Задача. *Известно, что в пространстве размерности $D = 2d$, $D \geq 4$ существует циклический многогранник, который обладает следующим „замечательным свойством“:* ***любые*** *d* ***его вершин образуют грань.*** *Существуют ли другие многогранники, обладающие замечательным свойством?*

Оказывается, они существуют. Будем строить такой многогранник с $n = D + 4$ вершинами. Тогда его диаграмма Гейла будет плоской ($n - D - 2 = 2$). Потребуем от диаграммы одно дополнительное условие: пусть имеется ровно $d + 3$ черных вершин (напомним, что $D = 2d$), образующих выпуклый многоугольник. Все остальные вершины белые.

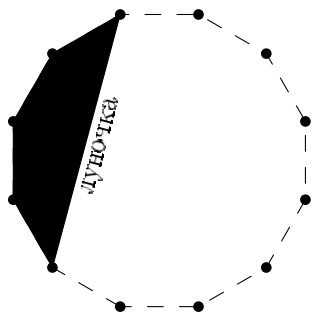
Итак, будем искать многогранники размерности D с $D + 4$ вершинами, если про их диаграмму Гейла известно следующее: в ней имеется ровно $d + 3$ черных вершин, образующих выпуклый многоугольник.

Утверждение 1. *Все белые точки находятся строго внутри $d + 3$-угольника.*

Действительно, если хотя бы одна белая точка находится не внутри $d+3$-угольника, то удалим остальные d белых точек. Оставшаяся одна белая точка не пересекает выпуклую оболочку черных (т. е. $d+3$-угольник с внутренностью) по его относительной внутренности. Утверждение доказано.

Далее будем говорить, что для некоторого подмножества наших точек выполнено свойство Ч∩Б, если выпуклая оболочка черных точек пересекается с выпуклой оболочкой белых точек по относительным внутренностям.

<u>Определение.</u> Будем называть *луночкой* выпуклую оболочку нескольких подряд идущих вершин $d + 3$-угольника.



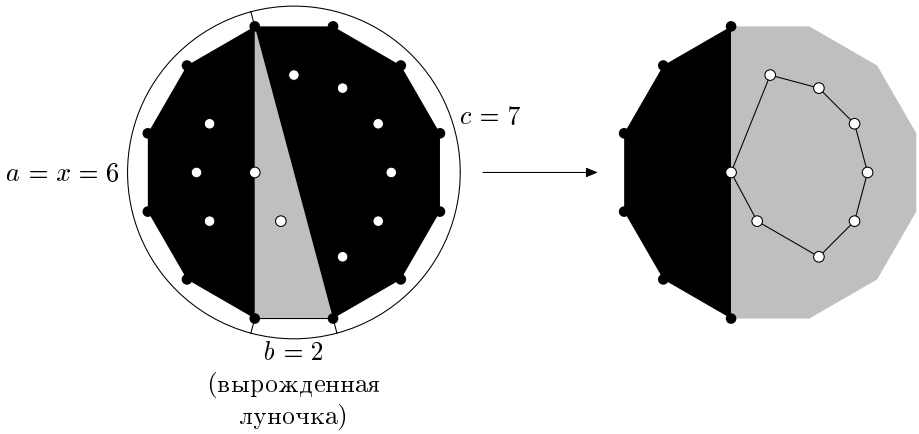
Утверждение 2. *В любом треугольнике, образованном 3 черными вершинами, включая его границу, не должно быть более одной белой точки.*

Действительно, выкинем из выпуклой оболочки $d+3$-угольника этот треугольник (с внутренностью). Он распадется на одну, две или три луночки. Если их две, то будем считать, что образовалась одна вырожденная луночка — та сторона треугольника, которая одновременно была стороной $d+3$-угольника (как отрезок), а если образовалась одна луночка, то аналогичным образом добавим к ней 2 вырожденные.

Теперь у нас есть 3 луночки, пусть у них a, b и c черных вершин (у вырожденной луночки 2 вершины). Очевидно, $a + b + c = (d + 3) + 3$ (вершины выкинутого треугольника мы считаем в сумме $a + b + c$ дважды). В их относительных внутренностях в сумме содержится не более $d - 1$ белой точки, т. к. белые точки, которые были внутри или на границе треугольника, туда попасть не могут. (Для вырожденных луночек это тоже верно, там белых точек не может быть просто по утв. 1.) Поэтому в какой-то из наших 3 луночек, граница которой состоит из x вершин, содержится менее $x - 2$ белых. В противном случае в них в сумме было бы $\geq (a - 2) + (b - 2) + (c - 2) = d$ белых вершин. Рассмотрим черные вершины, которые не лежат на границе выбранной луночки (их $d+3-x$) и белые вершины внутри нее (их не более $x-3$). Мы выбрали не более d вершин. Если вы выбрали строго меньше, довыберем произвольные белые вершины так, чтобы всего получилось d.

Докажем, что полученные d вершин не образуют грань. Действительно, если мы их выкинем, то оставшиеся черные вершины как раз образуют луночку, а оставшиеся белые не только не лежат в ней, но и лежат строго внутри луночки, образованной остальными вершинами $d + 3$-угольника

и еще 2 вершинами выкинутого треугольника (на рисунке справа — серая). Эта луночка сама не пересекается с нашей по относительным внутренностям, а значит свойство Ч∩Б для оставшихся вершин тем более не выполнено. Утверждение доказано.



Утверждение 3 (лемма о доразбиении). *Пусть в выпуклом k-угольнике выбрано m вершин. Тогда если m-угольник как-то разбит на треугольники, то можно исходный k-угольник доразбить на треугольники, так чтобы имевшиеся треугольники остались треугольниками разбиения. В частности, можно разбить k-угольник на треугольники так, чтобы m-угольник целиком состоял из треугольников разбиения.*

Действительно, если удалить внутренность m-угольника из выпуклой оболочки k-угольника, то останется несколько луночек, каждая из которых образована вершинами k-угольника, лежащими между 2 последовательными вершинами m-угольника (включая эти 2 вершины). Разобьем все эти луночки на треугольники, это и будет разбиение оставшейся части k-угольника. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *В любом треугольнике, образованном 3 черными вершинами, включая границу этого треугольника, должна находиться ровно одна белая точка, причем на самом деле она должна быть строго внутри него.*

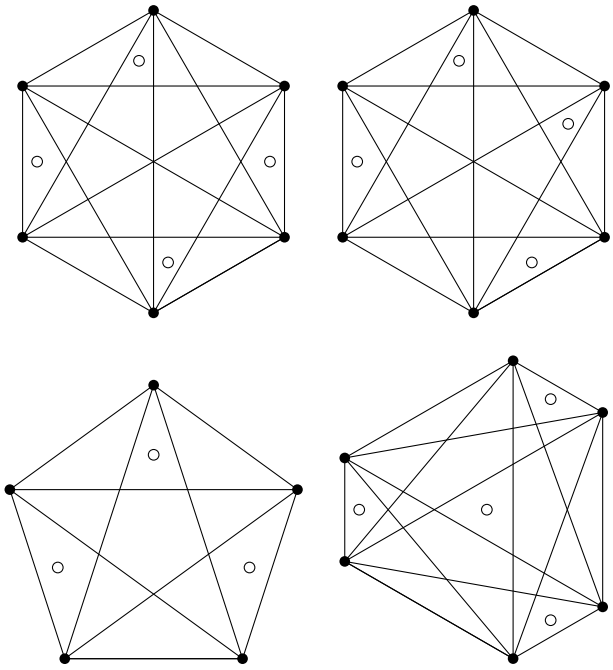
Согласно лемме о доразбиении, разобьем $d + 3$-угольник на треугольники, так чтобы среди треугольников разбиения был и тот, для которого мы доказываем утверждение. Получилось, что у нас есть $d + 1$ треугольник, в которых как-то расставлена $d + 1$ белая точка. Допустим, что строго внутри нашего треугольника белых точек нет. Тогда внутри и на границах оставшихся d треугольников находится $d+1$ белая точка. По принципу Дирихле, внутри и на границе какого-то треугольника содержится хотя бы 2 белые точки, что противоречит утв. 2. (Если точка оказалась на границе сразу двух треугольников, будем считать ее как находящуюся на границе ровно одного из них, чтобы применить принцип Дирихле.) Итак, строго внутри нашего треугольника находится хотя бы одна белая точка. Других белых точек ни внутри, ни на границе его быть не может, иначе бы это противоречило утв. 2. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Условия из утв. 4 уже достаточно для того, чтобы многогранник обладал замечательным свойством.*

Действительно, пусть мы выкинули из наших $D+4$ точек некоторые d, причем из них k черные, а остальные $d - k$ белые. Тогда у нас осталось $d - k + 3$ черных вершин и $k + 1$ белая. По лемме о доразбиении, разобьем $d+3$-угольник на треугольники, так чтобы $d-k+3$-угольник из оставшихся черных вершин целиком состоял из треугольников разбиения. Всего получился $d + 1$ треугольник, причем $d - k + 1$ из них составляют наш $d - k + 3$-угольник. Мы удалили всего $d - k$ белых вершин, значит строго внутри какого-то из этих $d - k + 1$ треугольников белая точка осталась. Свойство Ч∩Б выполнено. Утверждение доказано.

Про диаграмму Гейла, в которой черные точки образуют выпуклый $d + 3$-угольник, а белые точки расположены так, что в каждом треугольнике, образованном черными точками, включая его границу, находится ровно одна белая, причем на самом деле она лежит строго внутри него, будем говорить, что она удовлетворяет условию $(*)$.

Ниже приведены некоторые примеры таких диаграмм Гейла.



Утверждение 6. *Во всех таких многогранниках все грани — симплексы.*

Действительно, если есть какая-то грань, не являющаяся симплексом, то при удалении из нее одной вершины она перестает быть гранью. В терминах диаграммы Гейла это означает, что, когда мы выкидывали некоторые вершины, для оставшихся вершин было выполнено свойство Ч∩Б. Но если теперь вернуть одну из этих вершин, то свойство Ч∩Б уже не будет выполнено. Т. к. все точки пересечения при добавлении вершины остаются точками пересечения, то это означает, что теперь они оказались на границе выпуклой оболочки. А это может произойти только в двух случаях: когда мы к единственной точке добавили вторую или когда мы к двум точкам добавили третью.

Случай 1. Тогда эта единственная точка должна была быть белой и находиться строго внутри какого-то треугольника с невыкинутыми черными вершинами. Но тогда получившийся отрезок из 2 белых вершин не может пересекать внутренность этого треугольника только в своем конце, то есть найдется внутренняя точка на этом отрезке, совпадающая с внутренней точкой треугольника. Свойство Ч∩Б выполнено.

Случай 2. Тогда этот отрезок пересекает выпуклую оболочку точек другого цвета в какой-то ее внутренней точке. Если выпуклая оболочка точек другого цвета — тоже отрезок, то оба его конца не лежат на прямой, содержащей первый отрезок. Если выпуклая оболочка точек второго цвета — выпуклый многоугольник, то целиком внутри него такой отрезок можно найти. Когда мы добавим к точкам первого цвета еще одну, их выпуклая оболочка станет треугольником, одну из сторон которого будет пересечена отрезком другого цвета. Но тогда на этом отрезке (и даже внутри и него) найдется внутренняя точка треугольника. Утверждение доказано.

Теперь мы будем использовать слова „грань из $m+1$ вершины“ и „грань размерности m“ как синонимы.

Забудем на некоторое время про условие $D \geq 4$, нам будет достаточно $D \geq 0$. Обозначим вершины нашего $d+3$-угольника в порядке обхода по часовой стрелке как $A_1, A_2, \ldots, A_{d+3}$. Иногда мы будем называть точку A_{d+3} точкой A_0, а точку A_1 — точкой A_{d+4}.

<u>Определение.</u> Назовем *граничным треугольником точки* A_i треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Согласно утв. 4, в каждом граничном треугольнике должна содержаться ровно одна белая точка (но, вообще говоря, могут быть и белые точки вне их). Всего граничных треугольников $d+3$, а белых точек $d+1$. Поэтому хотя бы 2 белые точки лежат сразу в двух граничных треугольниках (3 и более граничных треугольника не имеют общих внутренних точек). Про белую

точку, которая одновременно лежит в граничных треугольниках вершин A_i и A_{i+1} будем говорить, что она *прилежит к стороне* A_iA_{i+1}. Про белую точку, которая лежит внутри $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ будем говорить, что она *соответствует вершине* A_i. Черной точке всегда соответствует ровно одна белая (наоборот, вообще говоря, неверно).

Утверждение 7. *Если белая вершина соответствует некоторой черной вершине A_i, то она лежит внутри только тех треугольников с черными вершинами, у которых одна из вершин A_i.*

Действительно, эта белая точка лежит (строго) по ту же сторону от прямой $A_{i-1}A_{i+1}$, что и A_i. Все черные вершины, кроме A_i, лежат (нестрого) по другую сторону от $A_{i-1}A_{i+1}$, чем A_i. Поэтому если треугольник образован черными вершинами, среди которых нет A_i, то он не может содержать белую вершину, соответствующую A_i. Утверждение доказано.

Следствие (лемма об индукции). *Если из диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$, выкинуть черную точку и соответствующую ей белую, то получится вновь диаграмма Гейла, удовлетворяющая условию $(*)$ (если, конечно, общее число вершин останется ≥ 4).*

Действительно, треугольники, образованные черными вершинами в новой диаграмме Гейла были треугольниками, образованными черными точками и в старой диаграмме. Там они содержали ровно одну белую точку, причем это была не та точка, которая соответствовала выкинутой черной вершине (и была сама выкинута). Значит и теперь в каждом треугольнике, образованном черными точками, содержится ровно одна белая, т. е. условие $(*)$ выполнено.

Утверждение 8 (альтернативное определение понятия „белая точка прилежит к стороне“). *Белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1} тогда и только тогда, когда она лежит внутри всех треугольников вида $A_iA_{i+1}A_j$, и только их.*

Действительно, рассмотрим диагональ A_iA_j. Она делит $d+3$-угольник на 2 луночки, причем точки A_{i+1} и A_{i+2} являются вершинами одной и той же луночки (точка A_{i+2} — возможно, вершиной обеих). Значит, точка A_{i+1} лежит по ту же сторону от прямой A_iA_j, что и внутренность $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ и, в частности, точка B. Аналогично, точка A_i лежит по ту же сторону от прямой $A_{i+1}A_j$, что и B. Осталось заметить, что весь $d+3$-угольник лежит по одну сторону от прямой A_iA_{i+1}, значит точки A_j и B лежат по одну сторону от нее. Поэтому для любых двух вершин $\triangle A_iA_{i+1}A_j$ верно следующее: точка B и третья вершина треугольника лежат по одну сторону от прямой, образованной этими двумя. А это и означает, что точка B лежит внутри треугольника (на границе она лежать не может просто по условию $(*)$). Внутри других треугольников белая точка лежать не может по утв. 7. В обратную сторону утверждение очевидно.

Утверждение 9. *Если $d > 0$, то белая точка не может соответствовать ≥ 3 черным. Белая точка соответствует двум данным черным тогда и только тогда, когда она прилежит к стороне, соединяющей эти черные точки, а сами они — соседние на границе $d+3$-угольника.* Заметим сначала, что белая точка не может соответствовать двум несоседним на границе $d+3$-угольника черным точкам. Если эти точки A_i и A_j, то, по лемме об индукции, при выкидывании этой белой точки и A_i мы вновь получим диаграмму Гейла, удовлетворяющую условию $(*)$. Т. к. A_i не была соседней с A_j на границе $d+3$-угольника, то никакая из вершин $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ не была выкинута, а значит, там должна находиться белая точка. Но белую точку, соответствующую A_j, мы уже выкинули. Противоречие. А если 2 черные точки, которым соответствует белая, то она прилежит к стороне, их соединяющей, прямо по определению. Пусть белая точка соответствует 3 черным. Тогда все пары из этих черных точек являются сторонами $d+3$-угольника, но тогда других сторон у него нет, т. е. $d+3=3$ и $d=0$.

Утверждение 10. *Пусть A_iA_{i+1} — сторона $d+3$-угольника, к которой прилежит белая вершина. Тогда, если из диаграммы Гейла выкинуть A_i или A_{i+1} и эту белую вершину, то, независимо от того, какую из вершин A_i и A_{i+1} мы выкинули, получится одинаковая диаграмма Гейла в том смысле, что все белые точки будут содержаться в одинаковых наборах треугольников.*

Действительно, рассмотрим некоторую белую точку C. Для треугольников, никакая вершина которых не совпадает ни с A_i, ни с A_{i+1}, утверждение очевидно. Пусть мы удалили одну из вершин A_i или A_{i+1}, скажем A_i, в случае, если мы удалили A_{i+1}, все будет аналогично. Пусть белая точка оказалась в $\triangle A_{i+1}A_jA_k$. Тогда нам нужно доказать, что если бы мы удалили не A_i, а A_{i+1}, она оказалась бы в этом же треугольнике, т. е. (в обозначениях вершин для той диаграммы Гейла,

с которой мы начали), в $\triangle A_iA_jA_k$. Рассмотрим четырехугольник $A_iA_{i+1}A_jA_k$ (не ограничивая общности, A_iA_j — его диагональ). Внутри него лежат 2 белые точки, причем мы знаем, какие: одна из них — точка C, которая лежит внутри $\triangle A_{i+1}A_jA_k$, а другая — белая точка, прилежащая к стороне A_iA_{i+1}, которая по альтернативному определению лежит внутри $\triangle A_iA_{i+1}A_k$. Значит, внутри $\triangle A_iA_jA_k$ лежит одна из этих белых точек, причем белая точка, прилежащая к стороне A_iA_{i+1}, там лежать не может. Значит, там лежит точка C. Утверждение доказано.

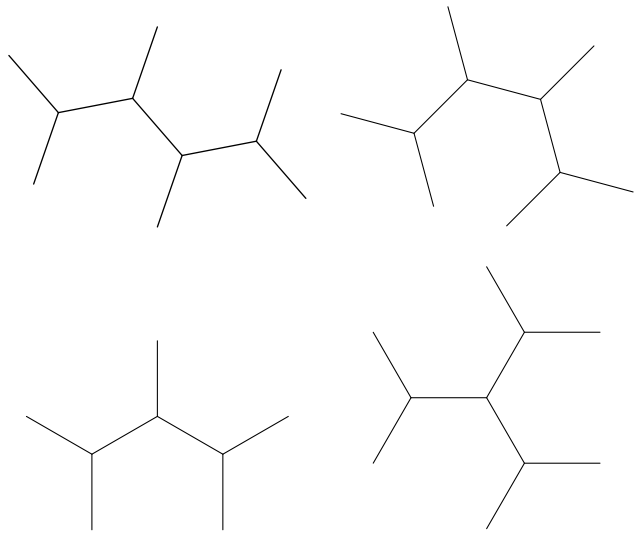
Определение. Дерево с дополнительной структурой на вершинах назовем *3-деревом*, если выполнены следующие условия:

1. Все его вершины имеют степень либо 1, либо 3.
2. (Дополнительная структура на вершинах). На каждых 3 ребрах, выходящих из вершины степени 3, задан ориентированный циклический порядок обхода, т. е. можно сказать, что если мы хотим идти вокруг этой вершины, скажем, по часовой стрелке, то мы знаем, в каком порядке и в какую сторону надо идти по ребрам, выходящим из этой вершины. Этот порядок естественным образом индуцирует ориентированный циклический порядок на вершинах степени 1.

Определение. 3-дерево называется *характеристическим деревом* данной диаграммы Гейла, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между его вершинами и вершинами диаграммы Гейла, так чтобы:

1. Белые вершины на диаграмме соответствуют вершинам степени 3 в дереве, а черные — вершинам степени 1.
2. Циклический порядок вершин степени 1 в дереве совпадает с циклическим порядком черных вершин на границе $d+3$-угольника.
3. Белая вершина на диаграмме Гейла лежит внутри треугольника, образованного тремя черными, тогда и только тогда, когда из вершины дерева, соответствующей этой белой вершине, надо идти к 3 вершинам дерева, соответствующим 3 черным вершинам, *по трем разным ребрам.* Иначе говоря, чтобы понять, внутри каких треугольников из черных вершин лежит данная белая, надо выкинуть соответствующую ей вершину из характеристического дерева. Оно распадется на 3 меньших дерева, и надо в каждом из них взять по вершине степени 1 (точнее, по такой вершине, которая была степени 1, пока мы не выкинули вершину степени 3). Эти 3 вершины, и только такие тройки вершин, задают треугольник, внутри которого лежит белая вершина.

Вот примеры 3-деревьев, являющихся характеристическими для диаграмм Гейла, показанных выше:



Следующая теорема позволяет классифицировать диаграммы Гейла, удовлетворяющие условию $(*)$:

Теорема. *Для любой диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$, существует характеристическое дерево. Оно единственно с точностью до смены циклического порядка всех вершинах сразу на противоположный, что соответствует зеркальному отражению диаграммы Гейла на плоскости и, очевидно, не влияет на ее комбинаторные свойства.*

Для любого 3-дерева с числом вершин $D+4$ существует диаграмма Гейла, удовлетворяющая условию $(*)$, для которой данное дерево является характеристическим. Она единственна в том смысле, что про каждую белую вершину известно, по какую сторону от какой диагонали $d+3$-угольника она лежит.

При доказательстве теоремы будем считать, что диаграмма нарисована на плоскости, т. е. направление обхода по часовой стрелке нам задано. Тогда характеристическое дерево будет просто единственно.

Утверждение 11. *Пусть дана диаграмма Гейла, и пусть некоторое 3-дерево является для нее характеристическим. Тогда следующие утверждения равносильны:*
1. Белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}.
2. Вершина дерева, соответствующая B, соединена ребрами с вершинами, соответствующими A_i и A_{i+1}.

Согласно альтернативному определению понятия „белая точка прилежит к стороне“, у всех треугольников, содержащих точку B, одна из вершин должна быть A_i, а другая — A_{i+1}. Для характеристического дерева это означает, что если выйти из вершины B по одному из ребер, то ни в какую висячую вершину, кроме A_i, прийти нельзя. Но тогда B должна быть соединена с A_i просто ребром, т. к. если на пути между ними встречается вершина степени 3, то из нее можно пойти не только к A_i, но и в другую сторону. Аналогично, другое ребро из B ведет в A_{i+1}.

В обратную сторону: если идти из B по трем разным ребрам, то по одному из них можно прийти только в A_i, по другому — только в A_{i+1}, а по третьему — во все остальные вершины. Это означает, что точка B лежит в тех и только тех треугольниках из черных вершин, в которых есть сторона A_iA_{i+1}, т. е. прилежит к стороне A_iA_{i+1}. Утверждение доказано.

Пусть дана диаграмма Гейла, и точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}. Пусть дано 3-дерево, вершины которого как-то поставлены во взаимно-однозначное соответствие вершинам на диаграмме Гейла, причем вершина B имеет степень 3, соединена ребрами с висячими вершинами A_i и A_{i+1}, а циклический порядок на ребрах, выходящих из B, задавал правильное направление по часовой стрелке для стороны A_iA_{i+1}. Выкинем из диаграммы вершины A_i и B (по лемме об индукции), а из дерева — вершины, соответствовавшие A_i и A_{i+1}. Вершину дерева, которая раньше соответствовала B (и теперь стала висячей), поставим в соответствие A_{i+1}. Все остальные вершины оставим поставленными в соответствие так, как раньше.

Утверждение 12 (лемма об индукции для характеристического дерева). *Тогда исходное дерево являлось характеристическим для исходной диаграммы Гейла тогда и только тогда, когда новое дерево является характеристическим для новой диаграммы Гейла.*

Пусть сначала исходное дерево являлось характеристическим для исходной диаграммы. Тогда при удалении вершин циклический порядок на черных вершинах сохранился, черные точки вновь соответствуют висячим, а белые — вершинам степени 3. Осталось доказать только свойство 3. Рассмотрим белую вершину C, которая осталась в диаграмме. Пути, ведущие из нее в 3 висячие вершины, ни одна из которых не совпадала с A_{i+1}, вообще не изменились. Если же некоторый путь вел из вершины, соответствующей C, в вершину, соответствующую A_{i+1}, то теперь он ведет в вершину, ранее соответствовавшую B, т. е. отличается от старого пути тем, что в старом пути в конце его было еще одно ребро, которого теперь в графе нет. Кроме этого ребра, путь из C в A_{i+1} не изменился, поэтому он выходит из C по тому же ребру. Осталось заметить, что C лежит в тех же самых треугольниках с черными вершинами, в которых лежала до удаления A_i (кроме треугольников с вершиной A_i, которых теперь нет).

В обратную сторону. Циклический порядок на черных вершинах исходного дерева будет правильный, т. к. порядок на ребрах, выходящих из B (бывшей A_{i+1}) выбран правильно по условию. Если некоторая белая точка попадала в треугольник, у которого не было вершины A_i, то она и будет попадать в него, и для характеристического дерева это тоже верно. Осталось проверить

треугольники, у которых одна из вершин — A_i. Если вторая вершина этого треугольника A_{i+1}, то, согласно альтернативному определению понятия „белая точка прилежит к стороне“, во все эти треугольники попадает вершина B, что и видно из характеристического дерева, в котором из вершины, соответствующей B, идут 2 ребра в вершины, соответствующие A_i и A_{i+1}. Если же в треугольнике 2 другие вершины не совпадают с A_{i+1}, то по утв. 10, белая точка лежит в этом треугольнике тогда и только тогда, когда она лежит в треугольнике, у которого вершина A_{i+1} заменена на A_i. Но путь в дереве от этой белой вершины к A_i отличается от пути к A_{i+1} только последним ребром, которое идет из B в A_i вместо A_{i+1}. Значит, первое ребро у этих путей совпадает (белая вершина не может совпадать с B по альтернативному определению), т. е. условие 3 для треугольника, одна из вершин которого — A_i, действительно выполнено тогда и только тогда, когда белая вершина в нем лежит. Утверждение доказано.

Утверждение 13. *Пусть дана диаграмма Гейла, удовлетворяющая условию (∗). Пусть уже известно, в какую сторону надо идти по границе $d+3$-угольника по часовой стрелке. Тогда существует и единственно характеристическое дерево.*

Будем доказывать утверждение по индукции по d. Если $d = 0$, то единственно возможная диаграмма — треугольник с белой точкой внутри. Единственно возможное 3-дерево из 4 вершин — вершина степени 3, из которой идут 3 ребра в вершины степени 1. Очевидно, это дерево является характеристическим для этой диаграммы.

Пусть теперь $d > 0$. Пусть для данной диаграммы нашлось характеристическое дерево. Рассмотрим какую-нибудь сторону $d+3$-угольника, к которой прилежит белая вершина (таких сторон существует хотя бы 2). Пусть эта сторона A_iA_{i+1}, а белая вершина B. Тогда, по утв. 11, из B идут 2 ребра в висячие вершины, соответствующие A_i и A_{i+1}. Выкинем из дерева эти висячие вершины, а из диаграммы Гейла выкинем A_i и B. По лемме об индукции для характеристического дерева, полученное дерево является характеристическим для новой диаграммы (только вершина, ранее соответствовавшая B, теперь соответствует A_{i+1}). А для новой диаграммы характеристическое дерево, как мы знаем, существует и единственно. В характеристическом дереве для исходной диаграммы Гейла мы пока не знаем только порядка на ребрах, выходящих из вершины B. Но т. к. вершины A_i и A_{i+1} идут по часовой стрелке в порядке обхода $d+3$-угольника, то этот порядок должен быть таким (по часовой стрелке): сначала ребро, идущее в A_i, затем в A_{i+1} и потом третье ребро. Единственность характеристического дерева доказана.

Существование напрямую следует из леммы об индукции для характеристического дерева: надо только добавить к характеристическому дереву для диаграммы Гейла без 2 вершин 2 новые вершины степени 1 и задать циклический порядок так, как указано в условии леммы. Утверждение доказано.

Утверждение 14. *Пусть дана диаграмма Гейла, удовлетворяющая условию (∗), и в ней выбрана черная вершина A_i. Тогда к ней можно так добавить черную вершину (будем называть ее $A_{i+1/2}$) и белую вершину B, что стороны $A_iA_{i+1/2}$ и $A_{i+1/2}A_{i+1}$ добавятся к многоугольнику из черных вершин (вместо A_iA_{i+1}), а вершина B будет прилежать к стороне $A_iA_{i+1/2}$. При удалении $A_{i+1/2}$ и B будет получаться исходная вершина.*

Рассмотрим на старой диаграмме прямую, проходящую через A_i и не пересекающую многоугольник из черных вершин нигде больше (такая прямая существует, т. к. многоугольник выпуклый). Т. к. все белые точки лежат строго внутри треугольников с черными вершинами, то на этой прямой можно выбрать точку, достаточно близкую к A_i, так чтобы каждая белая точка лежала по ту же сторону от прямых, соединяющих вершины $d+3$-угольника с ней, что и от прямых, соединяющих эти точки с A_i, и кроме того, она лежала со всеми черными точками в выпуклом положении. Эту точку и выберем в качестве $A_{i+1/2}$. (Надо только выбрать ее по нужную сторону от A_i, чтобы у новой выпуклой оболочки была сторона $A_{i+1/2}A_{i+1}$, а не $A_{i-1}A_{i+1/2}$.) Тогда белых точек пока не будет только в треугольниках со стороной $A_iA_{i+1/2}$. Добавим ее в пересечение треугольников $A_{i-1}A_iA_{i+1/2}$ и $A_iA_{i+1/2}A_{i+1}$. Тогда она попадет в треугольники со стороной $A_iA_{i+1/2}$, и только в них (см. доказательство утв. 8). То есть мы добавили точки $A_{i+1/2}$ и B и получили новую диаграмму Гейла, удовлетворяющую условию (∗). Утверждение доказано.

<u>Определение.</u> Назовем вершину 3-дерева *предвисячей*, если она соединена ребрами с 2 висячими вершинами.

Утверждение 15. *В любом 3-дереве с числом вершин более 4 найдется хотя бы 2 предвисячие вершины. В 3-дереве с 4 вершинами она ровно 1.*

Действительно, если в 3-дереве 4 вершины, то одна из его вершин должна быть соединена с 3 другими, она и будет предвисячей. Если же вершин больше 4, то удалим из 3-дерева все висячие вершины. Мы вновь получим дерево (но уже не обязательно 3-дерево). В нем будет более 1 вершины, т. к. если в нем ровно 1 вершина, то это означает, что раньше она была соединена с 3 висячими, но тогда общее число вершин будет 4. Значит, в новом дереве есть хотя бы 2 висячие вершины. В исходном дереве они были предвисячими. Утверждение доказано.

Утверждение 16. *Любое 3-дерево с $D+4$ вершинами ($D \geq 0$, $D = 2d$) является характеристическим для некоторой диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию ($*$).*

Будем доказывать утверждение по индукции по d. Если $d = 0$, то единственно возможному дереву из 4 вершин соответствует, как мы уже видели, треугольник с белой точкой внутри.

Пусть $d > 0$. Рассмотрим в 3-дереве предвисячую вершину B и удалим 2 висячие вершины A_i и A_{i+1}, с которыми она была соединена. Мы получим 3-дерево с на 2 меньшим количеством вершин. Оно является характеристическим для некоторой диаграммы Гейла. Рассмотрим в этой диаграмме черную вершину, соответствующую B (в новом дереве B — уже висячая). Добавим к этой диаграмме черную и белую вершины по утв. 14. Тогда исходное дерево будет являться характеристическим для этой диаграммы по лемме об индукции для характеристического дерева.

Для доказательства теоремы осталось доказать только единственность диаграммы Гейла для данного характеристического дерева в указанном смысле. По 3-дереву мы уже можем сказать про (каждую) диаграмму Гейла, для которой оно является характеристическим, внутри каких треугольников лежит данная белая вершина. Поэтому доказательство теоремы завершает следующее утверждение:

Утверждение 17. *Если для диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию ($*$), про каждую белую точку известно, внутри каких треугольников она лежит (а также циклический порядок на черных вершинах), то известно и то, по какую сторону от каждой диагонали она лежит.*

Действительно, пусть про данную белую вершину C нам надо выяснить, по какую сторону от диагонали A_iA_j она лежит (т. е. вместе с какими черными точками C лежит по одну и ту же сторону). Рассмотрим все треугольники, у которых одна вершина A_i, а другие 2 соседние на границе $d+3$-угольника (т. е. треугольники вида $\triangle A_iA_kA_{k+1}$, $A_i \neq A_k$, $A_i \neq A_{k+1}$. Среди них выберем тот, внутрь которого попала точка C. Теперь пойдем по границе $d+3$-угольника от вершины A_i по часовой стрелке. Прежде чем мы вернемся в A_i, произойдет 2 события: мы пройдем по стороне A_kA_{k+1} выбранного треугольника (точнее скажем, пройдем ее середину) и пройдем через вершину A_j. Посмотрим, что произойдет раньше. Если сначала мы встретили вершину A_j, то C лежит внутри луночки, вершинами которой являются все вершины, которые мы встретили, *начиная с* A_j (или, т. к. мы пошли по часовой стрелке, вершины на пути от A_i к A_j против часовой стрелки). Если же сначала мы встретим середину стороны, то C лежит внутри другой луночки, а именно той, вершинами которой являются все вершины, которые мы встретили, *заканчивая* A_j (или, что то же, вершины на пути от A_i к A_j по часовой стрелке). То есть мы знаем, внутри какой луночки со стороной A_iA_j лежит C. Тогда можно сказать, что C лежит по ту же сторону от A_iA_j, что и все остальные вершины этой луночки.

Теорема доказана. Заметим, что указанная нами информация о диаграмме Гейла (по какие стороны от диагоналей лежат белые вершины) выбрана не случайно: как мы увидим ниже, в критериях того, образуют ли данные вершины грань многогранника, будет использоваться только эта информация, а именно внутри каких луночек лежит данная белая точка. Очевидно также, что если мы знаем, по какую сторону от каких диагоналей лежит данная белая вершина, то можем сказать, внутри каких треугольников она лежит (точка лежит внутри треугольника тогда и только тогда, когда она лежит по ту же сторону от каждой его стороны, что и третья вершина треугольника). Поэтому по этой информации можно определять, какие белые вершины соответствуют каким черным. Введем определение:

<u>Определение.</u> Две диаграммы Гейла, удовлетворяющие условию ($*$), назовем *эквивалентными по диагоналям*, если можно так установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, что черные вершины соответствуют черным, а белые — белым, циклический порядок на черных вершинах сохраняется (но направления по и против часовой стрелки могут поменяться

местами), а белая точка лежит в луночке с данными черными вершинами в первой диаграмме тогда и только тогда, когда соответствующая белая точка лежит в луночке с соответствующими черными вершинами во второй диаграмме.

Характеристические деревья позволят нам посчитать количество диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$. Но сначала надо разобраться с их автоморфизмами (в смысле эквивалентности по диагоналям). Сначала будем искать автоморфизмы, сохраняющие ориентацию. Они будут совпадать с автоморфизмами характеристического дерева, при которых ориентация в каждой вершине не меняется.

Утверждение 18. *Автоморфизмы 3-дерева, не меняющие ориентацию в каждой вершине степени 3, могут иметь порядок 2 или 3, причем не более одного автоморфизма порядка 2 и не более 2 (один из которых — двукратно примененный другой) порядка 3. Если у 3-дерева имеется симметрия третьего порядка, то существует вершина, переходящая при этом в себя. Если у 3-дерева имеется симметрия второго порядка, то существует ребро, концы которого меняются местами.*

Будем доказывать это утверждение по индукции. Для дерева из 4 вершин это, очевидно, так (имеется автоморфизм третьего порядка, и он оставляет на месте вершину степени 3). Для дерева из 2 вершин (т. е. для ребра; оно тоже является 3-деревом, только не является характеристическим ни для какой диаграммы Гейла с $D \geq 0$) это тоже так: при единственном нетождественном автоморфизме 2 его конца меняются местами. Пусть теперь в дереве более 4 вершин. При автоморфизме висячие вершины переходят в висячие. Поэтому предвисячие вершины тоже переходят в предвисячие. Теперь удалим из дерева все висячие вершины, которые были соединены с предвисячими. Т. к. изначально было более 4 вершин, то предвисячие вершины после этого станут висячими. Если мы знаем, какие вершины раньше были предвисячими, что сможем однозначно восстановить, где была какая висячая вершина (ориентация сохранилась). Поэтому, если мы знаем, куда переходят вершины в оставшейся части дерева, то мы знаем и то, куда переходят все вершины. У оставшейся части дерева, по предположению индукции, не более одного автоморфизма порядка 2 и не более 2 (один из которых — двукратно примененный другой) степени 3, а других автоморфизмов быть не может. Значит, это верно и для всего дерева. Точка, которая была неподвижной в оставшейся части дерева, будет неподвижной и во всем дереве. То же можно сказать и про ребро, концы которого меняются местами. Утверждение доказано.

Утверждение 19. *Пусть у 3-дерева имеется автоморфизм как у дерева (т. е. не важно, что происходит с циклическим порядком, важно только, чтобы вершины, соединенные ребром, остались соединены ребром и наоборот). Тогда, если у 3-дерева был автоморфизм порядка 3, то его неподвижная точка останется неподвижной, а если был автоморфизм порядка 2, то ребро, концы которого раньше менялись местами, останется на месте (возможно, его концы поменяются местами).*

Действительно, пусть у 3-дерева был автоморфизм порядка 3. Тогда его неподвижная вершина, обладала следующим свойством: в трех поддеревьях с корнем в этой вершине (т. е. в трех поддеревьях, которые состоят из всех вершин, до которых из данной можно добраться, начиная с одного конкретного ребра) поровну вершин. Никакая другая вершина этим свойством обладать не могла, т. к. если взять вершину в одном из этих поддеревьев и пойти из нее по ребру, ведущему к исходной неподвижной вершине, то можно прийти в по крайне мере вдвое большее число вершин, чем если идти по каждому из других ребер. Но это свойство сформулировано уже в терминах того, какие вершины соединены ребрами, оно никак не использует циклический порядок. Значит, оно сохраняется при любых автоморфизмах 3-дерева просто как дерева. Аналогично, если у дерева был автоморфизм порядка 2, то ребро, концы которого меняются при этом автоморфизме — единственное ребро, обладающее следующим свойством: по обе стороны от этого ребра (т. е. в двух поддеревьях, на которые распадается исходное дерево при удалении этого ребра) находится поровну вершин. Утверждение доказано.

Следствие. *У 3-дерева не может быть одновременно автоморфизма порядка 3 и автоморфизма порядка 2.*

Действительно, если есть автоморфизм порядка 3, то у него должна быть неподвижная вершина. Значит, при автоморфизме порядка 2 она тоже должна оставаться на месте. Но у автоморфизма порядка 2 имеется неподвижное ребро, концы которого меняются местами. Значит, до

остальных вершин от этого ребра надо было сначала добираться через один из его концов, а после автоморфизма — через второй. Т. е. у автоморфизма порядка 2 неподвижных вершин быть не может. Противоречие.

Теперь разберемся с автоморфизмами диаграммы Гейла, меняющими ориентацию. Для характеристического дерева они означают, что надо поменять ориентацию во всех вершинах, а потом новое 3-дерево взаимно однозначно отобразить на старое уже с сохранением ориентации. Тогда белая точка будет лежать в треугольнике тогда же, когда и лежала раньше, а ориентированный циклический порядок на висячих вершинах поменяется на противоположный, что нам и нужно.

Утверждение 20. *Группа симметрий диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию (∗) может быть одной из следующих групп: группа из одного элемента, $\mathbb{Z}_2$ (причем кроме тождественного, там может быть как автоморфизм, меняющий ориентацию, так и автоморфизм, не меняющий ориентацию), $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, группа симметрий правильного треугольника S_3.*

Действительно, группа симметрий диаграммы Гейла — подгруппа диэдральной группы, т. к. соседние вершины на границе $d+3$-угольника должны остаться соседними. Поэтому если существуют автоморфизмы диаграммы Гейла, меняющие ориентацию, то все они имеют порядок 2 и получаются композицией одного из них с уже рассмотренными нами симметриями порядка 2 и 3. Если таких симметрий не было, получится $\mathbb{Z}_2$, если был элемент порядка 2, получится $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, а если элемент порядка 3, то S_3 (а не $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_6$, в которых есть элементы порядка 4 и 6). Если же автоморфизмов, меняющих ориентацию, нет, то получится группа из одного элемента, $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_3$. Утверждение доказано.

Теперь достаточно понять, как устроен один из автоморфизмов, меняющих ориентацию.

Следствие. *Если d четно (или, что то же, $d+3$ нечетно), то у автоморфизма, меняющего ориентацию, существует и единственна неподвижная черная вершина.*

Действительно, если бы все черные вершины возвращались на место только после 2 итераций автоморфизма, то они бы разбились на пары, а число их нечетно. Если 2 вершины остались на месте, то число ребер в 2 путях между ними по границе $d+3$-угольника разное, а поэтому эти пути перешли в себя. Но тогда все черные вершины перешли в себя, т. е. ориентация не изменилась.

Утверждение 21. *3-дерево, имеющее симметрию порядка 3, можно после изменения всех ориентаций в вершинах отобразить на себя тогда и только тогда, когда одно из поддеревьев с корнем в неподвижной вершине можно после изменения ориентаций отобразить на себя, так что эта неподвижная вершина перейдет в себя.*

Рассмотрим получающийся при отображении всего 3-дерева на себя его автоморфизм как дерева. Неподвижная вершина останется на месте, 3 ребра, которые из нее выходили, как-то переставятся, причем ориентированный циклический порядок изменится. Значит, какое-то ребро останется на месте (так устроена группа S_3). Поддерево, начинающееся с этого ребра, и будет тем поддеревом, которое отобразится после изменения ориентаций на себя. В обратную сторону: пусть нам удалось после изменения ориентаций отобразить одно из поддеревьев на себя, причем неподвижная вершина действительно осталась неподвижной. Нужно описать, как переставить вершины в остальных 2 поддеревьях. Во-первых, ясно, что их нужно переставить местами, а после этого в каждом из них переставить вершины так же, как мы это сделали в первом поддереве. Это можно сделать, т. к. все 3 поддерева были изоморфны как 3-деревья. При этом ориентация во всех вершинах сменится на противоположную. Утверждение доказано.

Для диаграммы Гейла, характеристическое дерево которой имеет симметрию порядка 2, рассмотрим тот из автоморфизмов, меняющих ориентацию, который в характеристическом дереве не переставляет 2 конца ребра (он получается из другого композицией с тем автоморфизмом, который не меняет ориентацию). Рассмотрим 2 поддерева, каждое из которых получается всех вершин исходного, до которых можно добраться от неподвижного ребра, выходя через одну и ту же его вершину (а так же самого этого ребра).

Утверждение 22. *Тогда характеристическое дерево можно после изменения всех ориентаций в вершинах отобразить на себя тогда и только тогда, когда одно из этих поддеревьев можно после изменения всех ориентаций отобразить на себя, так что ребро, бывшее неподвижным, тоже перейдет в себя.*

В одну сторону очевидно: ясно, что при любом автоморфизме 3-дерева как дерева, при котором оба конца неподвижного ребра переходят в себя, вершины любого из этих деревьев остаются

внутри него (то, через какую вершину нужно идти от ребра, чтобы дойти до данной вершины, является свойством дерева, а не дополнительной структуры). В обратную сторону: второе дерево при этом тоже должно перейти в себя, а его вершины нужно переставит так, как мы это сделали в первом дереве. При этом ориентация во всех вершинах сменится на противоположную. Утверждение доказано.

Утверждение 23. *Если у диаграммы Гейла имеется автоморфизм, меняющий ориентацию, то при соответствующей перестановке вершин в характеристическом дереве (т. е. изоморфизме с деревом, у которого изменена ориентация всех вершин) имеется неподвижное ребро (его вершины остаются на месте или меняются местами), причем такое ребро ровно одно.*

Все черные вершины не могли остаться на месте, т. к. это противоречило бы изменению ориентации. Тогда рассмотрим 2 вершины, которые поменялись местами. Рассмотрим путь, их соединяющий. Он должен был (как целое) перейти в себя, т. к. для дерева (без дополнительной структуры) наша перестановка вершин была автоморфизмом. Поэтому, если число ребер в этом пути было нечетно, то „среднее“ ребро осталось на месте, но его вершины поменялись местами. Если же число ребер было четно, то осталась на месте „средняя“ вершина, а 2 ребра, из нее выходящие, поменялись местами. Но тогда третье ребро, выходящее из нее, осталось на месте. Существование неподвижного ребра доказано.

Пусть существуют 2 неподвижных ребра. Тогда рассмотрим путь между какими-нибудь из их концов. Если какое-то (или оба) ребра в него входят, выкинем их, и получим путь между другой парой их концов. Тогда полученный путь — самый короткий из путей, соединяющих какие-нибудь концы этих ребер. Тогда его концы должны перейти в себя, иначе длина пути между ними изменится. Значит, каждая его вершина перешла в себя. Рассмотрим первое его ребро (идущее из какого-нибудь конца). Если этот путь состоит из единственной вершины, рассмотрим вместо него второе из наших ребер. Это ребро осталось на месте, т. е. мы нашли вершину (рассмотренный конец пути), из которой выходит 2 неподвижных ребра. Но ориентация в этой вершине должна была измениться. Противоречие. Утверждение доказано.

Утверждение 24. *Пусть дано 3-дерево, и в нем выбрано ребро BC. Тогда после изменения всех ориентаций в вершинах дерево можно отобразить на исходное, оставив и B, и C на месте тогда и только тогда, когда после изменения всех ориентаций можно отобразить на себя 2 поддерева: одно состоит из всех вершин, до которых можно добраться из B через C (включая B), а другое из всех вершин, до которых можно добраться из C через B, причем вершины B и C соответственно в них остаются на месте. Отобразить, поменяв B и C местами можно тогда и только тогда, когда первое из этих деревьев после изменения ориентации можно отобразить на второе, поменяв при этом B и C.*

Действительно, рассмотрим отображение как автоморфизм дерева без дополнительной структуры. Если вершины B и C остаются на месте, то указанные 2 поддерева (как целые) переходят в себя. Если же B и C меняются местами, то и 2 поддерева меняются местами. В обратную сторону: пусть сначала мы не хотим менять B и C местами. Тогда заметим, что если в первом поддереве осталась на месте вершина, которую мы хотим сделать B, то осталась на месте и единственная соединенная с ней вершина, которую мы хотим сделать C. Аналогично, во втором дереве будущие вершины B и C тоже останутся на месте, поэтому можно сделать это ребро общим в 2 поддеревьях и получить 3-дерево с требуемым свойством. Пусть теперь нужно поменять B и C местами, и мы взяли какое-то 3-дерево в качестве первого и назвали одну из его вершин B. Соединенную с ней вершину назовем C. Поменяем ориентацию у всех вершин этого 3-дерева, и отождествим образ вершины B в новом дереве (степень которого пока 1) с вершиной C в старом, а образ вершины C — с вершиной B. Между этими вершинами было ребро и в старом 3-дереве, и в новом, отождествим их. Изменим у всего построенного 3-дерева ориентацию всех вершин. Его исходное поддерево можно отобразить на второе просто по построению, при этом B и C поменяются местами. А то, что получилось из второго поддерева после изменения всех ориентаций во всем дереве — это исходное поддерево, в котором ориентации поменяли 2 раза, т. е. просто исходное поддерево. При этом его вершина B — вершина C второго поддерева, т. е. исходная вершина B. Поэтому достаточно тождественно отобразить полученное исходное поддерево на себя. Утверждение доказано.

Теперь все готово для подсчета числа диаграмм Гейла. Будем теперь считать, что $d > 0$ (но

пока разрешим $D \leq 4$), т. к. в случае $d = 0$ все уже ясно (число диаграмм равно 1). Заметим, что если выбрать в 3-дереве висячую вершину и назначить ее корнем, то 3-дерево перейдет в двоичное, у которого у каждой невисячей вершины, кроме корня, ровно 2 ребенка, причем про них сказано, какой правый, а какой левый. Мы будем пользоваться следующим известным фактом: *Число таких двоичных деревьев с $n > 0$ висячими вершинами (не считая корня) равно $n-1$-му числу Каталлана $C_{2(n-1)}^{n-1}/n$.* Далее n-е число Каталлана будем кратко обозначать как T_n. Замена ориентации в терминах двоичных деревьев означает, что нужно всех правых детей объявить левыми и наоборот.

Утверждение 25. *Число двоичных деревьев с выделенным корнем, у которых у каждой невисячей вершин есть и левый, и правый ребенок, и при этом при замене левых детей на правые и наоборот оно переходит в себя, а всего n висячих вершин, не считая корня, равно $(n/2-1)$-му числу Каталлана, если $n > 1$ четно, и 0, если n нечетно.*

Рассмотрим вершину X, в которую из корня идет единственное ребро. Когда мы поменяем всех левых детей на правые и наоборот, то левое поддерево с корнем в этой вершине должно будет перейти в правое, и наоборот. То есть двоичное дерево не меняется при замене левых детей на правые тогда и только тогда, когда левое поддерево с корнем в X переходит в правое при замене левых детей на правые, и наоборот. Поэтому висячих вершин в них должно быть поровну, и если n нечетно, то двоичных деревьев с требуемыми свойствами не существует. Если же n четно, то для любого двоичного дерева с $n/2 > 0$ висячими вершинами можно однозначно достроить остальное дерево (надо поменять его левых детей на правые, и полученное дерево объявить правым поддеревом X, а исходное — левым). Число деревьев получилось равно $(n/2-1)$-му числу Каталлана.

Вначале посчитаем число диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$ и имеющих группу симметрий S_3 (т. е. автоморфизм порядка 3, не меняющий ориентацию, и автоморфизм, меняющей ориентацию). Рассмотрим в характеристическом дереве неподвижную вершину C автоморфизма порядка 3. По утв. 21, из этой вершины выходит поддерево, которое после изменения всех ориентаций отобразить на себя, оставив C на месте. И обратно, из каждого такого 3-дерева с выбранным корнем (в будущей неподвижной вершине) можно однозначно построить характеристическое дерево с нужной группой симметрий. В 3-дереве с корнем C должно быть $(d+3)/3$ вершин, поэтому $d+3$ должно делиться на 3. Более того, число $(d+3)/3$ само должно делиться на 2, т. е. $d+3$ должно делиться на 6. В этом случае число 3-деревьев с корнем C по утв. 25 равно $((d+3)/6-1)$-му числу Каталлана $T_{(d+3)/6-1}$ (мы предположили, что $d > 0 \Rightarrow (d+3)/3 > 1$), а иначе их не существует.

Пусть теперь группа симметрий — $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (т. е. автоморфизм порядка 2, не меняющий ориентацию, и автоморфизм, меняющей ориентацию). Рассмотрим ребро BC, концы которого меняются местами при автоморфизме, не меняющем ориентацию. Рассмотрим поддерево, которое состоит из всех вершин, до которых можно добраться от неподвижного ребра, выходя через одну и ту же его вершину (при автоморфизме, не меняющем ориентацию, 2 эти поддерева переходят друг в друга как 3-деревья, поэтому все равно, какое брать, поэтому возьмем то, у которого B — корень). По утв. 22, это поддерево можно отобразить на себя, оставив BC на месте. И обратно, из каждого такого 3-дерева с выбранным корнем B можно однозначно построить все характеристическое дерево. В 3-дереве с корнем B должно быть $(d+3)/2$ вершин, поэтому $(d+3)$ должно делиться на 2. Более того, число $(d+3)/2$ само должно делиться на 2, т. е. $d+3$ должно делиться на 4. В этом случае число 3-деревьев с корнем B по утв. 25 равно $((d+3)/4-1)$-му числу Каталлана $T_{(d+3)/4-1}$ (и вновь $d > 0 \Rightarrow (d+3)/3 > 1$), а иначе их не существует.

Рассмотрим случай, когда группа симметрий — $\mathbb{Z}_2$, причем единственный нетождественный автоморфизм меняет ориентацию. Возможны 2 случая:

Случай 1. $d+3$ четно. По утв. 23, найдется неподвижное ребро BC. После автоморфизма диаграммы Гейла его вершины могут либо поменяться местами, либо остаться на месте. Если существуют 2 автоморфизма, при одном из которых B и C меняются местами, а при другом — остаются на месте, то группа была не $\mathbb{Z}_2$. Один из этих автоморфизмов меняет вершины B и C местами, а также меняет местами 2 поддерева. Поэтому неподвижных вершин у него нет, и в группе симметрий 4 элемента, а не 6 (утв. 19). И обратно, если кроме автоморфизма, меняющего ориентацию с неподвижным ребром BC, был автоморфизм порядка 2, сохраняющий ориентацию, то был и другой автоморфизм, меняющий ориентацию, причем из этих 2 автоморфизмов один оставлял и B, и C на месте, а другой менял их местами.

По утв. 24, после изменения ориентации во всех вершинах 3-дерево можно отобразить на исходное, поменяв B и C местами тогда и только тогда, когда одно из поддеревьев можно после изменения ориентации отобразить на другое. Чтобы не было автоморфизмов диаграммы Гейла, которые оставляют и B, и C на месте, надо, чтобы это поддерево нельзя было само после изменения ориентаций отобразить на себя, оставив B и C на месте. У рассматриваемого поддерева, кроме корня, имеется $(d+3)/2$ вершин, значит число нужных нам поддеревьев равно $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$, если $d+3 \vdots 4$, и $T_{(d+3)/2-1}$ в противном случае. Из каждого такого поддерева получится характеристическое дерево диаграммы Гейла с нужным автоморфизмом, но каждое характеристическое дерево получится дважды, т. к. мы потребовали, чтобы 2 поддерева были разными как 3-деревья. Поэтому указанное число еще надо разделить на 2.

Чтобы построить 3-дерево, которое после изменения ориентаций всех вершин можно отобразить на себя, оставив и B и C на месте, нужно (по утв. 24) выбрать два будущих поддерева с корнями B и C, каждое из которых будет обладать этим же свойством. При этом в сумме в них должно быть $d+3$ висячих вершин, которые можно распределить между ними как угодно, только чтобы в каждом поддереве их было четное число. Итак, пусть в поддереве с корнем B их k, а в поддереве с корнем C их l. Тогда для первого поддерева существует $T_{k/2-1}$ возможностей, для второго их $T_{l/2-1}$, всего $T_{k/2-1}T_{l/2-1}$. Сумма номеров чисел Каталлана равна $(d+3)/2-2$, поэтому для всех k и l получаем сумму $T_0T_{(d+3)/2-2}+T_1T_{(d+3)/2-3}+\ldots+T_{(d+3)/2-2}T_0 = T_{(d+3)/2-1}$ (реккурентная формула для чисел Каталлана). Из этих деревьев сначала надо выкинуть те, которые получались, когда мы брали деревья с корнями B и C одинаковыми. Их число равно $T_{(d+3)/4-1}$ (они существуют, только если $d+3 \vdots 4$), и общее число способов выбрать 2 поддерева с корнями B и C снова равно $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$. Это число снова надо поделить на 2, т. к. если взять с корнем C то дерево, которое мы раньше брали с корнем B (мы потребовали, чтобы эти 2 дерева были разными), и наоборот, то получим ту же самую диаграмму Гейла. Поэтому общее число диаграмм Гейла, которые имеют автоморфизм, меняющий ориентацию, и не имеют автоморфизма порядка 2, не меняющего ориентацию, равно $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$.

Но эти диаграммы еще могут иметь автоморфизм порядка 3. Как мы видели, при этом автоморфизм диаграммы Гейла, меняющий ориентацию, оставляет B и C на месте, причем других неподвижных вершин у него нет, иначе было бы второе неподвижное ребро, т. к. ориентацию в той вершине мы тоже поменяли бы. Значит, одна из вершин B и C — неподвижная вершина автоморфизма порядка 3. Тогда поддерево с корнем в ней — одно из 3 поддеревьев, которые переходят друг в друга при этом автоморфизме, а поддерево с корнем в другой вершине — 2 таких поддерева с общим корнем, из которого выходит еще одно ребро (ребро BC). Значит, каждую такую диаграмму мы посчитали один раз (если она вообще существовала, т. е. если $d+3$ делилось на 6), несмотря на то, что у нее 3 автоморфизма, меняющих ориентацию. Т. е. если $d+3 \vdots 6$, то из числа посчитанных нами диаграмм Гейла надо вычесть $T_{(d+3)/6-1}$. Итак число диаграмм Гейла с ровно одним автоморфизмом, меняющим ориентацию, равно:
$T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1} - T_{(d+3)/6-1}$, если $d+3 \vdots 4$ и $d+3 \vdots 6$ (т. е. $\vdots 12$);
$T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$, если $d+3 \vdots 4$ но не на 6;
$T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/6-1}$, если $d+3 \vdots 6$ но не на 4;
$T_{(d+3)/2-1}$, если $d+3 \vdots 2$ но не на 4 и не на 6.
Заметим, что этот результат можно записать короче: если положить $T_x = 0$ для нецелых x, то число указанных диаграмм Гейла при любом четном $d+3$ будет равно $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1} - T_{(d+3)/6-1}$. К предыдущим двум группам симметрий эта запись тоже применима, поэтому будем считать, что для любого d число диаграмм Гейла с группой симметрий S_3 равно $T_{(d+3)/6-1}$ (для существования таких деревьев как раз требовалось, чтобы $d+3 \vdots 6$), а с группой симметрий $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ равно $T_{(d+3)/4-1}$ (как раз требовалось $d+3 \vdots 4$).

Случай 2. $d+3$ нечетно. Тогда у автоморфизма существует и единственна неподвижная черная вершина. Рассмотрим характеристическое дерево как двоичное дерево с корнем в ней. У него, кроме корня, имеется $d+2$ висячие вершины, оно должно переходить в себя после замены всех левых детей правыми и наоборот, поэтому число таких деревьев $T_d/2$. Группа симметрий построенных диаграмм Гейла не может отличаться от $\mathbb{Z}_2$, т. к., как мы видели, у диаграмм с группами симметрий S_3 и $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ число черных вершин четно.

Теперь разберемся с диаграммами Гейла, у которых группа симметрий $\mathbb{Z}_3$. По утв. 18, у автоморфизма характеристического дерева есть неподвижная точка. 3 поддерева, до всех вершин каждого из которых можно добраться, выходя из неподвижной вершины по фиксированному ребру, при этом переставляются по циклу (поэтому других неподвижных точек нет). Значит, нам достаточно задать одно из этих поддеревьев. В нем $(d+3)/3$ висячих вершин, отличных от корня ($d+3$ обязано делиться на 3), и при этом оно не должно переходить в себя после изменения ориентации всех вершин, так чтобы корень оставался на месте. Поэтому число таких деревьев равно $T_{(d+3)/3-1}$, если $d+3$ нечетно, и $T_{(d+3)/3-1} - T_{(d+3)/6-1}$ в противном случае. (Т. е. снова $T_{(d+3)/3-1} - T_{(d+3)/6-1}$ с учетом введенных обозначений.) Но каждую диаграмму Гейла мы пока посчитали дважды, т. к. если изменить ориентацию всех вершин в характеристическом дереве, то диаграмма Гейла не изменится. Характеристическое дерево, наоборот, изменится (мы этого потребовали), поэтому полученное число еще надо поделить на 2.

Пусть группа симметрий $\mathbb{Z}_2$, и единственный нетождественный автоморфизм не меняет ориентации. По утв. 18, у автоморфизма характеристического дерева есть ребро, концы которого меняются местами. 2 поддерева, начинающиеся с этого ребра, при этом меняются местами (поэтому других таких ребер нет). Значит, нам достаточно задать одно из этих поддеревьев. В нем $(d+3)/2$ висячих вершин, отличных от корня ($d+3$ обязано быть четным), и при этом оно не должно переходить в себя после изменения ориентации всех вершин, так чтобы корень оставался на месте. Поэтому число таких деревьев равно $T_{(d+3)/2-1}$, если $d+3$ не делится на 4, и $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$ в противном случае. (В наших обозначениях — всегда $T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1}$). И снова каждую диаграмму Гейла мы пока посчитали дважды, т. к. если изменить ориентацию всех вершин в характеристическом дереве, то диаграмма Гейла не изменится. Характеристическое дерево, наоборот, изменится (мы этого потребовали), поэтому полученное число еще надо поделить на 2.

Наконец, перейдем к подсчету диаграмм Гейла, у которых нет автоморфизмов (а значит, и всех диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$). Временно расставим на характеристическом дереве номера черных вершин $1, 2, \ldots, d+3$ по кругу (или, что то же: выберем черную вершину, которая будет корнем характеристического дерева, и направление обхода). Любой автоморфизм диаграммы Гейла однозначно определяется тем, куда перешли черные вершины. Действительно, любая белая вершина в характеристическом дереве лежит на пути от какой-то одной черной до какой-то другой, и при этом мы знаем, какая она по порядку в этом пути. Если мы знаем, куда какой конец пути перешел, то сможем установить и то, куда перешла белая вершина. Значит, если в группе симметрий было n элементов, то данная расстановка номеров на вершинах при автоморфизмах переходит n разных расстановок. Значит, из $2(d+3)$ возможных расстановка номеров только $2(d+3)/n$ дают неизоморфные 3-деревья с корнем 1. Поэтому, когда мы будем считать 3-деревья с $d+2$ висячими вершинами, корме корня, диаграмму Гейла, у которой группа симметрий из n элементов, мы посчитаем $2(d+3)/n$ раз. Всего существует T_{d+1} двоичных деревьев, у которых, кроме корня, есть $d+2$ висячие вершины. Чтобы знать, какие могут быть группы симметрий при данном $d+3$, нам, вообще говоря, нужно знать его делимость на 2, 3, 4, 6, 12, но с учетом обозначения $T_x = 0$ при нецелом x хватит четности или нечетности.

Случай 1. $d+3$ четно. Тогда существует:
$T_{(d+3)/6-1}$ диаграмм с 6 автоморфизмами, каждую мы посчитали $(d+3)/3$ раз;
$T_{(d+3)/4-1}$ диаграмм с 4 автоморфизмами, каждую мы посчитали $(d+3)/2$ раз;
$T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1} - T_{(d+3)/6-1}$ диаграмм с 2 автоморфизмами, один из которых меняет ориентацию, каждую мы посчитали $d+3$ раза;
$(T_{(d+3)/3-1} - T_{(d+3)/6-1})/2$ диаграмм с 3 автоморфизмами, каждую мы посчитали $2(d+3)/3$ раза;
$(T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1})/2$ диаграмм с 2 автоморфизмами, не меняющими ориентацию, каждую мы посчитали $d+3$ раза.
Получилось $(d+3)(T_{(d+3)/6-1}/3 + T_{(d+3)/4-1}/2 + (T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1} - T_{(d+3)/6-1}) + (T_{(d+3)/3-1} - T_{(d+3)/6-1})/3 + (T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1})/2) = (d+3)(3T_{(d+3)/2-1}/2 + T_{(d+3)/3-1}/3 - T_{(d+3)/4-1} - T_{(d+3)/6-1})$ деревьев. Остальным деревьям соответствуют диаграммы Гейла, у которых нет нетождественных автоморфизмов и которые мы посчитали $2(d+3)$ раза, число этих диаграмм равно $T_{d+1}/(2(d+3)) - 3T_{(d+3)/2-1}/4 - T_{(d+3)/3-1}/6 + T_{(d+3)/4-1}/2 + T_{(d+3)/6-1}/2$. Общее число диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$, в этом случае равно $T_{d+1}/(2(d+3)) - 3T_{(d+3)/2-1}/4 - T_{(d+3)/3-1}/6 + T_{(d+3)/4-1}/2 + T_{(d+3)/6-1}/2 + T_{(d+3)/6-1} + T_{(d+3)/4-1} + (T_{(d+3)/2-1} - T_{(d+3)/4-1} -$

$T_{(d+3)/6-1})+(T_{(d+3)/3-1}-T_{(d+3)/6-1})/2+(T_{(d+3)/2-1}-T_{(d+3)/4-1})/2 = T_{d+1}/(2(d+3))+3T_{(d+3)/2-1}/4+T_{(d+3)/3-1}/3$.

Случай 2. $d+3$ нечетно. Тогда существует: $T_{(d+3)/3-1}/2$ диаграмм с 3 автоморфизмами, каждую мы посчитали $2(d+3)/3$ раза;
$T_{d/2}$ диаграмм с 2 автоморфизмами, один из которых меняет ориентацию, каждую мы посчитали $d+3$ раза;
Получилось $(d+3)(T_{(d+3)/3-1}/3+T_{d/2})$ деревьев. Остальным деревьям соответствуют диаграммы Гейла, у которых нет нетождественных автоморфизмов и которые мы посчитали $2(d+3)$ раза, число этих диаграмм равно $T_{d+1}/(2(d+3))-T_{(d+3)/3-1}/6-T_{d+2}/2$. Общее число диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$, в этом случае равно $T_{d+1}/(2(d+3))-T_{(d+3)/3-1}/6-T_{d+2}/2+T_{(d+3)/3-1}/2+T_{d/2}=T_{d+1}/(2(d+3))+T_{(d+3)/3-1}/3+T_{d/2}/2$.

Заметим, что если $d+3$ четно, то d нечетно, и наоборот, поэтому (в обозначениях $T_x=0$ при нецелом x) доказана теорема:

Теорема. *Число диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$, для данного $d>0$ равно*

$$\frac{T_{d+1}}{2(d+3)}+\frac{3T_{(d+3)/2-1}}{4}+\frac{T_{(d+3)/3-1}}{3}+\frac{T_{d/2}}{2}.$$

Далее мы будем говорить о гранях многогранника, соответствующего нашей диаграмме Гейла. Поэтому снова потребуем, чтобы D было ≥ 4. Мы знаем, что если выбрать d вершин, то всегда получится грань. Но если взять $d+1$ вершину, то грань получится не всегда (как говорят, может получиться *ко-грань*).

Утверждение 26 (критерий ко-грани из $d+1$ вершины). *$d+1$ вершина образует ко-грань тогда и только тогда, когда остальные $d+3$ вершины выбраны следующим образом: черные вершины — это вершины некоторой луночки, а белые вершины — это те и только те белые вершины, которые в нее не попали.*

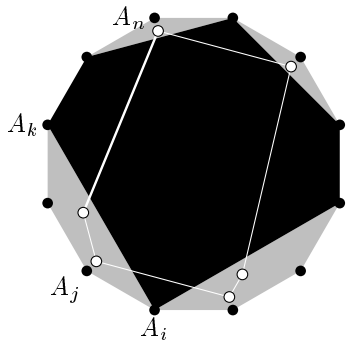
Пусть сначала данная $d+1$ вершина образует ко-грань, докажем, что оставшиеся вершины удовлетворяют критерию. Рассмотрим оставшиеся $d+3$ вершины. Пусть среди них k черных. Тогда образуемый ими k-угольник можно разбить на $k-2$ треугольника, а значит внутри него $k-2$ белые точки, которые мы обязаны были выкинуть, чтобы свойство Ч∩Б не было выполнено. Тогда снаружи осталось $d+1-(k-2)=d-k+3$ белых точек, значит, мы не могли выкинуть ни одну из них, иначе у нас осталось бы менее $d+3$ вершин. Допустим, что k черных вершин не образуют луночку, то есть идут не подряд. Это означает, что если мы начнем с какой-то невыкинутой черной вершины и будем обходить все $d+3$ черные вершины по часовой стрелке, то мы встретим хотя бы 2 куска из подряд идущих выкинутых вершин, разделенных куском подряд идущих невыкинутых. Пусть A_i — та вершина, с которой мы начали, A_j — первая вершина в первом куске выкинутых черных вершин, A_n — первая вершина во втором куске выкинутых черных вершин, A_k — первая вершина в том куске черных вершин, который был между A_j и A_n при нашем обходе. Получилось, что прямая A_iA_k разделяла точки A_j и A_n.

Посмотрим, что будет, если из $d+3$-угольника (с внутренностью) выкинуть внутренность k-угольника, состоящего из оставленных черных вершин. Он распадется на несколько луночек с числом вершин ≥ 3 в каждой. Заметим, что любая из этих луночек обязана лежать целиком по одну сторону (возможно, нестрого) от прямой A_iA_k. Действительно, в противном случае в этой луночке есть внутренние точки, лежащие (уже строго) по разные стороны от A_iA_k. Тогда отрезок, их соединяющий, пересекает не только прямую, но и отрезок A_iA_k, т. к. они лежат внутри исходного выпуклого $d+3$-угольника. Это значит, что на отрезке A_iA_k нашлась внутренняя точка нашей луночки. Но сам отрезок лежит внутри или на границе k-угольника, внутренность которого мы выкинули. Противоречие.

Значит, точки A_j и A_n — вершины разных из этих луночек. Возьмем в каждой из них по белой точке (это можно сделать, т. к. в них хотя бы по 3 вершины). Эти белые точки не были выкинуты изначально, с другой стороны, отрезок, их соединяющий, пересекает отрезок A_iA_k, то есть свойство Ч∩Б выполнено. Противоречие.

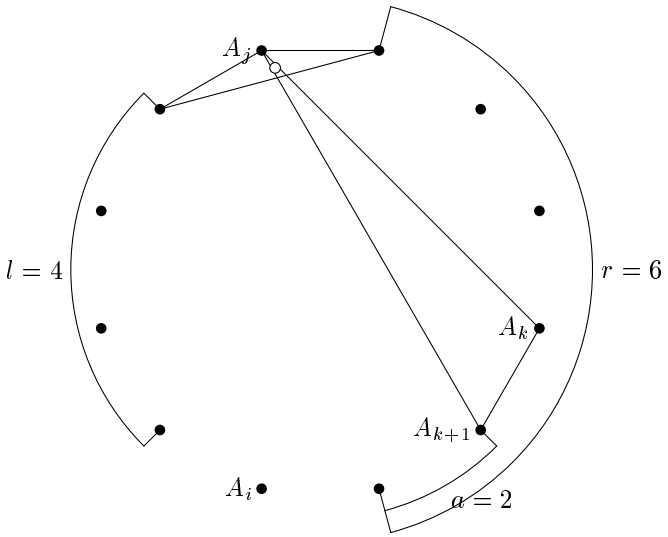
В другую сторону: пусть вершины луночки — вершины $d+3$-угольника, от A_i до A_j (эти вершины всегда определены однозначно, если только луночка — не весь $d+3$-угольник, далее мы

будем называть их *крайними вершинами данной луночки*; луночка определяется своими крайними вершинами с точностью до того, в какую сторону надо идти от одной из них к другой). Если луночка — весь $d+3$-угольник, то в качестве крайних можно взять любые 2 соседние вершины. Тогда внутренность луночки лежит по одну сторону от прямой A_iA_j, а все оставшиеся белые вершины — по другую. Утверждение доказано.



Поставим в соответствие каждой вершине ее номер — вершине A_i $(1 \le i \le d+3)$ — число i, а белым вершинам — числа от $d+4$ до $D+4$ как угодно. Зафиксируем черную вершину i. Выпишем для нее все наборы d вершин, которые вместе с ней образуют ко-грань. Для каждой вершины j посчитаем, сколько раз она упоминается в этом списке.

Пусть сначала вершина j — тоже черная. Введем обозначения: пусть l — число вершин, которые лежат между A_i и A_j, если идти по часовой стрелке (не считая A_i и A_j), аналогично определяется число r, только идти надо против часовой стрелки. Назовем путь от A_i к A_j по часовой стрелке *левым путем*, а против часовой стрелки — *правым путем*. Теперь рассмотрим все треугольники, у которых одна вершина A_j, а 2 другие — соседние вершины $d+3$-угольника. Всего таких треугольников $d+1$, и они являются разбиением $d+3$-угольника на треугольники. В каком-то из них содержится белая точка, соответствующая вершине A_j. Пусть это треугольник $A_jA_kA_{k+1}$. Если одна из вершин A_k и A_{k+1} совпадает с A_i, то положим $a=0$. Иначе они обе лежат либо на левом пути, либо на правом. Тогда пусть a — количество вершин на этом пути между A_i и той из вершин A_k и A_{k+1}, которая встретится первой, если идти от A_i, считая A_k или A_{k+1}, но не считая A_i.



Утверждение 27. *Тогда вершина j упоминается в списке $C_l^2 + C_r^2$ раз. (Здесь и далее мы считаем $C_n^m = 0$ при $m > n$ или $m < 0$.)*

Действительно, рассмотрим произвольную ко-грань, содержащую вершины i и j. Если выкинуть все вершины ко-грани, то оставшиеся черные вершины должны образовывать луночку. Т. к.

вершины i и j выкинуты, то вершины этой луночки могут либо все лежать на левом пути, либо все на правом. При этом луночка уже не может содержать все черные вершины, значит ее крайние вершины определены однозначно. Далее, если мы выбрали 2 крайние вершины, обе на левом пути или обе на правом, то мы уже знаем, в каком направлении нам надо идти от первой ко второй — надо идти в таком направлении, чтобы не проходить через вершины i и j, т. е. идти только по вершинам этого пути. А число способов выбрать 2 вершины на левом пути есть C_l^2, на правом C_r^2, всего получается $C_l^2 + C_r^2$. После того, как луночка выбрана, белые точки, которые надо включить в ко-грань, уже определены однозначно.

Утверждение 28. *Пусть n — белая вершина, соответствующая черной вершине j. Тогда n упоминается в списке $lr + a$ раз.*

Рассмотрим произвольную ко-грань, содержащую вершины i и n. По лемме об индукции, содержать вершину j она не может — иначе, когда мы выкинем вершины j и n, у нас останутся $(D-2)+4$ вершины, для которых выполнено условие $(*)$, а значит, когда мы выкинем из них еще $d-1$ вершину, свойство Ч∩Б будет выполнено.

Итак, вершина j осталась, и теперь она содержится в луночке. Эта луночка вновь не может совпадать со всем $d+3$-угольником, т. к. вершины i в ней нет. Если выбрать 2 вершины, отличные от i, то они снова однозначно определяют луночку — она не должна содержать вершину i. Но она должна также содержать вершину j, поэтому 2 ее крайние вершины теперь должны находиться одна на левом пути, другая на правом. Если ни одна из этих крайних вершин не совпадает с j, то луночка содержит $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$, и вершина n уже выкинута. Число способов так выбрать крайние вершины есть lr.

Пусть теперь j — одна из крайних вершин луночки. Разобьем $d+3$-угольник на треугольники диагоналями, выходящими из A_j. Тогда наша луночка будет целиком состоять из некоторых из этих треугольников. Пусть $\triangle A_jA_kA_{k+1}$ — тот треугольник, который содержит вершину n (он использовался в определении числа a). Тогда луночка должна содержать вершины k и $k+1$, чтобы $\triangle A_jA_kA_{k+1}$ содержался в ней и вершина n была выкинута. Значит, вторая крайняя вершина луночки должна быть на том же пути от j к i, что и k и $k+1$, кроме того, она должна идти после вершин k и $k+1$, если идти от j к i. При этом она может совпадать с последней из них, но не с вершиной i, которую мы выкинули. А число таких вершин как раз и есть a. Всего получается $lr + a$ возможных луночек, и каждая из них уже однозначно определяет, какие вершины будут выкинуты. Утверждение доказано.

Теперь все готово для доказательства теоремы:

Теорема. *Если про $D = 2d$-мерный многогранник с $D+4$ вершинами известно, что он был получен из диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$, то комбинаторика (в смысле эквивалентности по диагоналям) этой диаграммы* ***однозначно*** *восстанавливается по его комбинаторным свойствам.*

Определение. Назовем ребро многогранника *замечательным*, если оно обладает „замечательным свойством порядка $d+1$“: если к его концам добавить еще любую $d-1$ вершину (и тогда всего получится $d+1$), то все взятые вершины образуют грань.

Утверждение 29. *Ребро многогранника замечательное тогда и только тогда, когда на диаграмме Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$ один из его концов — черная точка, а другой — соответствующая ей белая.*

Докажем сначала, что ребро, соединяющее 2 черные вершины, не может образовывать грань. Рассмотрим список ко-граней для одной из них. Другая вершина встречается в нем $C_l^2 + C_r^2$ раз. Т. к. $d \geq 2$, то $l + r = d + 1 \geq 3$, и хотя бы одно из чисел l и r не менее 2. А тогда число сочетаний из него по 2 положительно. Ребро, соединяющее 2 белые вершины, не может быть замечательным просто потому, что все $d+1$ белые вершины образуют ко-грань по критерию (утв. 26).

Пусть теперь одна вершина черная, а другая белая, ей не соответствующая. Рассмотрим луночку, образованную всеми черными вершинами, кроме нашей. Вне ее лежит только белая вершина, соответствующая нашей черной, т. е. не второй конец ребра. Согласно критерию, выкинем все вершины, кроме вершин рассматриваемой луночки и данной белой вершины, и выкинутые вершины будут образовывать ко-грань. Среди них будут оба конца нашего ребра.

В обратную сторону утверждение следует из леммы об индукции, как это уже было проверено при доказательстве предыдущего утверждения.

Таким образом, у нас уже есть способ по комбинаторике многогранника различать пары из черной вершины и соответствующей ей белой. Пока мы не можем отличить черную вершину от белой, если эта белая вершина соответствует ровно одной черной. Но если белая вершина прилежит к стороне, то из нее выходит 2 замечательных ребра, и мы можем отличить ее от 2 черных, которым она соответствует (а такие белые вершины на диаграмме должны существовать, иначе белых вершин будет $\geq d+3$). Присвоим этим черным вершинам номера 1 и $d+3$. (Они на самом деле имеют такие номера с точностью до поворота диаграммы. Пока не важно, какой вершине мы присвоим какой номер, от этого будет потом зависеть, по или против часовой стрелки мы идем.)

Теперь рассмотрим некоторую другую черную вершину (временно назовем ее B) и соответствующую ей белую. Посмотрим на список ко-граней, содержащих известную черную вершину (1 или $d+3$). Ни в какой из них нет одновременно вершины B и соответствующей ей белой. Но, возможно, найдутся такие ко-грани, в которых нет ни вершины B, ни соответствующей ей белой вершины. Посчитаем их количество.

Для этого посмотрим сначала, сколько ко-граней из списка *не* содержат вершину B. Применим критерий ко-грани из $d+1$ вершины и увидим, что для этого необходимо и достаточно, чтобы B являлась вершиной луночки, составленной из черных вершин, не вошедших в ко-грань. При этом эта луночка не может содержать черную вершину, для которой мы создали список, значит луночка однозначно определяется своими крайними вершинами. При этом, чтобы луночка содержала вершину B, один из ее концов должен быть на левом пути, а другой — на правом. Теперь уже никаких дополнительных ограничений нет, кроме того, что 2 крайние вершины не должны совпадать, и мы получаем, что количество луночек (а значит, и ко-граней) равно $(l+1)(r+1)-1 = lr+l+r$. Мы пока не знаем чисел l и r, но знаем, что они есть, т. к. многогранник был получен из диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$.

Все ко-грани, содержащие белую вершину, соответствующую B, находятся среди тех, которые не содержат вершину B, а их число равно $lr+a$. Остальные ко-грани, не содержащие вершину B — это и есть те, которые мы считали, и их число равно $l+r-a$. Число $l+r$ не зависит от диаграммы и всегда равно $d+1$ (это все черные вершины, кроме двух). Поэтому из комбинаторики многогранника мы научились находить число a. Оно пригодится нам в дальнейшем.

Теперь посмотрим, как меняется число вхождений вершины B и соответствующей ей белой вершины в список, когда мы переходим от вершины $d+3$ к вершине 1 (или наоборот). Вначале разберемся в вершиной B. Одно из чисел l и r увеличилось на 1, а другое уменьшилось (мы предполагаем, что B не совпадает с известными нам черными вершинами 1 и $d+3$). Нам не важно, в какую сторону мы переходим, нам важна только абсолютная величина изменения, поэтому будем считать, что l увеличилось, а r уменьшилось. Тогда число вхождений B в список ко-граней стало равно $C_{l+1}^2 + C_{r-1}^2 = C_l^2 + C_l^1 + C_r^2 - C_{r-1}^1 = C_l^2 + C_r^2 + l - r + 1$. То есть число вхождений B в список изменилось на число, по модулю равное $l-r+1$, то есть на число *другой четности, чем* $l-r$, *а значит и* $l+r$.

Теперь посмотрим на белую вершину, соответствующую B. Мы вновь будем считать, что l увеличилось, а r уменьшилось, поэтому слагаемое lr превратится в $(l+1)(r-1) = lr+l-r+1$, то есть изменится на $l-r+1$. Посмотрим теперь на число a. Оно не может оба раза быть равно 0, потому что иначе вершина, соответствующая B, лежала бы в $\triangle A_1A_{d+3}B$, в котором уже есть одна белая вершина, а именно прилежащая к стороне A_1A_{d+3}. Поэтому число a также изменилось на 1, вместо a появилось слагаемое $a-1$ или $a+1$, и общее изменение числа вхождений белой вершины, соответствующей B, равно $l-r+2$ или $l-r$, то есть *совпадает по четности с* $l+r$.

Итак, мы научились отличать черную вершину от белой, ей соответствующей, т. к. четность числа $l+r=d+1$ мы знаем. Теперь докажем следующее утверждение:

Утверждение 30. *По комбинаторным свойствам многогранника для данной черной вершины можно определить ее числа l и r (считая от вершины 1 или $d+3$).*

Рассмотрим сначала одну из вершин 1 и $d+3$, скажем 1. Мы уже умеем отличать вершину B от соответствующей ей белой. Возьмем эту белую и посчитаем, сколько раз она встречается в списке ко-граней. Это число равно $lr+a$, а число a мы уже умеем искать. Значит, мы знаем число lr. Т. к. $l+r=d+1$, то мы можем найти числа l и r, но мы пока не знаем, какое из них l, а какое r.

Вот теперь посчитаем, что идя от вершины $d+3$ к вершине 1, мы проходим по границе $d+3$-угольника по часовой стрелке. Тогда аналогичным образом найдем числа l и r, считая от вершины

$d+3$. Теперь для вершины 1 у нас уже есть числа $l+1$ и $r-1$ (но мы вновь не знаем, какое из них $l+1$, а какое $r-1$). Но теперь, если среди второй пары чисел нашлось число из первой пары, к которому прибавлена единица, то это число из первой пары было l, а если нашлось число из первой пары, от которого была отнята единица, то это было r. (Если во второй паре нашлось и то, и другое число, то l и r совпадали, и их не надо было различать.) Значит, мы знаем числа l и r для вершины 1. Для вершины $d+3$ они равны $l+1$ и $r-1$ соответственно. Утверждение доказано.

Следствие. *Теперь мы знаем, в каком порядке идут черные вершины на границе $d+3$-угольника.*

Осталось разобраться с белыми вершинами. С белыми вершинами, которые соответствуют некоторым черным, вообще все ясно — для них мы знаем числа a, считая от вершин 1 и $d+3$, осталось только выяснить, на левом или на правом пути лежат точки A_k и A_{k+1} из определения числа a. Но если они лежат на левом пути, то число a, посчитанное от вершины 1, будет меньше числа a, посчитанного от вершины $d+3$, и наоборот. Если же белая вершина не соответствует никакой черной, то можно сказать, по какую сторону от каждой диагонали $d+3$-угольника она лежит. А именно, нужно выписать список всех ко-граней из $d+1$ вершины. Согласно критерию, мы знаем, что каждой луночке соответствует ровно одна ко-грань. Возьмем интересующую нас диагональ A_iA_j, ее концы являются двумя крайними вершинами двух луночек. Внутренности этих луночек строго разделяются прямой A_iA_j, поэтому интересующая нас белая точка лежит ровно в одной из них. Возьмем ко-грань, в которой среди черных вершин будут в точности те, которые не стали вершинами одной из луночек (заранее выберем, какой). Это и будет ко-грань, соответствующая луночке. Если белая вершина входит в эту ко-грань, значит она лежит внутри выбранной луночки, т. е. по ту же сторону от A_iA_j, что и луночка, если нет, то по другую сторону.

Теорема доказана. Заметим, что мы доказали более сильное утверждение, а именно, мы смогли сказать, какая вершина многогранника соответствует какой точке диаграммы Гейла, если только выбрать вершины 1 и $d+3$. Поэтому верно следующее утверждение:

Утверждение 31. *Все автоморфизмы многогранника, полученного из диаграммы Гейла, удовлетворяющего условию $(*)$, определяются автоморфизмами этой диаграммы в смысле эквивалентности по диагоналям.*

Получилось, что многогранник является достаточно несимметричным, у него не может быть более 6 автоморфизмов. В циклическом многограннике автоморфизмов больше — не менее, чем диэдральная группа для многоугольника с $D+4$ вершинами, содержащая $2(D+4)$ элементов.

При доказательстве того, что по комбинаторному устройству многогранника его диаграмма Гейла, удовлетворяющая условию $(*)$, строится единственным образом, мы использовали достаточно сложные инварианты, а именно то, сколько раз вершина встречается в списке ко-граней для другой вершины. Следующая теорема доказывает, что в каком-то смысле более простыми инвариантами обойтись не удастся. Одновременно она утверждает, что в каком-то смысле наши многогранники все же являются симметричными.

Теорема. *В любом многограннике размерности D, полученном из диаграммы Гейла, удовлетворяющей условию $(*)$, число граней из данного количества m вершин, содержащих данную вершину, одинаково и зависит только от D и m, но не от диаграммы и выбранной вершины.*

Ясно, что число ко-граней и граней вместе равно C^m_{D+4}, и поэтому можно считать не грани, а ко-грани.

Утверждение 32. *Число ко-граней из $d+1$ вершины, содержащих данную вершину, равно C^2_{d+2}.*

Если данная вершина черная, то луночка, соответствующая ко-грани, уже не может содержать все черные вершины. Более того, известно, какую именно черную вершину она не должна содержать. Поэтому такая луночка однозначно определяется своими крайними вершинами. Число таких луночек равно числу способов выбрать из оставшихся черных вершин 2 крайние, т. е. C^2_{d+2}.

Пусть теперь данная вершина — белая. Тогда, если провести любую диагональ или сторону $d+3$-угольника, то белая вершина будет лежать по какую-то одну сторону от нее. Поэтому из 2 луночек, для которых концы этой диагонали являются крайними вершинами, подходит ровно одна. Но теперь луночка, представляющая собой весь $d+3$-угольник, подходит, а у нее крайние вершины определяются неоднозначно. В качестве крайних для нее можно выбрать любую пару соседних вершин, т. е. она была посчитана $d+3$ раза. Поэтому надо будет вычесть $d+2$. Пару концов

диагонали или стороны можно выбрать C_{d+3}^2 способами, всего получается $C_{d+3}^2 - (d+2) = C_{d+2}^2$. Утверждение доказано.

Определение. Назовем ко-грань из более чем $d+1$ вершины *неособой*, если среди вершин, которые в нее не входят, есть хотя бы 2 черных и хотя бы одна белая. Все остальные ко-грани из более чем $d+1$ вершины назовем *особыми*.

Утверждение 33 (критерий неособой ко-грани из более чем $d+1$ вершины). *Данные $D+4-k$ вершин образуют неособую ко-грань тогда и только тогда, когда среди остальных k есть хотя бы 2 черных и хотя бы одна белая и выполнено следующее свойство: если выкинуть из $d+3$-угольника (с внутренностью) внутренность многоугольника с оставленными черными вершинами, то белые точки будут лежать только в одной из луночек, на которые распадется $d+3$-угольник.*

Доказательство аналогично доказательству критерия для $d+1$ вершины (утв. 26). Допустим сначала, что белые вершины попали более, чем в одну луночку. Рассмотрим одну из них, пусть A_i и A_j — ее крайние вершины. Тогда отрезок A_iA_j — сторона оставшегося многоугольника с черными вершинами. Внутри нее осталась какая-то белая точка. Т. к. не все оставшиеся белые точки лежат внутри этой луночки, то есть другая белая точка вне ее. Отрезок, соединяющий 2 эти белые точки, лежит целиком внутри $d+3$-угольника, поэтому он не может пересекать его сторон, т. е. из сторон луночки он может пересекать только сторону A_iA_j. Т. к. оба его конца — внутренние точки $d+3$-угольника, то и пересекать A_iA_j он может только по внутренней точке. Поэтому свойство Ч∩Б выполнено, и выкинутые вершины не образуют ко-грань.

В обратную сторону: пусть все белые вершины находятся внутри луночки с крайними вершинами A_i и A_j, черные вершины A_i и A_j остались. Тогда эта луночка находится по одну сторону от прямой A_iA_j, а оставшаяся часть $d+3$-угольника — по другую. Утверждение доказано.

Определение. Ко-грань из $d+1$ вершины назовем *исходной для данной неособой ко-грани из более, чем $d+1$ вершины*, если эта ко-грань из более, чем $d+1$ вершины получается из ко-грани из $d+1$ вершины добавлением к ней некоторых вершин, кроме 2 крайних вершин луночки, соответствующей ко-грани из $d+1$ вершины.

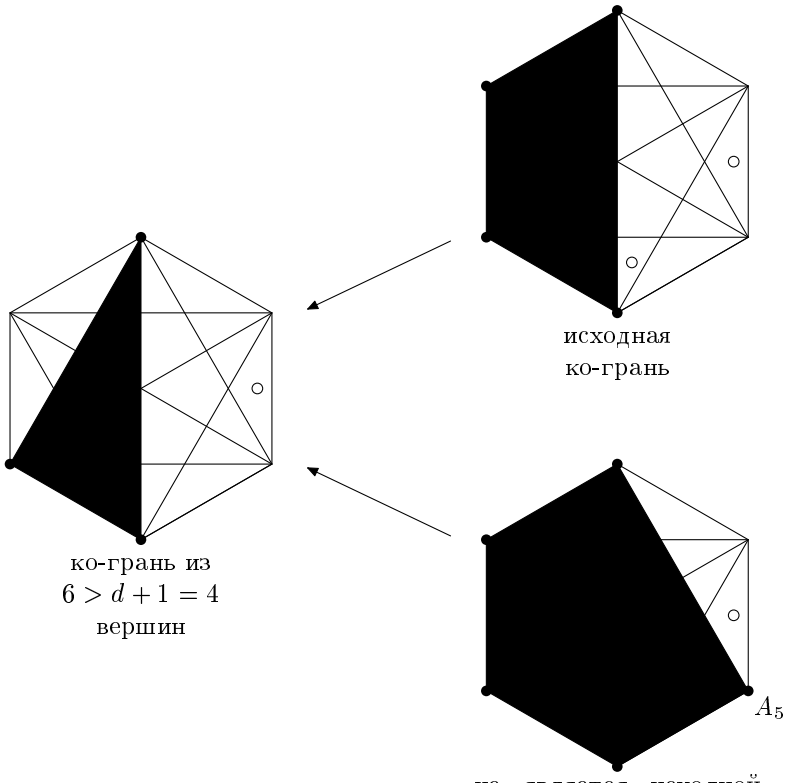
Утверждение 34. *Для любой неособой ко-грани из более, чем $d+1$ вершины, существует и единственна исходная ко-грань.*

Заметим сначала, что если хотя бы одна белая вершина не вошла в ко-грань, то в исходную ко-грань она тоже не входила, поэтому исходная ко-грань не может состоять только из белых вершин, и у соответствующей ей луночки крайние вершины определены однозначно.

Рассмотрим луночку, описанную в критерии неособой ко-грани из более чем $d+1$ вершины, содержащую невыкинутые белые вершины. Если в исходной ко-грани были не выкинуты какие-то из ее вершин, кроме крайних, то либо у этой луночки все некрайние черные вершины были тогда не выкинуты, и тогда все белые вершины, содержащиеся в ней, обязаны были войти уже в исходную ко-грань, а значит теперь там тем более не осталось не выкинутых белых вершин; либо среди ее некрайних вершин найдутся крайние вершины луночки, которая соответствовала ко-грани из $d+1$ вершины, т. к. вершины луночки — подряд идущие вершины $d+3$-угольника. Но тогда эти крайние вершины не были включены в исходную ко-грань, но в ко-грань из более чем $d+1$ вершины мы их включили, что противоречит определению исходной ко-грани.

Значит, все некрайние вершины луночки, внутри которой теперь содержатся белые вершины, входили в ко-грань из $d+1$ вершины. Крайние вершины этой луночки не могли входить в исходную ко-грань, значит они и были крайними для соответствующей ей луночки. (Но эта луночка, хотя и имеет те же крайние вершины, не совпадает с той, которую мы рассматривали изначально, т. к. чтобы получить ее вершины, надо идти по границе $d+3$-угольника в другую сторону.)

Теперь докажем, что ко-грань из $d+1$ вершины с такой соответствующей ей луночкой действительно является исходной для ко-грани из более чем $d+1$ вершины. Действительно, все белые вершины из внутренности этой луночки входят в ко-грань из более, чем $d+1$ вершины, равно как и черные вершины, не лежащие на ее границе. Поэтому, чтобы получить из исходной ко-грани новую, нам надо будет только добавлять к ней вершины. Крайние вершины этой луночки не входят в исходную ко-грань, поэтому добавлять мы их не будем. Утверждение доказано.



не является исходной ко-гранью, т. к. крайняя вершина луночки A_5 была добавлена в ко-грань

Далее мы будем в основном рассматривать не ко-грани, *содержащие данную вершину*, а ко-грани, *не содержащие данную вершину*. Также мы будем предполагать, что в ко-грань входит не более D вершин (иначе грань с таким количеством вершин имела размерность не менее D, т. е. совпадала бы со всем многогранником или вообще не существовала бы).

Утверждение 35. *Число ко-граней, не содержащих k $(3 < k < d + 3)$ вершин (из $D + 4$) и не содержащих данную черную вершину, зависит только от k и D, но не от диаграммы (удовлетворяющей, тем не менее, условию $(*)$) и выбранной вершины.*

Число ко-граней, не содержащих данную черную вершину и содержащих остальные черные, просто всегда равно C_{d+1}^{k-1} (нам нужно выбрать еще $k - 1$ белых вершин, которые не войдут в ко-грань). Число ко-граней, содержащих все белые вершины, равно $C_{d+2}^{k} - 1$ (на этот раз нам надо выбирать вершины, которые не войдут в ко-грань, из черных). Для каждой неособой ко-грани рассмотрим сначала многоугольник из черных вершин, не вошедших в ко-грань. Число таких многоугольников равно числу способов выбрать из $d + 2$ вершин не более $k - 2$ и не менее 1 (нам нужно не более $k - 2$ вершин, чтобы хотя бы одна оставшаяся вершина была белой). Каждый такой многоугольник определяет набор и порядок количеств вершин в луночках, остающихся при его выкидывании от $d+3$ угольника. Множество наборов этих луночек не зависит от того, какую черную вершину мы не включаем в ко-грань (многоугольник из черных вершин можно „повернуть“ внутри $d+3$ угольника, так чтобы одна заданная его вершина перешла в заданную). А если нам уже известно, какие черные вершины не войдут в ко-грань, то, чтобы ее достроить, согласно критерию надо сделать следующее: выбрать из луночек, остающихся при выкидывании многоугольника, одну, и из белых вершин, содержащихся в ней, выбрать недостающее до k количество. Число способов сделать это, не зависит от того, как именно расположены белые вершины внутри луночек — важно только, чтобы в луночке с n вершинами всегда было $n - 2$ белые вершины, но это следует из условия $(*)$. Утверждение доказано.

Утверждение 36. *Полное число ко-граней, не содержащих какие угодно $k < d+3$ вершин (т. е. содержащих $D+4-k$), равно*

$$(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^{k} + C_{d+1}^{k}.$$

Действительно, чтобы получить неособую ко-грань, нужно сначала выбрать для нее исходную ко-грань, которая определяется соответствующей ей луночкой. Из луночки, являющейся всем $d+3$ угольником, не может получиться неособая ко-грань, т. к. все белые вершины будут в нее включены. Поэтому крайние вершины этой луночки определены однозначно. Выберем из них ту, от которой по границе $d+3$-угольника надо идти к другой крайней вершине по часовой стрелке, если идти по границе луночки. Пойдем от нее по часовой стрелке. Мы можем остановиться и поставить вторую крайнюю вершину в $d+1$ месте: кроме вершины, с которой мы начали, есть еще $d+2$ вершины, но остановиться в последней мы не можем, иначе получим весь $d+3$-угольник. А исходную вершину можно выбрать $d+3$ способами, и всего получается $(d+1)(d+3)$ луночек.

Теперь из $d+3$ вершин, которые не вошли в ко-грань, нужно выбрать k, которые в нее так и не войдут. Среди этих k обязательно должны быть 2 (уже известные) крайние вершины луночки и еще какая-нибудь белая. Т. е. из $d+1$ вершины ($d+3$ без 2 крайних) нужно выбрать $k-2$, так чтобы среди них обязательно была одна белая. Просто выбрать $k-2$ вершины можно C_{d+1}^{k-2} способами. Число способов, которые нам не подходят — это число способов выбрать $k-2$ вершины только из черных. Если в луночке, кроме крайних, было еще n вершин, то таких способов C_n^{k-2}. Вспомним, как мы считали луночки. Число вершин в луночке зависит только от того, в какой вершине мы остановимся и поставим вторую крайнюю вершину, но не от того, с какой вершины мы начали. Поэтому для каждого из $d+1$ возможных чисел получится по $d+3$ луночки.

Итак, если у луночки было $n+2$ вершины (из них 2 — крайние), то из соответствующей ей исходной ко-грани можно получить $C_{d+1}^{k-2} - C_n^{k-2}$ новых. Для данного числа n существует $d+3$ луночки с $n+2$ вершинами, поэтому из ко-граней, соответствующих луночкам с данным количеством вершин $n+2$, можно получить $(d+3)(C_{d+1}^{k-2} - C_n^{k-2})$ новых ко-граней. Всего новых неособых ко-граней получится

$$\sum_{n=0}^{d} \left((d+3)\left(C_{d+1}^{k-2} - C_n^{k-2}\right)\right) =$$
$$= (d+3)\left((d+1)C_{d+1}^{k-2} - \sum_{n=0}^{d} C_n^{k-2}\right) = (d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} - (d+3)C_{d+1}^{k-1}.$$

Теперь посчитаем особые ко-грани. Если среди k вершин нет белых, то число способов их выбрать (из только черных) есть C_{d+3}^{k}. Если среди k вершин есть ровно одна черная, то белые там должны быть (т. к. $k > 3$), и поэтому достаточно выбрать $k-1$ вершину из $d+1$ белых и еще 1 черную, что можно сделать $(d+3)C_{d+1}^{k-1}$ способами. Наконец, если черных вершин нет, то надо просто выбрать k вершин из $d+1$ белых C_{d+1}^{k} способами. Всего получаем $(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} - (d+3)C_{d+1}^{k-1} + C_{d+3}^{k} + (d+3)C_{d+1}^{k-1} + C_{d+1}^{k} = (d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^{k} + C_{d+1}^{k}$ ко-граней (уже и особых, и неособых). Утверждение доказано.

Утверждение 37. *Число ко-граней, не содержащих k ($3 < k < d+3$) вершин (из $D+4$) и не содержащих данную белую вершину, равно*

$$C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3} + (d+3)C_{d}^{k-2} + C_{d}^{k-1}.$$

Посчитаем сначала неособые ко-грани. Рассмотрим для каждой из них исходную ко-грань. Луночка, ей соответствующая, снова не может быть всем $d+3$-угольником. Рассмотрим ее крайние вершины. Белая точка должна лежать по другую сторону от прямой, их соединяющей, чем луночка. Поэтому из 2 луночек с данными крайними вершинами нам подходит ровно одна. (Эти 2 крайние вершины могут оказаться и соседними, тогда луночка будет отрезком между ними.) То есть у нас получилось C_{d+3}^{2} исходных ко-граней. В каждую из них не входит $d+3$ вершины, из них нам надо выбрать k. Мы уже знаем 3 вершины, которые заведомо не войдут в ко-грань: 2 крайние вершины выбранной луночки и та белая, которая не входит по условию. Из остальных d вершин можно

выбрать $k-3$ произвольным образом, т. к. одна белая вершина уже точно не войдет в ко-грань. Число неособых ко-граней равно $C_{d+3}^2 C_d^{k-3}$. Число ко-граней, в которые не входит ровно одна черная вершина, равно $(d+3)C_d^{k-2}$ (надо выбрать эту черную вершину $d+3$ способами и $k-1$ из $d+1$ белой, но одну белую вершину, не входящую в ко-грань, мы уже знаем, поэтому получается C_d^{k-2}. А число ко-граней, в которые не входят только белые вершины, равно C_d^{k-1} (одну белую вершину, которая не входит в ко-грань, мы уже знаем). Всего получилось $C_{d+3}^2 C_d^{k-3} + (d+3)C_d^{k-2} + C_d^{k-1}$ ко-граней. Утверждение доказано.

Утверждение 38. *Для любых $k \geq 0$ и $d \geq 0$ выполнено равенство*

$$k\left((d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^k + C_{d+1}^k\right) = (2d+4)\left(C_{d+3}^2 C_d^{k-3} + (d+3)C_d^{k-2} + C_d^{k-1}\right).$$

Будем доказывать это утверждение по индукции по d.

При $k=0$ левая часть равна 0, а правая тоже равна 0, потому что равны 0 все числа сочетаний из d по отрицательному числу. При $d=0$ надо доказать, что:

$$k(3C_1^{k-2} + C_3^k + C_1^k) = 4(3C_0^{k-3} + 3C_0^{k-2} + C_0^{k-1}).$$

При $k=0$ и $k>3$ и левая, и правая части обращаются в 0. Осталось проверить $k=1,2,3$.
$k=1$: $1(3C_1^{-1} + C_3^1 + C_1^1) = 4 = 4(3C_0^{-2} + 3C_0^{-1} + C_0^0)$ — верно.
$k=2$: $2(3C_1^0 + C_3^2 + C_1^2) = 12 = 4(3C_0^{-1} + 3C_0^0 + C_0^1)$ — верно.
$k=3$: $3(3C_1^1 + C_3^3 + C_1^3) = 12 = 4(3C_0^0 + 3C_0^1 + C_0^2)$ — верно.
Пусть нам надо доказать утверждение для d и $k>0$, мы будем пользоваться им для $d-1$ и k, а также для $d-1$ и $k-1$. Левая часть:

$$\begin{aligned}
k\left((d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^k + C_{d+1}^k\right) &= k\left((d+2)dC_{d+1}^{k-2} + (2d+3)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^k + C_{d+1}^k\right) = \\
&= k\left((d+2)dC_d^{k-2} + (d+2)dC_d^{k-3} + C_{d+2}^k + C_{d+2}^{k-1} + C_d^k + C_d^{k-1}\right) + k(2d+3)C_{d+1}^{k-2} = \\
&= k\left((d+2)dC_d^{k-2} + C_{d+2}^k + C_d^k\right) + \\
&+(k-1)\left((d+2)dC_d^{k-3} + C_{d+2}^{k-1} + C_d^{k-1}\right) + \\
&+(d+2)dC_d^{k-3} + C_{d+2}^{k-1} + C_d^{k-1} + k(2d+3)C_{d+1}^{k-2}.
\end{aligned}$$

Правая часть:

$$\begin{aligned}
&(2d+4)\left(C_{d+3}^2 C_d^{k-3} + (d+3)C_d^{k-2} + C_d^{k-1}\right) = \\
&= (d+2)\left((d+3)(d+2)C_d^{k-3} + 2(d+3)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1}\right) = \\
&= (d+1)\left((d+3)(d+2)C_d^{k-3} + 2(d+3)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1}\right) + \\
&\qquad +(d+3)(d+2)C_d^{k-3} + 2(d+3)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1} = \\
&= (d+1)\left((d+2)(d+1)C_d^{k-3} + 2(d+2)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1}\right) + \\
&+(d+1)(2d+4)C_d^{k-3} + 2(d+1)C_d^{k-2} + (d+3)(d+2)C_d^{k-3} + 2(d+3)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1} = \\
&= (d+1)\left((d+2)(d+1)C_{d-1}^{k-3} + 2(d+2)C_{d-1}^{k-2} + 2C_{d-1}^{k-1}\right) + \\
&+(d+1)\left((d+2)(d+1)C_{d-1}^{k-4} + 2(d+2)C_{d-1}^{k-3} + 2C_{d-1}^{k-2}\right) + \\
&+(3d+5)(d+2)C_d^{k-3} + 2(2d+4)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1}.
\end{aligned}$$

Первые и вторые слагаемые полученных выражений равны по предположению индукции, и нам осталось доказать, что

$$(3d+5)(d+2)C_d^{k-3} + 2(2d+4)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1} = (d+2)dC_d^{k-3} + C_{d+2}^{k-1} + C_d^{k-1} + k(2d+3)C_{d+1}^{k-2},$$

или, что то же,

$$(3d+5)(d+2)C_d^{k-3} + 2(2d+4)C_d^{k-2} + 2C_d^{k-1} - \left((d+2)dC_d^{k-3} + C_{d+2}^{k-1} + C_d^{k-1} + k(2d+3)C_{d+1}^{k-2}\right) = 0.$$

Докажем это:

$$(3d+5)(d+2)C_d^{k-3}+2(2d+4)C_d^{k-2}+2C_d^{k-1}-\left((d+2)dC_d^{k-3}+C_{d+2}^{k-1}+C_d^{k-1}+k(2d+3)C_{d+1}^{k-2}\right)=$$
$$=(2d+5)(d+2)C_d^{k-3}+2(2d+4)C_d^{k-2}+C_d^{k-1}-C_{d+2}^{k-1}-k(2d+3)C_{d+1}^{k-2}=$$
$$=(2d+5)(d+2)C_d^{k-3}+2(2d+4)C_d^{k-2}+C_d^{k-1}-$$
$$-C_d^{k-1}-2C_d^{k-2}-C_d^{k-3}-k(2d+3)C_d^{k-3}-k(2d+3)C_d^{k-2}=$$
$$=(2d^2+9d+10-2kd-6k-1)C_d^{k-3}+(2-k)(2d+3)C_d^{k-2}=$$
$$=(2d+3)(d-k+3)C_d^{k-3}+(2-k)(2d+3)C_d^{k-2}=$$
$$=(2d+3)\left((d-k+3)C_d^{k-3}-(k-2)C_d^{k-2}\right),$$

а последний множитель уже равен 0, т. к. если оба числа сочетаний не равны 0, то из явной формулы для числа сочетаний следует, что $C_d^{k-2}=\frac{d-(k-2)+1}{k-2}C_d^{k-3}$. Если же ровно одно из них не равно 0, то либо $k-2=d+1$, и тогда $C_d^{k-2}=0$ и $d-k+3=0$, либо $k-3=-1$, и тогда $C_d^{k-3}=0$ и $k-2=0$. Утверждение доказано.

Теперь для каждой ко-грани, в которую не входит k вершин, выпишем эти k вершин. Тогда каждое число будет написано столько раз, сколько существует ко-граней, в которые данная вершина не входит. Всего мы выпишем в k раз больше чисел, чем имеется ко-граней из $D+4-k$ вершин, т. е. $k((d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}+C_{d+3}^{k}+C_{d+1}^{k})$. По утв. 38 это число равно $(2d+4)(C_{d+3}^2C_d^{k-3}+(d+3)C_d^{k-2}+C_d^{k-1})$. Т. к. каждая белая вершина не входит в $C_{d+3}^2C_d^{k-3}+(d+3)C_d^{k-2}+C_d^{k-1}$ ко-граней, то всего белые вершины упоминаются в нашем списке $(d+1)(C_{d+3}^2C_d^{k-3}+(d+3)C_d^{k-2}+C_d^{k-1})$ раз. Значит, все черные вершины упоминаются в списке $(d+3)(C_{d+3}^2C_d^{k-3}+(d+3)C_d^{k-2}+C_d^{k-1})$ раз, а т. к. каждая из $d+3$ черных вершин упоминается одинаковое число раз (утв. 35), то это число равно $C_{d+3}^2C_d^{k-3}+(d+3)C_d^{k-2}+C_d^{k-1}$, т. е. совпадает с числом ко-граней, в которые не входит данная белая вершина.

Значит, число ко-граней, в которые не входят k вершин (из $D+4$), и в которые при этом не входит данная конкретная вершина (уже не важно, белая или черная), зависит только от D и k, но не от диаграммы и от выбранной вершины. Осталось заметить, что число ко-граней из $D+4-k$ вершин, в которые данная вершина все-таки входит, равно числу всех ко-граней из $D+4-k$ вершин минус число тех ко-граней, в которые эта вершина не входит, то есть зависит только от D и k. Теорема доказана.