УДК 512.745.2 ДЕЙСТВИЯ КОММУТАТИВНОЙ УНИПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ ФЛАГОВ И НИЛЬПОТЕНТНЫЕ УМНОЖЕНИЯ

Р. А. Девятов

Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа над $\mathbb{C}$, $P \subset G$ — параболическая подгруппа. Обозначим аддитивную группу поля через $\mathbf{G}_a$. Пусть $m = \dim G/P$. Наша цель — классифицировать действия *коммутативной унипотентной группы* $(\mathbf{G}_a)^m$ на *обобщенном многообразии флагов* G/P с открытой орбитой с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$. Не ограничивая общности, будем считать, что центр группы G тривиален. Используя известные результаты об автоморфизмах обобщенных многообразиях флагов (см., например, [1]), можно свести эту задачу к случаю, когда группа G простая.

Вопрос о существовании действий коммутативной унипотентной группы на различных полных многообразиях и классификации таких действий был поставлен в [2]. Он был решен для различных классов многообразий в работах [2], [3], [4]. В частности, в [4] были перечислены все обобщенные многообразия флагов, на которых существует хотя бы одно действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ с открытой орбитой.

Чтобы сформулировать этот результат, введем некоторые обозначения. Будем перечислять вершины схем Дынкина и соответствующие им простые корни в системах корней как в [5]. Если зафиксирована простая алгебраическая группа G, то будем обозначать (определенную с точностью до сопряжения) максимальную параболическую подгруппу, соответствующую i-му простому корню, через P_i.

Следуя [1], назовем пару (G, P), где G — простая алгебраическая группа с тривиальным центром, а $P \subset G$ — параболическая подгруппа, *исключительной* в следующих случаях: если $G = PSp_{2l}$, $P = P_1$, если $G = PSO_{2l+1}$, $P = P_l$, или если G — группа типа G_2, $P = P_1$. В противном случае назовем пару (G, P) *неисключительной.* Известно, что если (G, P) — исключительная пара, то существует такая неисключительная пара (H, Q), что многообразие G/P изоморфно H/Q. Далее будем считать, что пара (G, P) не является исключительной.

Теорема 1. *[4, Theorem 1] В предыдущих обозначениях и предположениях, многообразие G/P допускает локально транзитивное действие группы $(\mathbf{G}_a)^m$ тогда и только тогда, когда унипотентный радикал группы P коммутативен, то есть в точности в следующих случаях: 1) $G = SL_{l+1}$, P — любая максимальная параболическая подгруппа, 2) $G = SO_{2l+1}$, $P = P_1$, 3) $G = PSp_{2l}$, $P = P_l$, 4) $G = PSO_{2l}$, $P = P_i$, где $i = 1, l-1, l$, 5) G — группа типа E_6, $P = P_1$ или $P = P_6$, 6) G — группа типа E_7, $P = P_7$.*

Пусть V — конечномерное представление связной редуктивной группы L, $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$. Назовем умножение (билинейное отображение) $V \times V \to V$ *согласованным с действием алгебры* $\mathfrak{l}$, если оно коммутативно, ассоциативно, все операторы умножения нильпотенты, и для любого вектора $v \in V$ существует такой элемент $x \in \mathfrak{l}$, что оператор умножения на вектор v действует на пространстве V так же, как и элемент x.

Теорема 2. *Мы сохраняем обозначения и предположения, введенные выше. Пусть $P^- \subset G$ — такая параболическая подгруппа, что группа $L = P \cap P^-$ является подгруппой Леви в P. Пусть $\mathfrak{u}^-$ — алгебра Ли унипотентного радикала группы P^-, $\mathfrak{l} = \operatorname{Lie} L$.*

Тогда действия группы $(\mathbf{G}_a)^m$ на многообразии G/P с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$

находятся во взаимно-однозначном соответствии с умножениями на алгебре $\mathfrak{u}^-$, согласованными с (присоединенным) действием алгебры $\mathfrak{l}$.

Предложение 1. *В предыдущих обозначениях, пусть в представлении V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда все операторы умножения на самом деле являются операторами действия элементов алгебры $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]$. Если при этом $[\mathfrak{l},\mathfrak{l}] = \mathfrak{l}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{l}_s$, где $\mathfrak{l}_i$ просты, то после подходящей перестановки слагаемых $\mathfrak{l}_i$ существует такое разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$ и такой индекс $r \le s$, $r \le t$, что: 1) V_i — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{l}_i$ при $1 \le i \le r$, 2) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \le i, j \le s$, $i \ne j$, 3) $V_iV_j = 0$ при $1 \le i, j \le s$, $i \ne j$, 4) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $1 \le i \le s$, $s < j \le t$, 5) $\mathfrak{l}_i \cdot V_j = 0$ при $s < i \le r$, $1 \le j \le s$, 6) $V_iV = 0$ при $s < i \le t$.*

Далее будем считать, что группа L простая, а представление V неприводимое.

Пусть на векторном пространстве V задана невырожденная билинейная форма $\omega\colon V \times V \to \mathbb{C}$. Назовем трилинейную форму $c\colon V \times V \times V \to \mathbb{C}$ *двойственной* к умножению $\mu\colon V \times V \to V$, если $\forall u, v, w \in V$ $c(u, v, w) = \mu(uv, w)$. Ясно, что умножение однозначно определяется по двойственной к нему трилинейной форме, и наоборот.

Теорема 3. *В предыдущих обозначениях и предположениях, пусть на представлении V можно ввести ненулевое умножение, согласованное с действием алгебры $\mathfrak{l}$. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей:*

1. *$L = SL(W)$, где W — некоторое векторное пространство, $V = W$ или $V = W^*$. Тогда умножение на пространстве V может быть любым коммутативным ассоциативным умножением, для которого все операторы умножения нильпотентны.*

2. *$L = Sp(V, \omega)$ для некоторой невырожденной кососимметрической формы $\omega\colon V \times V \to \mathbb{C}$. Зафиксируем лагранжево подпространство $V_1 \subset V$. Тогда трилинейные формы, двойственные к умножениям, согласованным с действием алгебры $\mathfrak{l}$, рассматриваемые с точностью до действия группы L — это в точности продления симметричных трилинейных форм на пространстве V/V_1, рассматриваемых с точностью до действия группы $GL(V/V_1)$, на пространство V.*

Возвращаясь к действиям $(\mathbf{G}_a)^m : G/P$, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *В предыдущих обозначениях и предположениях, если G/P — проективное пространство, то действия $(\mathbf{G}_a)^m : G/P$ с открытой орбитой с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ параметризуются классами изоморфизма коммутативных ассоциативных m-мерных алгебр с нильпотентными операторами умножения. В противном случае либо действие $(\mathbf{G}_a)^m : G/P$ с открытой орбитой существует и единственно с точностью до сопряжения автоморфизмами многообразия G/P и с точностью до автоморфизмов группы $(\mathbf{G}_a)^m$ (пары (G, P), для которых это верно, перечислены в теореме 1), либо действий $(\mathbf{G}_a)^m : G/P$ с открытой орбитой нет вообще.*

Список литературы

[1] M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39**:2 (1977), pp. 179–186. **[2]** *Geometry of equivariant compactifications of G_a^n*, Intern. Math. Research Notices, **22** (1999), pp. 1211-1230. **[3]** Е. В. Шаройко, *Соответствие Хассетта–Чинкеля и автоморфизмы квадрики*, Мат. Сб. **200**:11 (2009), сс. 145–160. **[4]** I. V. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **139**:3 (2011), pp. 783–786. **[5]** N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI*, Hermann, Paris, 1968.

Р. А. Девятов (R. A. Devyatov)

Математический факультет Высшей Школы Экономики, Москва

Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin, Германия

E-mail: deviatov@mccme.ru