Некоторые примеры смежностных многогранников коразмерности 4

Ростислав Девятов

26 апреля 2007 г.

Аннотация

Известно, что в пространстве размерности $\mathbb{R}^{2d}$, $d \geq 2$ существует циклический многогранник, который обладает свойством смежности. Известны так же другие примеры смежностных многогранников.

В настоящей статье построена серия примеров смежностных многогранников в $\mathbb{R}^{2d}$ с числом вершин $N = 2d + 4$ (отличных от циклического многогранника). Все эти многограниики имеют плоскую диаграмму Гейла канонического вида, а именно: в ней ровно $d + 3$ белых точек, и они лежат в выпуклом плоложении. Диаграммы Гейла такого вида параметризуются 3-деревьями (деревьями с некоторой дополнительной структурой, см. определение в тексте статьи), что, в частности, позволяет подсчитать число комбинаторных типов таких многогранников при фиксированном d. Для всех многогранников K построенной серии число граней размерности m, содержащих вершину A, зависит лишь от d и m, но не от K и A. Оно такое же, как и у циклического многогранника.

1. Введение

1.1. Смежностные и циклические многогранники

Многогранник в $\mathbb{R}^D$ называется смежностным, если любые $\lfloor D/2 \rfloor$ его вершин образуют грань. Мы будем рассматривать случай, когда D четно ($D = 2d$), тогда грань образуют любые d вершин. Мы будем пользоваться следующим известным фактом [4]: смежностные многогранники комбинаторно жесткие, т. е. их комбинаторный тип определяет комбинаторику конфигурации вершин.

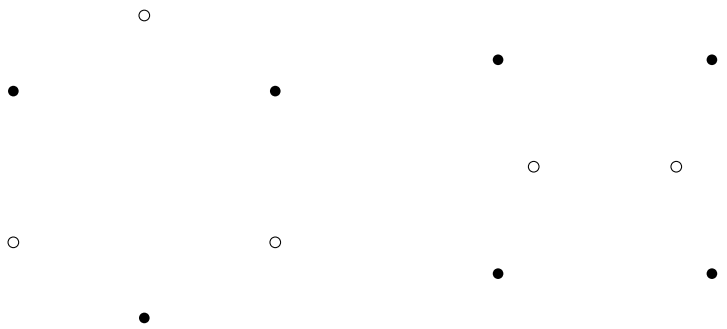
Циклические многогранники [1] существуют в любой размерности $D \geq 4$. Для их построения используется *кривая моментов в* $\mathbb{R}^D$, которая пробегает все точки вида $(t, t^2, t^3, \ldots, t^D)$, где $t \in \mathbb{R}$. Если выбрать на этой кривой $N > D$ точек, то они будут лежать в выпуклом положении, причем никакие $D + 1$ из них не будут лежать в одной гиперплоскости, а любые $\lfloor D/2 \rfloor$ точек будут образовывать грань получившегося многогранника, который и называется циклическим. Очевидно, он является смежностным. Более того, известно [1, 3], что число граней этого многогранника в любой размерности максимально возможное для многогранников такой размерности с таким количеством вершин. В частности, если $D = 2d$, а $N = D + 4$, то число его ко-граней (т. е. наборов вершин, не являющихся гранями) в размерности $D+3-k$ (т. е. тех, которые не содержат k вершин) равно $(d + 2)^2 C_{d+1}^{k-2} + 2C_{d+2}^{k}$.

Известно, что существует много смежностных многогранников с $D + 4$ вершинами даже в четной размерности (в нечетной размерности ситуация проще, см. Shemer [4]). Первые примеры были получены Грюнбаумом [2]: для $D = 4$ есть 2 таких многогранника, не считая циклического.

1.2. Диаграмма Гейла

Диаграмма Гейла позволяет поставить в соответствие конфигурации X из N точек в D-мерном пространстве конфигурацию X^* из N черно-белых точек в $N-D-2$-мерном пространстве, комбинаторика которой полностью определяет комбинаторику исходной конфигурации. При построении

используются наборы векторов в $D+1$-мерном и $N-D-1$-мерном пространствах. При этом векторы в $D+1$-мерном пространстве получаются просто добавлением первой координаты, равной 1, к координатам каждой точки. В конце построения сначала получается векторная диаграмма Гейла (т. е. конфигурация векторов в $\mathbb{R}^{N-D-1}$), которая строится однозначно. Далее нужно совершить обратную операцию — выкинуть первую координату у каждого из векторов набора. Но может не найтись такого базиса, в котором первая координата каждого вектора будет положительной. Поэтому, чтобы запомнить ее знак, в полученной афинной диаграмме Гейла используются точки 2 цветов — черные и белые. Афинная диаграмма Гейла, вообще говоря, не однозначно строится по векторной. Например, показанные 2 афинные диаграммы Гейла соответствуют одной и той же векторной:



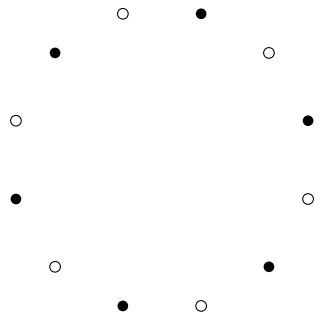
Далее под словами „диаграмма Гейла“ будет пониматься именно афинная диаграмма. О диаграмме Гейла нам потребуется знать следующие известные факты:

1. Векторам конфигурации X на диаграмме Гейла X^* соответствуют ковекторы, и наоборот. Точки X лежат в выпуклом положении тогда и только тогда, когда при выкидывании любой из точек для оставшихся было выполнено следующее свойство: выпуклая оболочка белых точек пересекается с выпуклой оболочкой черных точек по относительным внутренностям. Далее это свойство (некоторого подмножества точек диаграммы Гейла) будем коротко называть свойством Ч∩Б.

2. Данное множество точек $A \subset X^*$ порождает грань многогранника тогда и только тогда, когда для $X^* \setminus A$ выполнено свойство Ч∩Б. Другими словами, нужно выкинуть точки A из диаграммы, и выкинутые точки будут образовывать грань тогда и только тогда, когда для оставшихся точек $(X^* \setminus A)$ будет выполнено свойство Ч∩Б. Поэтому в дальнейшем тексте слова „выкинуть точку“ и „включить точку в грань“ будут пониматься в одинаковом смысле.

3. Точки X^* лежат в общем положении тогда и только тогда, когда в общем положении лежат точки X.

4. Диаграмма Гейла циклического многогранника в размерности $D = 2d$ с $D+4$ вершинами является плоской и выглядит как $D+4$ точки, расставленные через равные расстояния на окружности, причем эти точки попеременно белые и черные. Следовательно, группа комбинаторных автоморифзмов циклического многогранника действует на множестве его вершин транзитивно.



1.3. Основные результаты

Мы будем строить многогранники с $D+4$ вершинами, тогда диаграмма Гейла будет двумерной. Потребуем от диаграммы одно дополнительное условие: пусть имеется ровно $d+3$ черных точек (напомним, что $D = 2d$), образующих выпуклый многоугольник. Все остальные точки белые.

1. Предложение (необходимое и достаточное условие того, чтобы многогранник обладал свойством смежности). Диаграмма Гейла указанного вида задает смежностный многогранник тогда и только тогда, когда в любом треугольнике, образованном 3 черными вершинами, включая границу этого треугольника, находится ровно одна белая точка, причем на самом деле она находится строго внутри него. В связи с этим такие диаграммы Гейла будем называть *T-диаграммами*, а соотвтествующие им смежностные многогранники — *T-многогранниками*. (*)

   Определение. Дерево с дополнительной структурой назовем *3-деревом*, если выполнены следующие условия:

   1. Все его вершины имеют степень либо 1, либо 3.
   2. Имеется следующая дополнительная структура: на каждых 3 ребрах, выходящих из вершины степени 3, задан ориентированный циклический порядок обхода. Этот порядок естественным образом индуцирует ориентированный циклический порядок на вершинах степени 1.

   (См. примеры 3-деревьев на с. 8.)

   Определение. 3-дерево называется *характеристическим деревом* данной диаграммы Гейла, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между его вершинами и вершинами диаграммы Гейла, так что:

   1. Белые вершины на диаграмме соответствуют вершинам степени 3 в дереве, а черные — вершинам степени 1.
   2. Циклический порядок вершин степени 1 в дереве совпадает с циклическим порядком черных вершин на границе $d+3$-угольника.
   3. Белая вершина на диаграмме Гейла лежит внутри треугольника, образованного тремя черными, тогда и только тогда, когда из вершины дерева, соответствующей этой белой вершине, надо выйти к 3 вершинам дерева, соответствующим 3 черным вершинам, *по трем разным ребрам* (или, что то же, идти *по трем непересекающимся путям*).

   Определение. Две Т-диаграммы Гейла назовем *эквивалентными по диагоналям*, если можно так установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, что черные вершины соответствуют черным, а белые — белым, циклический порядок на черных вершинах сохраняется (но направления по и против часовой стрелки могут поменяться местами), а белая точка лежит в выпуклой оболочке данных подряд идущих черных вершин в первой диаграмме тогда и только тогда, когда соответствующая белая точка лежит в выпуклой оболочке соответствующих подряд идущих черных вершин во второй диаграмме.

2. Теорема. Для любой Т-диаграммы Гейла существует характеристическое дерево. Оно единственно с точностью до смены циклического порядка всех вершинах сразу на противоположный, что соответствует зеркальному отражению диаграммы Гейла на плоскости и, очевидно, не влияет на ее комбинаторные свойства.

   Для любого 3-дерева с числом вершин $D+4$ существует Т-диаграмма Гейла, для которой данное дерево является характеристическим. Она единственна с точностью до эквивалентности по диагоналям.

   (Впоследствии мы докажем, что эквивалентность по диагоналям равносильна комбинаторной эквивалентности, и из этого будет следовать, что Т-диаграмма Гейла просто единственна в комбинаторном смысле.)

3. Теорема. Число комбинаторно различных Т-диаграмм Гейла для данного $d > 0$ равно

$$\frac{T_{d+1}}{2(d+3)} + \frac{3T_{(d+3)/2-1}}{4} + \frac{T_{(d+3)/3-1}}{3} + \frac{T_{d/2}}{2}.$$

   Здесь T_x равно 0, если x — нецелое, и x-тому числу Каталана $C_{2x}^x/(x+1)$, если x — целое.

4. Теорема. Если для Т-диаграммы Гейла X^* про каждую белую точку известно, по какую сторону от каждой диагонали $d+3$-угольника она лежит (т. е. та информация, которая использовалась в определении эквивалентности по диагоналям), то комбинаторику Т-многогранника X можно однозначно восстановить, т. е. можно выяснить, какие наборы вершин образуют грани. Более того, все автоморфизмы X^* в смысле эквивалентности по диагоналям определяются комбинаторными автоморфизмами X.

   Для любого Т-многогранника X комбинаторика (в смысле эквивалентности по диагоналям) его Т-диаграммы Гейла X^* *однозначно* восстанавливается по комбинаторным свойствам X. Более того, все комбинаторные автоморфизмы X определяются автоморфизмами X^* в смысле эквивалентности по диагоналям, т. е. на самом деле группы автоморфизмов X и X^* канонически изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что все построенные примеры не только различны между собой, но и отличаются от циклического многогранника.

5. Теорема. В любом Т-многограннике размерности D число граней из данного количества m вершин, содержащих данную вершину, одинаково и зависит только от D и m, но не от диаграммы и выбранной вершины. Оно совпадает с соответствующим числом для циклического многогранника.

Благодарности

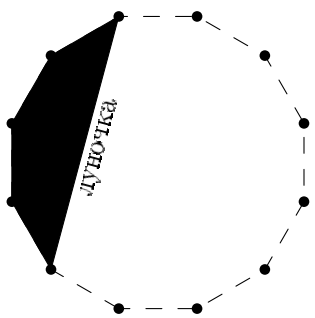
Автор благодарен организаторам летней школы „Современная математика“, где был прочитан курс о диаграммах Гейла, а также лично лектору этого курса Г. Ю. Паниной.

2. Критерий смежностности рассматриваемых многогранников (условие (∗))

Лемма 1. *Пусть в диаграмме Гейла многогранника размерности $D = 2d$ с $D + 4$ вершинами имеется ровно $d + 3$ черных точки, и они образуют выпуклый многоугольник. Тогда все белые точки находятся строго внутри $d + 3$-угольника.*

Действительно, если хотя бы одна белая точка находится не внутри $d+3$-угольника, то удалим остальные d белых точек. Оставшаяся одна белая точка не пересекает выпуклую оболочку черных (т. е. $d+3$-угольник с внутренностью) по его относительной внутренности, т. е. свойство Ч∩Б не выполнено. □

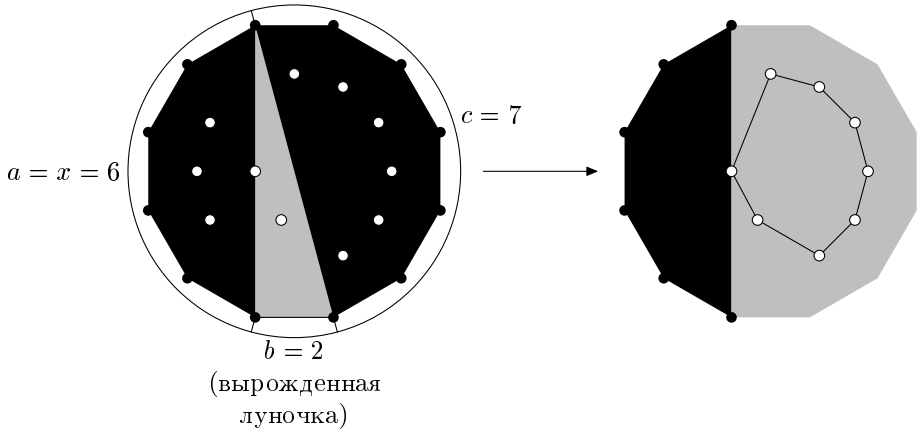
Определение. Будем называть *луночкой* выпуклую оболочку нескольких подряд идущих вершин $d + 3$-угольника.



Лемма 2. *В условиях леммы 1, в любом треугольнике, образованном 3 черными вершинами, включая его границу, не должно быть более одной белой точки.*

Допустим, нашелся треугольник, внутри и на границе которого находятся хотя бы 2 белые точки. Тогда выкинем из выпуклой оболочки $d+3$-угольника этот треугольник (с внутренностью). Он распадется на одну, две или три луночки. Будем считать, что их ровно 3, только некоторые из них вырожденные.

Пусть у них a, b и c черных вершин (у вырожденной луночки 2 вершины). Очевидно, $a+b+c = (d+3)+3$ (вершины выкинутого треугольника мы считаем в сумме $a+b+c$ дважды). В их относительных внутренностях в сумме содержится не более $d-1$ белой точки. (Для вырожденных луночек это тоже верно, там белых точек не может быть просто по лемме 1.) Поэтому в какой-то из наших 3 луночек, граница которой состоит из x вершин, содержится менее $x-2$ белых. В противном случае в них в сумме было бы $\geq (a-2)+(b-2)+(c-2) = d$ белых вершин. Рассмотрим черные вершины, которые не лежат на границе выбранной луночки (их $d+3-x$) и белые вершины внутри нее (их не более $x-3$). Мы выбрали не более d вершин. (Если мы выбрали строго меньше, довыберем произвольные белые вершины так, чтобы всего получилось d.) Указанные d вершин не образуют грань, т. к. свойство Ч∩Б для оставшихся вершин не выполнено. □



Предложение 3. *В условиях леммы 1, в любом треугольнике, образованном 3 черными вершинами, включая границу этого треугольника, должна находиться ровно одна белая точка, причем на самом деле она должна быть строго внутри него.*

Разобьем $d+3$-угольник на треугольники, так чтобы среди треугольников разбиения был и тот, для которого мы доказываем утверждение. Получилось, что у нас есть $d+1$ треугольник, в которых как-то расставлена $d+1$ белая точка. Допустим, что строго внутри нашего треугольника белых точек нет. Тогда внутри и на границах оставшихся d треугольников находится $d+1$ белая точка. Следовательно, внутри и на границе какого-то треугольника содержится хотя бы 2 белые точки, что противоречит лемме 2. (Если точка оказалась на границе сразу двух треугольников, будем считать ее как находящуюся на границе ровно одного из них.) Итак, строго внутри нашего треугольника находится хотя бы одна белая точка. Других белых точек ни внутри, ни на границе его быть не может, иначе бы это противоречило лемме 2. □

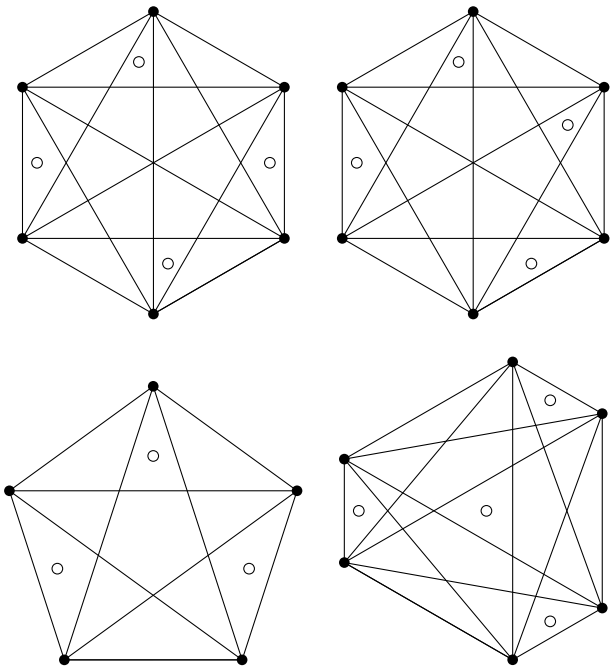
Предложение 4. *Условия из предл. 3 уже достаточно для того, чтобы многогранник был смежностным.*

Действительно, пусть мы выкинули из наших $D+4$ точек некоторые d, причем из них k черные, а остальные $d-k$ белые. Тогда у нас осталось $d-k+3$ черных вершин и $k+1$ белая. По лемме о доразбиении, разобьем $d+3$-угольник на треугольники, так чтобы $d-k+3$-угольник из оставшихся черных вершин целиком состоял из треугольников разбиения. Всего получился $d+1$ треугольник, причем $d-k+1$ из них составляют наш $d-k+3$-угольник. Мы удалили всего $d-k$ белых вершин, значит строго внутри какого-то из этих $d-k+1$ треугольников белая точка осталась. Свойство Ч∩Б выполнено. □

Итак, мы доказали следующий критерий смежностности: диаграмма Гейла указанного вида задает смежностный многогранник тогда и только тогда, когда в любом треугольнике, образо- (∗)

ванном 3 черными вершинами, включая границу этого треугольника, находится ровно одна белая точка, причем на самом деле она находится строго внутри него. В связи с этим такие диаграммы Гейла будем называть *T-диаграммами*, а соотвтествующие им смежностные многогранники — *T-многогранниками.*

Ниже приведены некоторые примеры таких диаграмм Гейла.



3. Простейшие свойства T-многогранников

Замечание 5. *Во всех T-многогранниках все грани — симплексы.* □

Теперь мы будем использовать выражения „грань из $m+1$ вершины“ и „грань размерности m“ как синонимы.

Забудем на некоторое время про условие $D \geq 4$, нам будет достаточно $D \geq 0$. Обозначим вершины нашего $d+3$-угольника в порядке обхода по часовой стрелке как $A_1, A_2, \ldots, A_{d+3}$. Иногда мы будем называть точку A_{d+3} точкой A_0, а точку A_1 — точкой A_{d+4}.

Определение. Назовем *граничным треугольником точки* A_i треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Согласно предл. 3, в каждом граничном треугольнике должна содержаться ровно одна белая точка (но, вообще говоря, могут быть и белые точки вне их). Про белую точку, которая лежит внутри $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ будем говорить, что она *соответствует вершине* A_i. Черной точке всегда соответствует ровно одна белая (наоборот, вообще говоря, неверно, т. к. черных и белых точек разное количество).

Замечание 6. *Если белая вершина соответствует некоторой черной вершине A_i, то она лежит внутри только тех треугольников с черными вершинами, у которых одна из вершин A_i.* □

Лемма 7 (лемма об индукции для T-диаграммы Гейла). *Если из T-диаграммы Гейла выкинуть черную точку A_i и соответствующую ей белую B, то получится вновь T-диаграмма Гейла. (если, конечно, общее число вершин останется ≥ 4).*

Действительно, треугольники, образованные черными вершинами в новой диаграмме Гейла были треугольниками, образованными черными точками и в старой диаграмме. Там они содержали ровно одну белую точку, причем это была не точка B, которая соответствовала A_i (см. зам. 6). Значит и теперь в каждом треугольнике, образованном черными точками, содержится ровно одна белая, т. е. условие $(*)$ выполнено. □

Всего граничных треугольников $d+3$, а белых точек $d+1$. Поэтому хотя бы 2 белые точки лежат сразу в двух граничных треугольниках (3 и более граничных треугольника не имеют общих внутренних точек, если только $d+3$-угольник не является треугольником, тогда действительно единственная белая точка лежит сразу в трех граничных треугольниках). В связи с этим введем два эквивалентных определения:

Определение. Про белую точку, которая одновременно лежит в граничных треугольниках вершин A_i и A_{i+1} будем говорить, что она *прилежит к стороне* A_iA_{i+1}.

Определение. Будем говорить, что белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}, если она лежит внутри всех треугольников вида $A_iA_{i+1}A_j$, и только их. Это определение далее будем называть альтернативным.

Предложение 8. *Эти два определения действительно эквивалентны.*

Пусть сначала белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1} в смысле первого определения. Докажем, что она прилежит к стороне и в смысле второго определения. Рассмотрим диагональ A_iA_j. Она делит $d+3$-угольник на 2 луночки, причем точки A_{i+1} и A_{i+2} являются вершинами одной и той же луночки (точка A_{i+2} — возможно, вершиной обеих). Значит, точка A_{i+1} лежит по ту же сторону от прямой A_iA_j, что и внутренность $\triangle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ и, в частности, точка B. Аналогично, точка A_i лежит по ту же сторону от прямой $A_{i+1}A_j$, что и B. Осталось заметить, что весь $d+3$-угольник лежит по одну сторону от прямой A_iA_{i+1}, значит точки A_j и B лежат по одну сторону от нее. Поэтому для любых двух вершин $\triangle A_iA_{i+1}A_j$ верно следующее: точка B и третья вершина треугольника лежат по одну сторону от прямой, образованной этими двумя. А это и означает, что точка B лежит внутри треугольника (на границе она лежать не может просто по условию $(*)$). Внутри других треугольников белая точка лежать не может по зам. 6. В обратную сторону очевидно. □

В смысле этих определений можно теперь сказать, что если $d>0$, то существуют хотя бы 2 белые точки, прилежащие к сторонам, а при $d=0$ такая точка ровно одна.

Предложение 9. *Если $d>0$, то белая точка не может соответствовать более, чем двум черным. Белая точка соответствует двум данным черным тогда и только тогда, когда она прилежит к стороне, соединяющей эти черные точки, а сами они — соседние на границе $d+3$-угольника.*

Докажем сначала, что белая точка не может соответствовать двум несоседним на границе $d+3$-угольника черным точкам. Если эти точки A_i и A_j, то, по лемме об индукции, при выкидывании этой белой точки и A_i мы вновь получим T-диаграмму Гейла. Т. к. A_i не была соседней с A_j на границе $d+3$-угольника, то никакая из вершин $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ не была выкинута, а значит, там должна находиться белая точка. Но белую точку, соответствующую A_j, мы уже выкинули. Противоречие. А если 2 черные точки, которым соответствует белая, соседние на границе $d+3$-угольника, то она прилежит к стороне, их соединяющей, прямо по определению, и наоборот. Пусть белая точка соответствует 3 черным. Тогда все пары из этих черных точек являются сторонами $d+3$-угольника, но тогда других сторон у него нет, т. е. $d+3=3$ и $d=0$. □

Предложение 10. *Пусть A_iA_{i+1} — сторона $d+3$-угольника, к которой прилежит белая точка. Тогда, если из диаграммы Гейла выкинуть A_i или A_{i+1} и эту белую вершину, то, независимо от того, какую из вершин A_i и A_{i+1} мы выкинули, получится одна и та же диаграмма Гейла в том смысле, что все белые точки будут содержаться в одинаковых наборах треугольников.*

Действительно, рассмотрим некоторую белую точку C. Для треугольников, никакая вершина которых не совпадает ни с A_i, ни с A_{i+1}, утверждение очевидно. Пусть мы удалили одну из вершин A_i или A_{i+1}, скажем A_i. Пусть белая точка оказалась в $\triangle A_{i+1}A_jA_k$. Тогда нам нужно доказать, что если бы мы удалили не A_i, а A_{i+1}, она оказалась бы в $\triangle A_iA_jA_k$. Рассмотрим четырехугольник $A_iA_{i+1}A_jA_k$ (не ограничивая общности, A_iA_j — его диагональ). Внутри него лежат 2 белые точки, причем мы знаем, какие: одна из них — точка C, которая лежит внутри $\triangle A_{i+1}A_jA_k$, а другая — белая точка, прилежащая к стороне A_iA_{i+1}, которая по альтернативному определению лежит внутри $\triangle A_iA_{i+1}A_k$. Значит, внутри $\triangle A_iA_jA_k$ лежит одна из этих белых точек, причем белая точка, прилежащая к стороне A_iA_{i+1}, там лежать не может. Значит, там лежит точка C. Предложение доказано. □

4. Классификация диаграмм Гейла, удовлетворяющих условию $(*)$

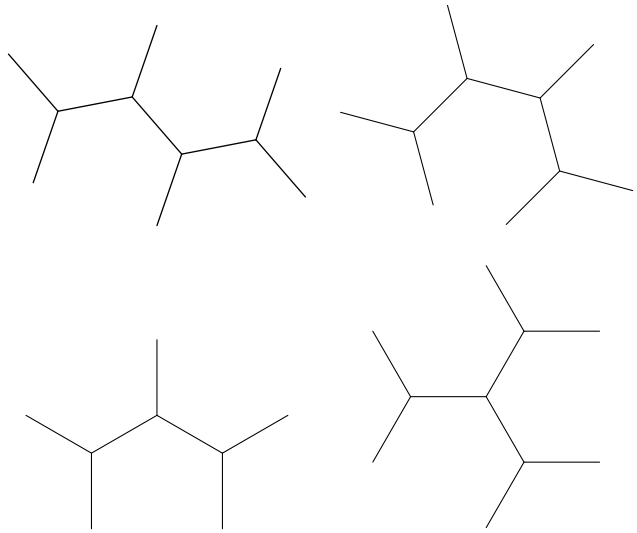
Определение. Дерево с дополнительной структурой назовем *3-деревом*, если выполнены следующие условия:

1. Все его вершины имеют степень либо 1, либо 3.
2. Имеется следующая дополнительная структура: на каждых 3 ребрах, выходящих из вершины степени 3, задан ориентированный циклический порядок обхода. Этот порядок естественным образом индуцирует ориентированный циклический порядок на вершинах степени 1.

Определение. 3-дерево называется *характеристическим деревом* данной диаграммы Гейла, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между его вершинами и вершинами диаграммы Гейла, так что:

1. Белые вершины на диаграмме соответствуют вершинам степени 3 в дереве, а черные — вершинам степени 1.
2. Циклический порядок вершин степени 1 в дереве совпадает с циклическим порядком черных вершин на границе $d+3$-угольника.
3. Белая вершина на диаграмме Гейла лежит внутри треугольника, образованного тремя черными, тогда и только тогда, когда из вершины дерева, соответствующей этой белой вершине, надо выйти к 3 вершинам дерева, соответствующим 3 черным вершинам, *по трем разным ребрам* (или, что то же, идти *по трем непересекающимся путям*).

Вот примеры 3-деревьев, являющихся характеристическими для диаграмм Гейла, показанных выше:



Определение. Две Т-диаграммы Гейла назовем *эквивалентными по диагоналям*, если можно так установить взаимно-однозначное соответствие между их вершинами, что черные вершины соответствуют черным, а белые — белым, циклический порядок на черных вершинах сохраняется (но направления по и против часовой стрелки могут поменяться местами), а белая точка лежит в выпуклой оболочке данных подряд идущих черных вершин в первой диаграмме тогда и только тогда, когда соответствующая белая точка лежит в выпуклой оболочке соответствующих подряд идущих черных вершин во второй диаграмме.

Следующая теорема позволяет классифицировать диаграммы Гейла, удовлетворяющие условию $(*)$:

Теорема. *Для любой T-диаграммы Гейла существует характеристическое дерево. Оно единственно с точностью до смены циклического порядка всех вершинах сразу на противоположный, что соответствует зеркальному отражению диаграммы Гейла на плоскости и, очевидно, не влияет на ее комбинаторные свойства.*

Для любого 3-дерева с числом вершин $D+4$ существует T-диаграмма Гейла, для которой данное дерево является характеристическим. Она единственна с точностью до эквивалентности по диагоналям.

При доказательстве теоремы будем считать, что диаграмма нарисована на плоскости, т. е. направление обхода по часовой стрелке нам задано. Тогда характеристическое дерево будет просто единственно.

Предложение 11. *Пусть дана T-диаграмма Гейла, и пусть некоторое 3-дерево является для нее характеристическим. Тогда следующие утверждения равносильны:*
1. Белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}.
2. Вершина дерева, соответствующая B, соединена ребрами с вершинами, соответствующими A_i и A_{i+1}.

Пусть сначала белая точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}. Согласно альтернативному определению понятия „белая точка прилежит к стороне“, у всех треугольников, содержащих точку B, одна из вершин должна быть A_i, а другая — A_{i+1}. Для характеристического дерева это означает, что если выйти из вершины B по одному из ребер, то ни в какую висячую вершину, кроме A_i, прийти нельзя. Но тогда B должна быть соединена с A_i просто ребром, т. к. если на пути между ними встречается вершина степени 3, то из нее можно пойти не только к A_i, но и в другую сторону. Аналогично, другое ребро из B ведет в A_{i+1}.

В обратную сторону: если идти из B по трем разным ребрам, то по одному из них можно прийти только в A_i, по другому — только в A_{i+1}, а по третьему — во все остальные вершины. Это означает, что точка B лежит в тех и только тех треугольниках из черных вершин, в которых есть сторона A_iA_{i+1}, т. е. прилежит к стороне A_iA_{i+1}. □

Лемма 12 (лемма об индукции для характеристического дерева). *Пусть дана T-диаграмма Гейла, и точка B прилежит к стороне A_iA_{i+1}. Пусть дано 3-дерево, вершины которого как-то поставлены во взаимно-однозначное соответствие вершинам на диаграмме Гейла, причем вершина B имеет степень 3, соединена ребрами с висячими вершинами A_i и A_{i+1}, а циклический порядок на ребрах, выходящих из B, задавал правильное направление по часовой стрелке для стороны A_iA_{i+1}. Выкинем из диаграммы вершины A_i и B (по лемме об индукции), а из дерева — вершины, соответствовавшие A_i и A_{i+1}. Вершину дерева, которая раньше соответствовала B (и теперь стала висячей), поставим в соответствие A_{i+1}. Все остальные вершины оставим поставленными в соответствие так, как раньше.*

Тогда исходное дерево являлось характеристическим для исходной диаграммы Гейла тогда и только тогда, когда новое дерево является характеристическим для новой диаграммы Гейла.

Пусть сначала исходное дерево являлось характеристическим для исходной диаграммы. Тогда при удалении вершин циклический порядок на черных вершинах сохранился, черные точки вновь соответствуют висячим, а белые — вершинам степени 3. Осталось доказать только свойство 3 из определения характеристического дерева. Рассмотрим белую вершину C, которая осталась в диаграмме. Пути, ведущие из нее в 3 висячие вершины, ни одна из которых не совпадала с A_{i+1}, вообще не изменились. Если же некоторый путь вел из вершины, соответствующей C, в вершину, соответствующую A_{i+1}, то теперь он ведет в вершину, ранее соответствовавшую B, т. е. отличается от старого пути тем, что в старом пути в конце его было еще одно ребро, которого теперь в графе нет. Кроме этого ребра, путь из C в A_{i+1} не изменился, поэтому он выходит из C по тому же ребру. Осталось заметить, что C лежит в тех же самых треугольниках с черными вершинами, в которых лежала до удаления A_i (кроме треугольников с вершиной A_i, которых теперь нет).

В обратную сторону. Циклический порядок на черных вершинах исходного дерева будет правильный, т. к. порядок на ребрах, выходящих из B (бывшей A_{i+1}) выбран правильно по условию. Если некоторая белая точка попадала в треугольник, у которого не было вершины A_i, то она и будет попадать в него, и для характеристического дерева это тоже верно. Осталось проверить треугольники, у которых одна из вершин — A_i. Если вторая вершина этого треугольника A_{i+1}, то, согласно альтернативному определению понятия „белая точка прилежит к стороне“, во все эти

треугольники попадает вершина B, что и видно из характеристического дерева, в котором из вершины, соответствующей B, идут 2 ребра в вершины, соответствующие A_i и A_{i+1}. Если же в треугольнике 2 другие вершины не совпадают с A_{i+1}, то по предл. 10, белая точка лежит в этом треугольнике тогда и только тогда, когда она лежит в треугольнике, у которого вершина A_{i+1} заменена на A_i. Но путь в дереве от этой белой вершины к A_i отличается от пути к A_{i+1} только последним ребром, которое идет из B в A_i вместо A_{i+1}. Значит, первое ребро у этих путей совпадает (белая вершина не может совпадать с B по альтернативному определению), т. е. условие 3 для треугольника, одна из вершин которого — A_i, действительно выполнено тогда и только тогда, когда белая вершина в нем лежит. □

Лемма 13. *Пусть дана T-диаграмма Гейла. Пусть уже известно, в какую сторону надо идти по границе $d+3$-угольника по часовой стрелке. Тогда существует и единственно характеристическое дерево.*

Будем доказывать утверждение по индукции по d. Если $d = 0$, то единственно возможная диаграмма — треугольник с белой точкой внутри. Единственно возможное 3-дерево из 4 вершин — вершина степени 3, из которой идут 3 ребра в вершины степени 1. Очевидно, это дерево является характеристическим для этой диаграммы.

Пусть теперь $d > 0$. Пусть для данной диаграммы нашлось характеристическое дерево. Рассмотрим какую-нибудь сторону $d+3$-угольника, к которой прилежит белая вершина (таких сторон существует хотя бы 2). Пусть эта сторона A_iA_{i+1}, а белая вершина B. Тогда, по предл. 11, из B идут 2 ребра в висячие вершины, соответствующие A_i и A_{i+1}. Выкинем из дерева эти висячие вершины, а из диаграммы Гейла выкинем A_i и B. По лемме об индукции для характеристического дерева, полученное дерево является характеристическим для новой диаграммы (только вершина, ранее соответствовавшая B, теперь соответствует A_{i+1}). А для новой диаграммы характеристическое дерево, как мы знаем, существует и единственно. В характеристическом дереве для исходной диаграммы Гейла мы пока не знаем только порядка на ребрах, выходящих из вершины B. Но т. к. вершины A_i и A_{i+1} идут по часовой стрелке в порядке обхода $d+3$-угольника, то этот порядок должен быть таким (по часовой стрелке): сначала ребро, идущее в A_i, затем в A_{i+1} и потом третье ребро. Единственность характеристического дерева доказана.

Существование напрямую следует из леммы об индукции для характеристического дерева: надо только добавить к характеристическому дереву для диаграммы Гейла без 2 вершин 2 новые вершины степени 1 и задать в ней циклический порядок так, как указано в условии леммы. □

Лемма 14. *Пусть дана T-диаграмма Гейла, и в ней выбрана черная вершина A_i. Тогда к ней можно так добавить черную вершину (будем называть ее $A_{i+1/2}$) и белую вершину B, что стороны $A_iA_{i+1/2}$ и $A_{i+1/2}A_{i+1}$ добавятся к многоугольнику из черных вершин (вместо A_iA_{i+1}), а вершина B будет прилежать к стороне $A_iA_{i+1/2}$. При удалении $A_{i+1/2}$ и B будет получаться исходная диаграмма.*

Рассмотрим на старой диаграмме прямую, проходящую через A_i и не пересекающую многоугольник из черных вершин нигде больше (такая прямая существует, т. к. многоугольник выпуклый). Т. к. все белые точки лежат строго внутри треугольников с черными вершинами, то на этой прямой можно выбрать черную точку, достаточно близкую к A_i, так чтобы каждая белая точка лежала по ту же сторону от прямых, соединяющих вершины $d+3$-угольника с выбранной точкой, что и от прямых, соединяющих эти вершины с A_i, и кроме того, она лежала со всеми черными точками в выпуклом положении. Эту точку и выберем в качестве $A_{i+1/2}$. (Надо только выбрать ее по нужную сторону от A_i, чтобы у новой выпуклой оболочки была сторона $A_{i+1/2}A_{i+1}$, а не $A_{i-1}A_{i+1/2}$.) Тогда белых точек пока не будет только в треугольниках со стороной $A_iA_{i+1/2}$. Добавим ее в пересечение треугольников $A_{i-1}A_iA_{i+1/2}$ и $A_iA_{i+1/2}A_{i+1}$. Тогда она попадет в треугольники со стороной $A_iA_{i+1/2}$, и только в них (см. доказательство предл. 8). То есть мы добавили точки $A_{i+1/2}$ и B и получили новую T-диаграмму Гейла. □

<u>Определение.</u> Назовем вершину 3-дерева *предвисячей*, если она соединена ребрами с 2 висячими вершинами.

Замечание 15. *В любом 3-дереве с числом вершин более 4 найдется хотя бы 2 предвисячие вершины. В 3-дереве с 4 вершинами она ровно 1.* □

Лемма 16. *Любое 3-дерево с $D+4$ вершинами ($D \geq 0$, $D = 2d$) является характеристическим для некоторой T-диаграммы Гейла.*

Будем доказывать утверждение по индукции по d. Если $d = 0$, то единственно возможному дереву из 4 вершин соответствует, как мы уже видели, треугольник с белой точкой внутри.

Пусть $d > 0$. Рассмотрим в 3-дереве предвисячую вершину B и удалим 2 висячие вершины A_i и A_{i+1}, с которыми она была соединена. Мы получим 3-дерево с на 2 меньшим количеством вершин. Оно является характеристическим для некоторой диаграммы Гейла. Рассмотрим в этой диаграмме черную вершину, соответствующую B (в новом дереве B — уже висячая). Добавим к этой диаграмме черную и белую вершины по лемме 14. Тогда исходное дерево будет являться характеристическим для этой диаграммы по лемме об индукции для характеристического дерева. □

Для доказательства теоремы осталось доказать только единственность диаграммы Гейла для данного характеристического дерева в смысле эквивалентности по диагоналям. По 3-дереву мы уже можем сказать про (каждую) диаграмму Гейла, для которой оно является характеристическим, внутри каких треугольников лежит данная белая вершина. Поэтому доказательство теоремы завершает следующее замечание:

Замечание 17. *Если для Т-диаграммы Гейла про каждую белую точку известно, внутри каких треугольников она лежит (а так же циклический порядок на черных вершинах), то известно и то, по какую сторону от каждой диагонали она лежит.* □

Теорема доказана. Заметим, что указанная нами в определении эквивалентности по диагоналям информация о диаграмме Гейла (по какие стороны от диагоналей лежат белые вершины) выбрана не случайно: как мы увидим ниже, в критериях того, образуют ли данные вершины грань многогранника, будет использоваться только эта информация, а именно то, внутри каких луночек лежит данная белая точка. А потом будет доказано, что эквивалентность по диагоналям двух Т-диаграмм Гейла означает просто их комбинаторную эквивалентность, и из этого будет следовать, что Т-диаграмма Гейла, для которой данное 3-дерево является характеристическим, просто единственнна.

Характеристические деревья позволяют посчитать количество Т-диаграмм Гейла для данного D. Выяснив, как устроены автоморфизмы характеристических деревьев, полуаем следующую формулу:

Теорема. *Число комбинаторно различных Т-диаграмм Гейла для данного $d > 0$ равно*

$$\frac{T_{d+1}}{2(d+3)} + \frac{3T_{(d+3)/2-1}}{4} + \frac{T_{(d+3)/3-1}}{3} + \frac{T_{d/2}}{2}.$$

Здесь T_x равно 0, если x — нецелое, и x-тому числу Каталана $C_{2x}^x/(x+1)$, если x — целое.

5. Единственность Т-диаграммы Гейла для данного Т-многогранника

Далее мы будем говорить о гранях многогранника, соответствующего нашей диаграмме Гейла. Поэтому снова потребуем, чтобы D было ≥ 4. Мы знаем, что если выбрать d вершин, то всегда получится грань. Но если взять $d+1$ вершину, то грань получится не всегда (как говорят, может получиться *ко-грань*).

Лемма 18 (критерий ко-грани из $d+1$ вершины). *$d+1$ вершина образует ко-грань тогда и только тогда, когда остальные $d+3$ вершины выбраны следующим образом: черные вершины — это вершины некоторой луночки, а белые вершины — это те и только те белые вершины, которые в нее не попали.*

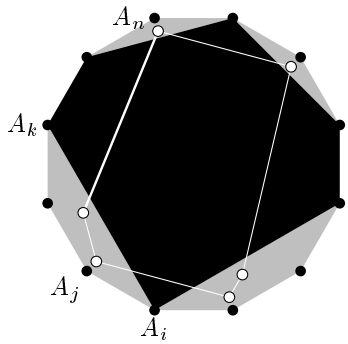
Пусть сначала данная $d+1$ вершина образует ко-грань, докажем, что оставшиеся вершины удовлетворяют критерию. Рассмотрим оставшиеся $d+3$ вершины. Пусть среди них k черных. Тогда образуемый ими k-угольник можно разбить на $k-2$ треугольника, а значит внутри него $k-2$ белые точки, которые мы обязаны были выкинуть, чтобы свойство Ч∩Б не было выполнено. Тогда снаружи осталось $d+1-(k-2) = d-k+3$ белых точек, значит, мы не могли выкинуть ни одну из них, иначе у нас осталось бы менее $d+3$ вершин. Допустим, что k черных вершин не образуют луночку, то есть идут не подряд. Это означает, что если мы начнем с какой-то невыкинутой черной вершины и будем обходить все $d+3$ черные вершины по часовой стрелке, то мы встретим хотя бы

2 куска из подряд идущих выкинутых вершин, разделенных куском подряд идущих невыкинутых. Пусть A_i — та вершина, с которой мы начали, A_j — первая вершина в первом куске выкинутых черных вершин, A_n — первая вершина во втором куске выкинутых черных вершин, A_k — первая вершина в том куске черных вершин, который был между A_j и A_n при нашем обходе. Получилось, что прямая A_iA_k разделяла точки A_j и A_n.

Посмотрим, что будет, если из $d+3$-угольника (с внутренностью) выкинуть внутренность k-угольника, состоящего из оставленных черных вершин. Он распадется на несколько луночек с числом вершин ≥ 3 в каждой. Заметим, что любая из этих луночек обязана лежать целиком по одну сторону (возможно, нестрого) от прямой A_iA_k. Действительно, в противном случае в этой луночке есть внутренние точки, лежащие (уже строго) по разные стороны от A_iA_k. Тогда отрезок, их соединяющий, пересекает не только прямую, но и отрезок A_iA_k, т. к. они лежат внутри исходного выпуклого $d+3$-угольника. Это значит, что на отрезке A_iA_k нашлась внутренняя точка нашей луночки. Но сам отрезок лежит внутри или на границе k-угольника, внутренность которого мы выкинули. Противоречие.

Значит, точки A_j и A_n — вершины разных из этих луночек. Возьмем в каждой из них по белой точке (это можно сделать, т. к. в них хотя бы по 3 вершины). Эти белые точки не были выкинуты изначально, с другой стороны, отрезок, их соединяющий, пересекает отрезок A_iA_k, то есть свойство Ч∩Б выполнено. Противоречие.

В другую сторону: пусть вершины луночки — вершины $d+3$-угольника, от A_i до A_j (эти вершины всегда определены однозначно, если только луночка — не весь $d+3$-угольник, далее мы будем называть их *крайними вершинами данной луночки*; луночка определяется своими крайними вершинами с точностью до того, в какую сторону надо идти от одной из них к другой). Если луночка — весь $d+3$-угольник, то в качестве крайних можно взять любые 2 соседние вершины. Тогда внутренность луночки лежит по одну сторону от прямой A_iA_j, а все оставшиеся белые вершины — по другую. □



<u>Определение.</u> Назовем ко-грань из более чем $d+1$ вершины *неособой*, если среди вершин, которые в нее не входят, есть хотя бы 2 черных и хотя бы одна белая. Все остальные ко-грани из более чем $d+1$ вершины назовем *особыми*.

Лемма 19 (критерий неособой ко-грани из более чем $d+1$ ***вершины).*** *Данные $D+4-k$ вершин образуют неособую ко-грань тогда и только тогда, когда среди остальных k есть хотя бы 2 черных и хотя бы одна белая и выполнено следующее свойство: если выкинуть из $d+3$-угольника (с внутренностью) внутренность многоугольника с оставленными черными вершинами, то белые точки будут лежать только в одной из луночек, на которые распадется $d+3$-угольник.*

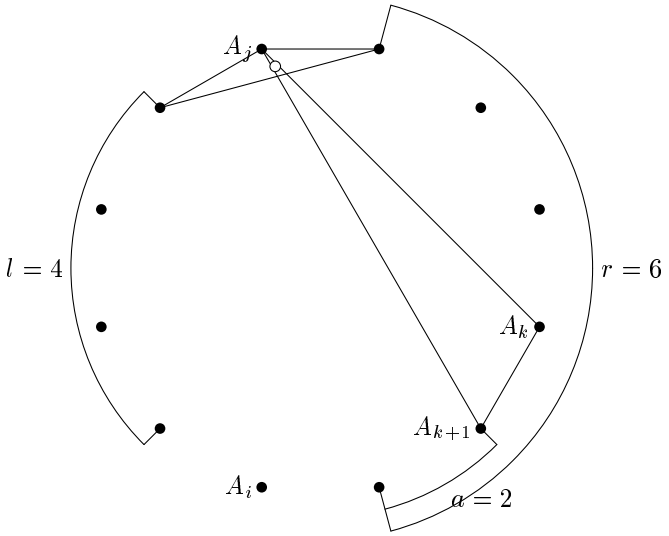
Доказательство аналогично доказательству критерия для $d+1$ вершины. Допустим сначала, что белые вершины попали более, чем в одну луночку. Рассмотрим одну из них, пусть A_i и A_j — ее крайние вершины. Тогда отрезок A_iA_j — сторона оставшегося многоугольника с черными вершинами. Внутри этой луночки осталась какая-то белая точка. Т. к. не все оставшиеся белые точки лежат внутри этой луночки, то есть другая белая точка вне ее. Отрезок, соединяющий 2 эти белые точки, лежит целиком внутри $d+3$-угольника, поэтому он не может пересекать его сторон, т. е. из сторон луночки он может пересекать только сторону A_iA_j. Т. к. оба его конца —

внутренние точки $d+3$-угольника, то и пересекать A_iA_j он может только по внутренней точке. Поэтому свойство Ч∩Б выполнено, и выкинутые вершины не образуют ко-грань.

В обратную сторону: пусть все белые вершины находятся внутри луночки с крайними вершинами A_i и A_j, черные вершины A_i и A_j остались. Тогда эта луночка находится по одну сторону от прямой A_iA_j, а оставшаяся часть $d+3$-угольника — по другую. □

Поставим в соответствие каждой вершине ее номер — вершине A_i $(1 \le i \le d+3)$ — число i, а белым вершинам — числа от $d+4$ до $D+4$ как угодно. Зафиксируем черную вершину i. Выпишем для нее все наборы d вершин, которые вместе с ней образуют ко-грань. Для каждой вершины j посчитаем, сколько раз она упоминается в этом списке.

Пусть сначала вершина j — тоже черная. Введем обозначения: пусть l — число вершин, которые лежат между A_i и A_j, если идти по часовой стрелке (не считая A_i и A_j), аналогично определяется число r, только идти надо против часовой стрелки. Назовем путь от A_i к A_j по часовой стрелке *левым путем*, а против часовой стрелки — *правым путем*. Теперь рассмотрим все треугольники, у которых одна вершина A_j, а 2 другие — соседние вершины $d+3$-угольника. Всего таких треугольников $d+1$, и они являются разбиением $d+3$-угольника на треугольники. В каком-то из них содержится белая точка, соответствующая вершине A_j. Пусть это треугольник $A_jA_kA_{k+1}$. Если одна из вершин A_k и A_{k+1} совпадает с A_i, то положим $a=0$. Иначе они обе лежат либо на левом пути, либо на правом. Тогда пусть a — количество вершин на этом пути между A_i и той из вершин A_k и A_{k+1}, которая встретится первой, если идти от A_i, считая A_k или A_{k+1}, но не считая A_i.



Предложение 20. *Тогда вершина j упоминается в списке $C_l^2+C_r^2$ раз. (Здесь и далее мы считаем $C_n^m=0$ при $m>n$ или $m<0$.)*

Действительно, рассмотрим произвольную ко-грань, содержащую вершины i и j. Если выкинуть все вершины ко-грани, то оставшиеся черные вершины должны образовывать луночку. Т. к. вершины i и j выкинуты, то вершины этой луночки могут либо все лежать на левом пути, либо все на правом. При этом луночка уже не может содержать все черные вершины, значит ее крайние вершины определены однозначно. Далее, если мы выбрали 2 крайние вершины, обе на левом пути или обе на правом, то мы уже знаем, в каком направлении нам надо идти от первой ко второй — надо идти в таком направлении, чтобы не проходить через вершины i и j, т. е. идти только по вершинам этого пути. А число способов выбрать 2 вершины на левом пути есть C_l^2, на правом C_r^2, всего получается $C_l^2+C_r^2$. После того, как луночка выбрана, белые точки, которые надо включить в ко-грань, уже определены однозначно. □

Предложение 21. *Пусть n — белая вершина, соответствующая черной вершине j. Тогда, зная только числа k и $k+1$, мы уже можем сказать, в каких луночках лежит n. А именно, она лежит во всем многоугольнике, в любой луночке, крайние вершины которой не совпадают с j, но среди вершин которой встречается j, в любой луночке, одна из крайних вершин которой есть j и среди вершин которой содержатся k и $k+1$ — и это все.*

Внутри $d+3$-угольника белая точка содержится по лемма 1. Если луночка — не весь $d+3$-угольник, а j не является ее крайней вершиной, то из 2 возможных луночек мы обязаны выбрать именно ту, у которой j является вершиной, т. к. $\triangle A_{j-1}A_jA_{j+1}$ содержится именно в ней. Пусть теперь j — одна из крайних вершин луночки. Разобьем $d+3$-угольник на треугольники диагоналями, выходящими из A_j. Тогда наша луночка будет целиком состоять из некоторых из этих треугольников. Тогда A_k и A_{k+1} должны быть среди вершин луночки, чтобы $\triangle A_jA_kA_{k+1}$ содержался в ней. □

Предложение 22. *Вершина n (в предыдущих обозначениях) упоминается в списке $lr+a$ раз.*

Рассмотрим произвольную ко-грань, содержащую вершины i и n. По лемме об индукции, содержать вершину j она не может — иначе, когда мы выкинем вершины j и n, у нас останутся $(D-2)+4$ вершины, для которых выполнено условие $(*)$, а значит, когда мы выкинем из них еще $d-1$ вершину, свойство Ч∩Б будет выполнено.

Итак, вершина j осталась, и теперь она является вершиной луночки. Эта луночка вновь не может совпадать со всем $d+3$-угольником, т. к. вершины i в ней нет. Кроме того, она обязана содержать вершину n. Если выбрать 2 вершины, отличные от i, то они снова однозначно определяют луночку — ее вершиной не должна быть i. Но, кроме того, ее вершиной должна быть j, поэтому 2 ее крайние вершины теперь должны находиться одна на левом пути, другая на правом. Если ни одна из этих крайних вершин не совпадает с j, то такая луночка нам заведомо подходит. Число способов так выбрать крайние вершины есть lr.

Если же j — одна из крайних вершин луночки, то среди ее вершин должны быть k и $k+1$. Значит, вторая крайняя вершина луночки должна быть на том же пути от j к i, что и k и $k+1$, кроме того, она должна идти после вершин k и $k+1$, если идти от j к i. При этом она может совпадать с последней из них, но не с вершиной i, которую мы выкинули. А число таких вершин как раз и есть a. Всего получается $lr+a$ возможных луночек, и каждая из них уже однозначно определяет, какие вершины будут выкинуты. □

Теперь все готово для доказательства теоремы:

Теорема. *Если для Т-диаграммы Гейла X^* про каждую белую точку известно, по какую сторону от каждой диагонали $d+3$-угольника она лежит (т. е. та информация, которая использовалась в определении эквивалентности по диагоналям), то комбинаторику Т-многогранника X можно однозначно восстановить, т. е. можно выяснить, какие наборы вершин образуют грани.*

Для любого Т-многогранника X комбинаторика (в смысле эквивалентности по диагоналям) его Т-диаграммы Гейла X^* ***однозначно*** *восстанавливается по комбинаторным свойствам X.*

Первая часть теоремы следует из критериев ко-грани из $d+1$ вершины (лемма 18) и более, чем $d+1$ вершины (лемма 19). Осталось найти особые ко-грани. Но для их нахождения о X^* не надо знать вообще ничего, кроме условия $(*)$: если, кроме вершин предполагаемой ко-грани, остались только белые или только черные точки, то свойство Ч∩Б заведомо не выполнено, а если осталась ровно одна черная точка, то оно не выполнено, поскольку все белые точки лежат строго внутри $d+3$-угольника. Теперь будем доказывать вторую часть теоремы.

Определение. Назовем ребро Т-многогранника *замечательным*, если оно обладает „замечательным свойством порядка $d+1$“: если к его концам добавить еще любую $d-1$ вершину (и тогда всего получится $d+1$), то все взятые вершины образуют грань.

Предложение 23. *Ребро Т-многогранника замечательное тогда и только тогда, когда на Т-диаграмме Гейла один из его концов — черная точка, а другой — соответствующая ей белая.*

Докажем сначала, что ребро, соединяющее 2 черные вершины, не может образовывать грань. Рассмотрим список ко-граней для одной из них. Другая вершина встречается в нем $C_l^2+C_r^2$ раз. Т. к. $d\geq 2$, то $l+r=d+1\geq 3$, и хотя бы одно из чисел l и r не менее 2. А тогда число сочетаний из него по 2 положительно. Ребро, соединяющее 2 белые вершины, не может быть замечательным просто потому, что все $d+1$ белые вершины образуют ко-грань по критерию (лемма 18).

Пусть теперь одна вершина черная, а другая белая, ей не соответствующая. Рассмотрим луночку, образованную всеми черными вершинами, кроме нашей. Вне ее лежит только белая вершина, соответствующая нашей черной, т. е. не второй конец ребра. Согласно критерию, выкинем все вершины, кроме вершин рассматриваемой луночки и данной белой вершины, и выкинутые вершины будут образовывать ко-грань. Среди них будут оба конца нашего ребра.

В обратную сторону утверждение следует из леммы об индукции, как это уже было проверено при доказательстве предыдущего предложения. □

Таким образом, у нас уже есть способ по комбинаторике многогранника различать пары из черной вершины и соответствующей ей белой. Пока мы не можем отличить черную вершину от белой, если эта белая вершина соответствует ровно одной черной. Но если белая вершина прилежит к стороне, то из нее выходит 2 замечательных ребра, и мы можем отличить ее от 2 черных, которым она соответствует (а такие белые вершины на диаграмме должны существовать, иначе белых вершин будет $\geq d+3$). Присвоим этим черным вершинам номера 1 и $d+3$. (Они на самом деле имеют такие номера с точностью до поворота диаграммы. Пока не важно, какой вершине мы присвоим какой номер, от этого будет потом зависеть, по или против часовой стрелки мы идем.)

Теперь рассмотрим некоторую другую черную вершину (временно назовем ее B) и соответствующую ей белую. Посмотрим на список ко-граней, содержащих известную черную вершину (1 или $d+3$). Ни в какой из них нет одновременно вершины B и соответствующей ей белой. Но, возможно, найдутся такие ко-грани, в которых нет ни вершины B, ни соответствующей ей белой вершины. Посчитаем их количество.

Для этого посмотрим сначала, сколько ко-граней из списка *не* содержат вершину B. Применим критерий ко-грани из $d+1$ вершины и увидим, что для этого необходимо и достаточно, чтобы B являлась вершиной луночки, составленной из черных вершин, не вошедших в ко-грань. При этом эта луночка не может содержать черную вершину, для которой мы создали список, значит луночка однозначно определяется своими крайними вершинами. При этом, чтобы луночка содержала вершину B, один из ее концов должен быть на левом пути, а другой — на правом. Теперь уже никаких дополнительных ограничений нет, кроме того, что 2 крайние вершины не должны совпадать, и мы получаем, что количество луночек (а значит, и ко-граней) равно $(l+1)(r+1)-1 = lr+l+r$. Мы пока не знаем чисел l и r, но знаем, что они есть, т. к. многогранник был получен из T-диаграммы Гейла

Все ко-грани, содержащие белую вершину, соответствующую B, находятся среди тех, которые не содержат вершину B, а их число равно $lr+a$. Остальные ко-грани, не содержащие вершину B — это и есть те, которые мы считали, и их число равно $l+r-a$. Число $l+r$ не зависит от диаграммы и всегда равно $d+1$ (это все черные вершины, кроме двух). Поэтому из комбинаторики многогранника мы научились находить число a. Оно пригодится нам в дальнейшем.

Теперь посмотрим, как меняется число вхождений вершины B и соответствующей ей белой вершины в список, когда мы переходим от вершины $d+3$ к вершине 1 (или наоборот). Вначале разберемся с вершиной B. Одно из чисел l и r увеличилось на 1, а другое уменьшилось (мы предполагаем, что B не совпадает с известными нам черными вершинами 1 и $d+3$). Нам не важно, в какую сторону мы переходим, нам важна только абсолютная величина изменения, поэтому будем считать, что l увеличилось, а r уменьшилось. Тогда число вхождений B в список ко-граней стало равно $C_{l+1}^2 + C_{r-1}^2 = C_l^2 + C_l^1 + C_r^2 - C_{r-1}^1 = C_l^2 + C_r^2 + l - r + 1$. То есть число вхождений B в список изменилось на число, по модулю равное $l-r+1$, то есть на число *другой четности, чем* $l-r$, *а значит и* $l+r$.

Теперь посмотрим на белую вершину, соответствующую B. Мы вновь будем считать, что l увеличилось, а r уменьшилось, поэтому слагаемое lr превратится в $(l+1)(r-1) = lr+l-r+1$, то есть изменится на $l-r+1$. Посмотрим теперь на число a. Оно не может оба раза быть равно 0, потому что иначе вершина, соответствующая B, лежала бы в $\triangle A_1A_{d+3}B$, в котором уже есть одна белая вершина, а именно прилежащая к стороне A_1A_{d+3}. Поэтому число a также изменилось на 1, вместо a появилось слагаемое $a-1$ или $a+1$, и общее изменение числа вхождений белой вершины, соответствующей B, равно $l-r+2$ или $l-r$, то есть *совпадает по четности с* $l+r$.

Итак, мы научились отличать черную вершину от белой, ей соответствующей, т. к. четность числа $l+r=d+1$ мы знаем. Теперь докажем следующее предложение:

Предложение 24. *По комбинаторным свойствам многогранника для данной черной вершины можно определить ее числа* l *и* r *(считая от вершины 1 или* $d+3$*).*

Рассмотрим сначала одну из вершин 1 и $d+3$, скажем 1. Мы уже умеем отличать вершину B от соответствующей ей белой. Возьмем эту белую и посчитаем, сколько раз она встречается в списке ко-граней. Это число равно $lr+a$, а число a мы уже умеем искать. Значит, мы знаем число lr. Т. к. $l+r=d+1$, то мы можем найти числа l и r, но мы пока не знаем, какое из них l, а какое r.

Вот теперь посчитаем, что идя от вершины $d+3$ к вершине 1, мы проходим по границе $d+3$-угольника по часовой стрелке. Тогда аналогичным образом найдем числа l и r, считая от вершины $d+3$. Теперь для вершины 1 у нас уже есть числа $l+1$ и $r-1$ (но мы вновь не знаем, какое из них $l+1$, а какое $r-1$). Но теперь, если среди второй пары чисел нашлось число из первой пары, к которому прибавлена единица, то это число из первой пары было l, а если нашлось число из первой пары, от которого была отнята единица, то это было r. (Если во второй паре нашлось и то, и другое число, то l и r совпадали, и их не надо было различать.) Значит, мы знаем числа l и r для вершины 1. Для вершины $d+3$ они равны $l+1$ и $r-1$ соответственно. □

Следствие. *Теперь мы знаем, в каком порядке идут черные вершины на границе $d+3$-угольника.* □

Осталось разобраться с белыми вершинами. С белыми вершинами, которые соответствуют некоторым черным, вообще все ясно — для них мы знаем числа a, считая от вершин 1 и $d+3$, осталось только выяснить, на левом или на правом пути лежат точки A_k и A_{k+1} из определения числа a. Но если они лежат на левом пути, то число a, посчитанное от вершины 1, будет меньше числа a, посчитанного от вершины $d+3$, и наоборот. Поэтому мы знаем числа k и $k+1$ и можем применить предл. 21. Если же белая вершина не соответствует никакой черной, то тоже можно сказать, по какую сторону от каждой диагонали $d+3$-угольника она лежит. А именно, нужно выписать список всех ко-граней из $d+1$ вершины. Согласно критерию, мы знаем, что каждой луночке соответствует ровно одна ко-грань. Возьмем интересующую нас диагональ A_iA_j, ее концы являются двумя крайними вершинами двух луночек. Внутренности этих луночек строго разделяются прямой A_iA_j, поэтому интересующая нас белая точка лежит ровно в одной из них. Возьмем ко-грань, в которой среди черных вершин будут в точности те, которые не стали вершинами одной из луночек (заранее выберем, какой). Это и будет ко-грань, соответствующая луночке. Если белая вершина входит в эту ко-грань, значит она лежит внутри выбранной луночки, т. е. по ту же сторону от A_iA_j, что и луночка, если нет, то по другую сторону.

Теорема доказана. Заметим, что мы доказали более сильное утверждение, а именно, мы смогли сказать, какая вершина X соответствует какой точке X^*, если только выбрать вершины 1 и $d+3$. И обратно, какую бы диаграмму Гейла Y^*, эквивалентную по диагоналям X^*, мы не брали бы, мы не просто получим из нее многогранник, комбинаторно эквивалентный X, а получим из нее такой многогранник Y, комбинаторная эквивалентность которого с X задается тем взаимнооднозначным соответствием, которое устанавливает эквивалентность по диагоналям диаграмм Гейла Y^* и X^*. Поэтому верно следующее утверждение:

Предложение 25. *Все автоморфизмы X^* в смысле эквивалентности по диагоналям определяются комбинаторными автоморфизмами X. И наоборот, все комбинаторные автоморфизмы X определяются автоморфизмами X^* в смысле эквивалентности по диагоналям, т. е. на самом деле группы автоморфизмов X и X^* канонически изоморфны.* □

Получилось, что многогранник является достаточно несимметричным, группа его автоморфизмов не действует на его вершинах транзитивно, например, она не может перевести вершину, соответствующую белой точке, в вершину, соответствующую черной точке. В отличие от этого, группа симметрий циклического многогранника действует на его вершинах транзитивно. Поэтому все построенные примеры не только различны между собой, но и отличаются от циклического многогранника.

Выведем еще одно важное следствие из доказанной теоремы.

Предложение 26. *Следующие 3 утверждения равносильны:*

1. Две T-диаграммы Гейла X^* и Y^* эквивалентны по диагоналям.

2. Они комбинаторно эквивалентны как диаграммы Гейла.

3. Они комбинаторно эквивалентны как множества точек на плоскости.

Если X^* и Y^* эквивалентны по диагоналям, то, по первой части теоремы, X и Y комбинаторно эквивалентны как многогранники, причем изоморфизм между ними задается взаимнооднозначным соответствием из определения комбинаторной эквивалентности X^* и Y^*. Но они смежностные, а значит наборы их вершии комбинаторно эквивалентны как множества точек. Поэтому X^* и Y^* комбинаторно эквивалентны как диаграммы Гейла, причем все с тем же взаимнооднозначным соответствием ($1 \Rightarrow 2$), а поскольку в определениии эквивалентности по диагоналям мы требовали, чтобы цвет точек сохранялся, то они комбинаторно эквивалентны и как множества

точек на плоскости ($1 \Rightarrow 3$).

Если X^* и Y^* комбинаторно эквивалентны как диаграммы Гейла, то X и Y комбинатроно эквивалентны, откуда, по второй части теоремы, X^* и Y^* эквивалентны по диагоналям, причем все с тем же соответствием ($2 \Rightarrow 1$). Следствие $3 \Rightarrow 1$ очевидно. □

6. Количество граней данной размерности, содержащих данную вершину

При доказательстве того, что по комбинаторному устройству многогранника его Т-диаграмма Гейла, строится единственным образом, мы использовали достаточно сложные инварианты, а именно то, сколько раз вершина встречается в списке ко-граней для другой вершины. Следующая теорема доказывает, что в каком-то смысле более простыми инвариантами обойтись не удастся. Одновременно она утверждает, что в каком-то смысле наши многогранники все же являются симметричными.

Теорема. *В любом Т-многограннике размерности D число граней из данного количества m вершин, содержащих данную вершину, одинаково и зависит только от D и m, но не от диаграммы и выбранной вершины. Оно совпадает с соответствующим числом для циклического многогранника.*

Ясно, что число ко-граней и граней вместе равно C^m_{D+4}, и поэтому можно считать не грани, а ко-грани. Далее, заметим, что поскольку циклический многогранник достаточно симметричен (любую вершину можно перевести в любую), то в нем число ко-граней из данного количества m вершин точно не зависит от выбранной вершины, и равно $m/(D+4)$ от общего числа ко-граней из m вершин. Это же будет верно и для всех рассматриваемых многогранников, если мы докажем, что число ко-граней не зависит от выбора вершины. Поэтому тогда останется доказать, что общее число ко-граней из m вершин в циклическом многограннике такое же, как и во всех рассматриваемых многогранниках.

Предложение 27. *Число ко-граней из $d+1$ вершины, содержащих данную вершину, равно C^2_{d+2}.*

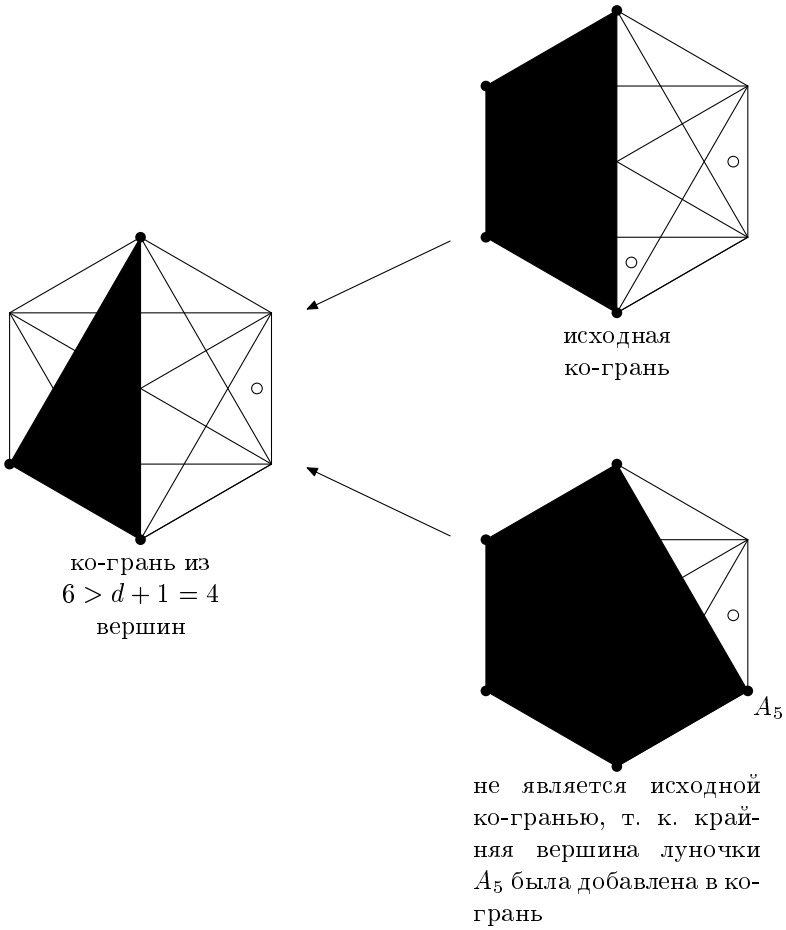
Если данная вершина черная, то луночка, соответствующая ко-грани, уже не может содержать все черные вершины. Более того, известно, какую именно черную вершину она не должна содержать. Поэтому такая луночка однозначно определяется своими крайними вершинами. Число таких луночек равно числу способов выбрать из оставшихся черных вершин 2 крайние, т. е. C^2_{d+2}.

Пусть теперь данная вершина — белая. Тогда, если провести любую диагональ или сторону $d+3$-угольника, то белая вершина будет лежать по какую-то одну сторону от нее. Поэтому из 2 луночек, для которых концы этой диагонали являются крайними вершинами, подходит ровно одна. Но теперь луночка, представляющая собой весь $d+3$-угольник, подходит, а у нее крайние вершины определяются неоднозначно. В качестве крайних для нее можно выбрать любую пару соседних вершин, т. е. она была посчитана $d+3$ раза. Поэтому надо будет вычесть $d+2$. Пару концов диагонали или стороны можно выбрать C^2_{d+3} способами, всего получается $C^2_{d+3}-(d+2) = C^2_{d+2}$. □

Следствие. *В циклическом многограннике полное число ко-граней из $d+1$ вершины такое же, как и во всех рассматриваемых многогранниках.* □

Как уже отмечалось, для построенных нами многогранников это число равно $C^2_{d+2}(D+4)/m = C^2_{d+2}(D+4)/(d+1) = (d+2)^2$. С другой стороны, применяя формулу для количества ко-граней в циклическом многограннике, не содержащих некоторые k вершин (см. введение), получаем (при $k = d+3$: $(d+2)^2 C^{k-2}_{d+1} + 2C^k_{d+2} = (d+2)^2 C^{d+1}_{d+1} + 2C^{d+3}_{d+2} = (d+2)^2$. Как уже отмечалось, это означает доказательство теоремы для $m = d+1$.

<u>Определение.</u> Ко-грань β из $d+1$ вершины назовем *исходной для данной неособой ко-грани α из более, чем $d+1$ вершины*, если α получается из β добавлением к ней некоторых вершин, кроме 2 крайних вершин луночки, соответствующей β.



Предложение 28. *Для любой неособой ко-грани α из более, чем $d+1$ вершины, существует и единственна исходная ко-грань β.*

Заметим сначала, что если хотя бы одна белая вершина не вошла в α, то в исходную ко-грань β она тоже не входила, поэтому β не может состоять только из белых вершин, и у соответствующей ей луночки крайние вершины определены однозначно.

Рассмотрим луночку, описанную в критерии неособой ко-грани из более чем $d+1$ вершины, содержащую невыкинутые белые вершины. Если в β были не выкинуты какие-то из ее вершин, кроме крайних, то либо у этой луночки все некрайние черные вершины были тогда не выкинуты, и тогда все белые вершины, содержащиеся в ней, обязаны были войти уже в β, а значит теперь там тем более не осталось не выкинутых белых вершин; либо среди ее некрайних вершин найдутся крайние вершины луночки, которая соответствовала β, т. к. вершины луночки — подряд идущие вершины $d+3$-угольника. Но тогда эти крайние вершины не были включены в β, но в α мы их включили, что противоречит определению исходной ко-грани.

Значит, все некрайние вершины луночки, внутри которой теперь содержатся белые вершины, входили в β. Крайние вершины этой луночки не могли входить в β, значит они и были крайними для соответствующей ей луночки. (Но эта луночка, хотя и имеет те же крайние вершины, не совпадает с той, которую мы рассматривали изначально, т. к. чтобы получить ее вершины, надо идти по границе $d+3$-угольника в другую сторону.)

Теперь докажем, что ко-грань из $d+1$ вершины β с такой соответствующей ей луночкой действительно является исходной для α. Действительно, все белые вершины из внутренности этой луночки входят в α, равно как и черные вершины, не лежащие на ее границе. Поэтому, чтобы получить из исходной ко-грани β новую ко-грань α, нам надо будет только добавлять к ней вершины. Крайние вершины этой луночки не входят в исходную ко-грань, поэтому добавлять мы их не будем. □

Далее мы будем в основном рассматривать не ко-грани, *содержащие данную вершину*, а ко-грани, *не содержащие данную вершину*. Также мы будем предполагать, что в ко-грань входит не более D вершин (иначе грань с таким количеством вершин имела размерность не менее D, т. е. совпадала бы со всем многогранником или вообще не существовала бы).

Предложение 29. *Число ко-граней, не содержащих $k\,(3 < k < d+3)$ вершин (из $D+4$) и не содержащих данную* ***черную*** *вершину, зависит только от k и D, но не от диаграммы (удовлетворяющей, тем не менее, условию $(*)$) и выбранной вершины.*

Число ко-граней, не содержащих данную черную вершину и содержащих остальные черные, просто всегда равно C_{d+1}^{k-1} (нам нужно выбрать еще $k-1$ белых вершин, которые не войдут в ко-грань). Число ко-граней, содержащих все белые вершины, равно C_{d+2}^{k-1} (на этот раз нам надо выбирать вершины, которые не войдут в ко-грань, из черных). Для каждой неособой ко-грани рассмотрим сначала многоугольник из черных вершин, не вошедших в ко-грань. Число таких многоугольников равно числу способов выбрать из $d+2$ вершин не более $k-2$ и не менее 1 (нам нужно не более $k-2$ вершин, чтобы хотя бы одна оставшаяся вершина была белой). Каждый такой многоугольник определяет набор и порядок количеств вершин в луночках, остающихся при его выкидывании от $d+3$ угольника. Множество наборов этих луночек не зависит от того, какую черную вершину мы не включаем в ко-грань (многоугольник из черных вершин можно „повернуть“ внутри $d+3$ угольника, так чтобы одна заданная его вершина перешла в другую заданную). А если нам уже известно, какие черные вершины не войдут в ко-грань, то, чтобы ее достроить, согласно критерию надо сделать следующее: выбрать из луночек, остающихся при выкидывании многоугольника, одну, и из белых вершин, содержащихся в ней, выбрать недостающее до k количество. Число способов сделать это, не зависит от того, как именно расположены белые вершины внутри луночек — важно только, чтобы в луночке с n вершинами всегда было $n-2$ белые вершины, но это следует из условия $(*)$. □

Предложение 30. *Полное число ко-граней, не содержащих какие угодно $k < d+3$ вершин (т. е. содержащих $D+4-k$), равно*

$$(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2} + C_{d+3}^{k} + C_{d+1}^{k}.$$

Действительно, чтобы получить неособую ко-грань, нужно сначала выбрать для нее исходную ко-грань, которая определяется соответствующей ей луночкой. Из луночки, являющейся всем $d+3$ угольником, не может получиться неособая ко-грань, т. к. все белые вершины будут в нее включены. Поэтому крайние вершины этой луночки определены однозначно. Выберем из них ту, от которой по границе $d+3$-угольника надо идти к другой крайней вершине по часовой стрелке, если идти по границе луночки. Пойдем от нее по часовой стрелке. Мы можем остановиться и поставить вторую крайнюю вершину в $d+1$ месте: кроме вершины, с которой мы начали, есть еще $d+2$ вершины, но остановиться в последней мы не можем, иначе получим весь $d+3$-угольник. А исходную вершину можно выбрать $d+3$ способами, и всего получается $(d+1)(d+3)$ луночек.

Теперь из $d+3$ вершин, которые не вошли в ко-грань, нужно выбрать k, которые в нее так и не войдут. Среди этих k обязательно должны быть 2 (уже известные) крайние вершины луночки и еще какая-нибудь белая. Т. е. из $d+1$ вершины ($d+3$ без 2 крайних) нужно выбрать $k-2$, так чтобы среди них обязательно была одна белая. Просто выбрать $k-2$ вершины можно C_{d+1}^{k-2} способами. Число способов, которые нам не подходят — это число способов выбрать $k-2$ вершины только из черных. Если в луночке, кроме крайних, было еще n вершин, то таких способов C_{n}^{k-2}. Вспомним, как мы считали луночки. Число вершин в луночке зависит только от того, в какой вершине мы остановимся и поставим вторую крайнюю вершину, но не от того, с какой вершины мы начали. Поэтому для каждого из $d+1$ возможных чисел получится по $d+3$ луночки.

Итак, если у луночки было $n+2$ вершины (из них 2 — крайние), то из соответствующей ей исходной ко-грани можно получить $C_{d+1}^{k-2} - C_{n}^{k-2}$ новых. Для данного числа n существует $d+3$ луночки с $n+2$ вершинами, поэтому из ко-граней, соответствующих луночкам с данным количеством вершин $n+2$, можно получить $(d+3)(C_{d+1}^{k-2} - C_{n}^{k-2})$ новых ко-граней. Всего новых неособых

ко-граней получится

$$\sum_{n=0}^{d}\left((d+3)\left(C_{d+1}^{k-2}-C_{n}^{k-2}\right)\right)=$$
$$=(d+3)\left((d+1)C_{d+1}^{k-2}-\sum_{n=0}^{d}C_{n}^{k-2}\right)=(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}-(d+3)C_{d+1}^{k-1}.$$

Теперь посчитаем особые ко-грани. Если среди k вершин нет белых, то число способов их выбрать (из только черных) есть C_{d+3}^{k}. Если среди k вершин есть ровно одна черная, то белые там должны быть (т. к. $k>3$), и поэтому достаточно выбрать $k-1$ вершину из $d+1$ белых и еще 1 черную, что можно сделать $(d+3)C_{d+1}^{k-1}$ способами. Наконец, если черных вершин нет, то надо просто выбрать k вершин из $d+1$ белых C_{d+1}^{k} способами. Всего получаем $(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}-(d+3)C_{d+1}^{k-1}+C_{d+3}^{k}+(d+3)C_{d+1}^{k-1}+C_{d+1}^{k}=(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}+C_{d+3}^{k}+C_{d+1}^{k}$ ко-граней (уже и особых, и неособых). □

Предложение 31. *Число ко-граней, не содержащих k ($3<k<d+3$) вершин (из $D+4$) и не содержащих данную белую вершину, равно*

$$C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1}.$$

Посчитаем сначала неособые ко-грани. Рассмотрим для каждой из них исходную ко-грань. Луночка, ей соответствующая, снова не может быть всем $d+3$-угольником. Рассмотрим ее крайние вершины. Белая точка должна лежать по другую сторону от прямой, их соединяющей, чем луночка. Поэтому из 2 луночек с данными крайними вершинами нам подходит ровно одна. (Эти 2 крайние вершины могут оказаться и соседними, тогда луночка будет отрезком между ними.) То есть у нас получилось C_{d+3}^{2} исходных ко-граней. В каждую из них не входит $d+3$ вершины, из них нам надо выбрать k. Мы уже знаем 3 вершины, которые заведомо не войдут в ко-грань: 2 крайние вершины выбранной луночки и та белая, которая не входит по условию. Из остальных d вершин можно выбрать $k-3$ произвольным образом, т. к. одна белая вершина уже точно не войдет в ко-грань. Число неособых ко-граней равно $C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}$. Число ко-граней, в которые не входит ровно одна черная вершина, равно $(d+3)C_{d}^{k-2}$ (надо выбрать эту черную вершину $d+3$ способами и $k-1$ из $d+1$ белой, но одну белую вершину, не входящую в ко-грань, мы уже знаем, поэтому получается C_{d}^{k-2}. А число ко-граней, в которые не входят только белые вершины, равно C_{d}^{k-1} (одну белую вершину, которая не входит в ко-грань, мы уже знаем). Всего получилось $C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1}$ ко-граней. □

Замечание 32. *Для любых $k\geq 0$ и $d\geq 0$ выполнены равенства*

$$k\left((d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}+C_{d+3}^{k}+C_{d+1}^{k}\right)=(2d+4)\left(C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1}\right)$$

и

$$(d+2)^{2}C_{d+1}^{k-2}+2C_{d+2}^{k}=(d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}+C_{d+3}^{k}+C_{d+1}^{k}.$$

Первое равенство можно легко доказать по индукции, а второе — прямым вычислением. Эти вычисления опустим. □

Теперь для каждой ко-грани, в которую не входит k вершин, выпишем эти k вершин. Тогда каждое число будет написано столько раз, сколько существует ко-граней, в которые данная вершина не входит. Всего мы выпишем в k раз больше чисел, чем имеется ко-граней из $D+4-k$ вершин, т. е. $k((d+3)(d+1)C_{d+1}^{k-2}+C_{d+3}^{k}+C_{d+1}^{k})$. По первому равенству из зам. 32 это число равно $(2d+4)(C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1})$. Т. к. каждая белая вершина не входит в $C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1}$ ко-граней, то всего белые вершины упоминаются в нашем списке $(d+1)(C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1})$ раз. Значит, все черные вершины упоминаются в списке $(d+3)(C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1})$ раз, а т. к. каждая из $d+3$ черных вершин упоминается одинаковое число раз (предл. 29), то это число равно $C_{d+3}^{2}C_{d}^{k-3}+(d+3)C_{d}^{k-2}+C_{d}^{k-1}$, т. е. совпадает с числом ко-граней, в которые не входит данная белая вершина.

Значит, число ко-граней любого Т-многогранника, в которые не входят k вершин (из $D+4$), и в которые при этом не входит данная конкретная вершина (уже не важно, белая или черная), зависит только от D и k, но не от диаграммы и от выбранной вершины.

Полное число ко-граней в циклическом многограннике, в которые не входят произвольные k вершин, такое же, как и в построенных нам многогранниках (второе равенство зам. 32). Значит, в них и число ко-граней, в которые не входят k вершин, включая данную конкретную, такое же, как и в Т-многогранниках и зависит только от D и k. Осталось заметить, что число ко-граней из $D+4-k$ вершин, в которые данная вершина все-таки входит, равно числу всех ко-граней из $D+4-k$ вершин минус число тех ко-граней, в которые эта вершина не входит, то есть зависит только от D и k. Теорема доказана.

Литература

[1] Zeigler, Lectures on polytopes

[2] Grünbaum

[3] McMullen, 1970

[4] I. Shemer, Techniques for investigating neighborly polytopes, Convexity and graph theory, Proc. Conf. Israel 1981, Ann. Diskr. Math. 20, 283–292 (1984)

E-mail: `deviatov1@rambler.ru`