые специальны, но, как известно, не субмиссивны $\mathbb{C}^2$). для высоких размерностей существуют специальные, но не слабо специальные многообразия, и никакой простой характеризации специальности через κ и π_1 не видать. более того, есть примеры слабо специальных многообразий с нетождественной нулевой метрикой Кобаяши.

определению специальности мы обязаны следующим двум фактам:

теорема 2.1. *для всякого компактного кэлерова многообразия X существует*

(...)

3 трюк Жуанулу

теорема 3.1. *пусть X — проективное многообразие. тогда на него есть сюръективная гомотопическая эквивалентность $M \xrightarrow{\tau} X$ из гладкого полного афинного многообразия, каждый слой которой изоморфен $\mathbb{C}^n$, локально голоморфно устроенная как тривиальное векторное расслоение, у которой есть вещественно-аналитическое сечение.*

Доказательство. рассмотрим случай $\mathbb{P}^N$. пусть $D \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N*}$ — дивизор, состоящий из пар (x, H) таких, что $x \in H$. этот дивизор обилен, поскольку положительно пересекается с семействами прямых, содержащимся в слоях проекций на сомножители, пусть V — его дополнение; ограничение проекции на первый сомножитель на V даёт нам необходимое τ. вещественно-аналитическое сечение соответствует выбору гладкой эрмитовой метрики на $\mathbb{C}^{n+1}$ и отправлению прямой в её ортогонал. в общем случае, вложим X в $\mathbb{P}^n$ и рассмотрим прообраз X при проекции на это $\mathbb{P}^n$. $\square$

для $X = \mathbb{P}^1$ M будет двумерной аффинной квадрикой. для проективной кривой M может быть построено другим образом: первая проекция из $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 - D$ задаст аффинное расслоение со слоем $\mathbb{C}$ над $\mathbb{P}^1$. теперь конечнолистно накроем $\mathbb{P}^1$ нашей кривой и оттянем расслоение вдоль этого накрытия.

4 сопряжённые комплексные структуры и связанные когомологические спаривания

пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — доминантное мероморфное отображение компактных комплексных многообразий. тогда для каждого $c \in H^{k,k}Y$ существует единственный $c' \in H^{k,k}X$ такой, что $[\alpha]c' = \int_{X-If} \alpha \wedge f^*\beta$ для всякой $\alpha \in \Omega^{n-k,n-k}X$ и $\beta \in H^{k,k}X$, представляющей c. определим обратный образ c как $f^*c = c'$.

Доказательство.

$$(\dots)$$

$\square$

ясно, что обратный образ уважает композицию доминантных мероморфных отображений и в случае голоморфности отображения становится обычным оттягиванием. заметим, что он даёт отображение линейное отображение групп когомологий, но не гомоморфизм их колец.

на комплексном многообразии X определим *сопряжённую комплексную структуру* так. рассмотрим X как вещественное многообразие с интегрируемой почти комплексной структурой J и заменим её на $-J$. она в силу интегрируемости J также будет интегрируемой, и по теореме Ньюлендера — Ниренберга даст комплексную структуру на X. отображение $[z_0\colon z_1\colon \dots z_n] \to [\overline{z_0}\colon \overline{z_1}\colon \dots \overline{z_n}]$ биголоморфно сопоставляет $\mathbb{P}^n$ и его сопряжённое, стало быть, сопряжённое к проективному многообразию также проективно. если X кэлерово, то $\overline{X}$ также кэлерово с кэлеровой формой $-\omega$. коль скоро ориентация кэлерова многообразия определяется тем, что ω^n положительна, то чётномерные кэлеровы многообразия при сопряжении сохраняют ориентацию, а нечётномерные меняют.

лемма 4.1. *пусть X — n-мерное компактное комплексное многообразие, $\overline{X} \xrightarrow{\zeta} X$ — гладкое отображение, гомотопное тождественному на подстилающих вещественных многообразиях. пусть $X \xrightarrow{c} Y$ — мероморфное отображение, а α — d-замкнутая $2k$-форма на Y, и $\omega_X \in \Omega^{1,1}X$. тогда $I' = \int_{\overline{X}} \zeta^*(\omega_X^{n-k} \wedge (c^*\alpha)) = (-1)^k \int_X \omega_X^{n-k} \wedge (c^*\alpha) = (-1)^k I$.*

Доказательство. непосредственное вычисление. □

если $X \xrightarrow{c} Y$ — доминантное отображение в компактное кэлерово многообразие, $\overline{X} \xrightarrow{c\zeta} Y$ не мероморфно. в самом деле, пусть оно мероморфно. применяя лемму для кэлеровой формы и $k = 1$, имеем $0 < \int_{\overline{X}} \omega_{\overline{X}}^{n-1} \wedge ((c\zeta)^*\omega_Y) = -\int_X \omega_X^{n-1} \wedge (c^*\omega_Y) > 0$.

5 h-принцип и Броди-гиперболичность