Полиэдральная теорема Пуанкаре

Саша Ананьин

ZOOMerFEST, лаборатория Ф.А. Богомолова

14 июня 2020

Стандартная часть ПТП

Пусть M — локально линейно связное односвязное метрическое пространство и пусть $M \supset P$ — локально линейно связное и связное подпространство, называемое в дальнейшем полиэдром, и совпадающее с замыканием своей внутренности, то есть $P = \overline{\operatorname{Int} P}$. Пусть нам даны

- разложение $\partial P = \bigcup\limits_{s \in S} s$ границы $\partial P := P \setminus \operatorname{Int} P$ полиэдра P в объединение непустых линейно связных подпространств, именуемых далее гранями;
- спаривающая инволюция $\overline{} : S \to S$;
- семейство изометрий склеивающих грани $I_s \in \operatorname{Isom} M$ такое, что $I_s s = \overline{s}$ и $I_{\overline{s}} = I_s^{-1}$ для всех $s \in S$.

Обозначим через G группу порожденную всеми склеивающими изометриями. Покажем, что при некоторых разумных условиях M замощается G-копиями полиэдра P, то есть M склеено из копий gP, $g \in G$, полиэдра P, причем единственные отождествления между точками этих копий — это те, что индуцированны склеивающими изометриями. Более формально:

На пространстве $G \times P$, где группа G (с дискретной топологией) действует слева очевидным образом, определим отношение эквивалентности $\sim$, порожденное отношением $(gI_s, p) \sim (g, I_s p)$, где $p \in s \in S$ и $g \in G$. Очевидно,

• группа G действует на фактор-пространстве $J := G \times P/ \sim$,
• непрерывное отображение $\pi : G \times P \to J$ G-эквивариантно,
• пространство J замощается копиями $g[P]$, $g \in G$, внутренности $g[\mathrm{Int}\, P]$ которых дизъюнктны (стало быть, G действует дискретно на J),
• причем непрерывное G-эквивариантное отображение $\psi : G \times P \to M$, $\psi : (g, p) \mapsto gp$, пропускается через непрерывное G-эквивариантное отображение $\varphi : J \to M$.

Мы хотим наложить неотяготительные и легко проверяемые условия, позволяющие заключить, что φ — гомеоморфизм.
Жизнь будет невыносимо сложна без условия конечности, которое весьма кстати является необходимым, если мы намереваемся строить компактный орбифолд (многообразие).
[Здесь начинается совместная работа с Carlos Henrique Grossi Ferreira.]

Условие конечности. Мы требуем, чтобы классы эквивалентности $\sim$ были конечны. Иными словами, для любой точки $p \in P$ является конечным множество $\pi^{-1}[1,p] = \big\{(g_1,p_1),(g_2,p_2),\dots,(g_n,p_n)\big\}$. При этом полиэдры $g_jP \subset M$, $1 \leqslant j \leqslant n$, называются формальными соседями полиэдра P в точке $p \in P$.

Условие локального замощения формальными соседями. Мы требуем, чтобы малая окрестность произвольной точки $p \in P$ замощалась формальными соседями. Это означает, что $\varphi W_{p,\delta} = B(p;\delta)$ и $\pi^{-1}W_{p,\delta} = N_{p,\delta}$ для всех достаточно малых $\delta > 0$, где $\pi^{-1}[1,p] = \big\{(g_1,p_1),\dots,(g_n,p_n)\big\}$, $N_{p,\delta} := \bigcup_{j=1}^{n}\big(g_j, P \cap B(p_j;\delta)\big) \subset G \times P$ и $W_{p,\delta} := \pi N_{p,\delta}$.

Условие замощения метрической окрестности полиэдра. На подходящем $\bigcup_{p\in P} W_{p,\delta_p}$ отображение φ инъективно, и его образ содержит некоторую метрическую окрестность полиэдра P в пространстве M.

Вторая половина последнего условия призваня контролировать поведение полиэдра P "на бесконечности". Она выполнена автоматически, если полиэдр компактен.

Упражнение. Докажите, что φ — неразветвленное накрытие.

Исторические комментарии. Удивительным образом адекватное изложение стандартной часть ПТП до сих пор не встречается в учебниках по гиперболической геометрии (таких как A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, GTM **91**, Springer-Verlag, New York, 1983, xii+337 pp. или B. Maskit, *Kleinian Groups*, Grundlehren der mathematichen Wissenschaften **287**, Springer-Verlag, 1988, xiii+326 pp.), хотя все идеи давно известны. Вместо приведенной версии некоторые авторы пытаются доказывать полноту метрики на пространстве J, индуцированной с полиэдра P (a posteriori верное утверждение, если метрика на M полна). Такая задача часто не проста сама по себе. Другие, даже такие, как Мостов, старательно доказывают, что все формальные соседи ведут себя подобающим образом, то есть пересекаются по ожидаемым граням. В случае отрицательной, но непостоянной кривизны это тоже крайне утомительная задача.

Мы вскоре обнаружим, что можно придумать версию ПТП апеллирующую почти исключительно к инфинитезимальным, легко проверяемым условиям.