Скелет Лиувиллева многообразия

Ваня Яковлев
матфак ВШЭ

26 Апреля, 2020

План доклада

1. Введение в геометрию Лиувиллевых многообразий
   - 1.Точные симплектические многообразия
   - 2. Лиувиллевы многообразия
   - 3. Морфизмы Лиувиллевых многообразий
   - 4. Конструкции Лиувиллевых многообразий
   - 5. Доказательство теоремы стабильности
2. Некоторые новые результаты
   - 6. Вайнштейновы многообразия
   - 7. Скелет Лиувиллева многообразия
   - 8. Теоремы гибкости
   - 9. Свойства Вайнштейновых многообразий
   - 10. Существование Вайнштейновых структур

1.Точные симплектические многообразия

Определение

Рассмотрим некомпактное симплектическое многообразие (V, ω), $dim V = 2n$. Тогда

- $X \in \mathcal{X}(V)$ *называется* **Лиувиллевым векторным полем** *для* ω*, если* $\mathcal{L}_X\omega = \omega$;
- $\lambda \in \Omega^1(V)$ *называется* **Лиувиллевой формой** *для* ω*, если выполнено* $d\lambda = \omega$.

Подстановка $\iota.\omega$ *задает биекцию между Лиувиллевыми векторными полями и 1-формами.*

Определение

Точным симплектическим многообразием *называется* $\mathbb{V} = (V, \omega, \lambda, X)$*, где*

$$\omega = d\lambda,\ \iota_X\omega = \lambda.$$

Очевидно, точное симплектическое многообразие (V, ω, λ, X) *описывается* $\lambda \in \Omega^1(V)$.
Точный симплектоморфизм $\mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$*, это диффеоморфизм* $\phi : V_1 \to V_2$*, для которого*

$$\exists f \in \mathcal{C}^\infty(V_1) :\ \phi^*\lambda_2 = \lambda_1 + df.$$

Замечание

Поток гамильтонова поля X_H *функции* H *на* $\mathbb{V}$ *лежит в точных симплектоморфизмах:*

$$\mathcal{L}_{X_H}(\lambda) = \iota_{X_H}\omega + d\iota_{X_H}\lambda = d(H + \iota_{X_H}\lambda) \Rightarrow \phi^*_{t_0}(\lambda) = \lambda + d\int_0^{t_0}(H + \iota_{X_H}\lambda)dt.$$

Пример (Два модельных примера)

Формы $\lambda_1 = \frac{1}{2}\Sigma_i x_i dy_i - y_i dx_i$ *и* $\lambda_2 = \Sigma_i x_i dy_i$ *Лиувиллевы на симплектическом пространстве*

$$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = \Sigma_i dx_i \wedge dy_i, \lambda_i, X_i)$$

Пример (Штейново многообразие $\mathbb{M} := (M, -dd^{\mathbb{C}}\phi, -d^{\mathbb{C}}\phi, \nabla_\rho)$)

На замкнутом подмногообразии $M \subset \mathbb{C}^n$ *задана плюрисубгармоническая функция*

$$\phi := |z|^2|_M \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \forall m \in M,\ \forall v \in T_m V,\ \ -dd^{\mathbb{C}}\phi_z(v, Jv) > 0,$$

Лиувиллево поле для $-d^{\mathbb{C}}\phi$ *совпадает с градиентом* ∇_ρ *относительно метрики* $\rho = \omega(J\cdot, \cdot)$.

Пример (Кокасательное пространство $\mathbb{T}^*\mathbb{Q} := (T^*Q, d\theta, \theta, E)$)

Пусть Q *- замкнутое многообразие. На* T^*Q *определена каноническая 1-форма* θ*:*

$$\forall x \in Q,\ v \in T^*_x Q,\ l \in T_{(x,v)}(T^*Q),\ \ \theta_{(x,v)}(l) := \pi^* v_{(x,v)}(l) = \langle D\pi_{(x,v)}(l), v\rangle.$$

Форма $d\theta$ *невырождена.* $E_{(x,v)} = (i_x)_* v$ *Лиувиллево, где* $i_x : T^*_x Q \to T^*Q$ *вложение слоя.*

Выпуклые гиперповерхности

Определение

Ориентированная гиперповерхность $N \subset M$ в точном симплектическом многообразии (M, ω, λ, X) называется **ω-выпуклой**, *если X определяет положительное сечение η_N.*

Определение

Контактная форма *на многообразии N размерности $2n-1$ это $\alpha \in \Omega^1(N)$, такая что*

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n-1} > 0.$$

Контактная структура *на N это подрасслоение $\xi \subset TN$ ядер контактной формы $\xi = \ker \alpha$.*

Замечание

Гиперповерхность $N \subset M$ ω-выпуклая тогда и только тогда, когда $\lambda|_N$ - контактная форма.

Пример

Следующие гиперповерхности являются ω-выпуклыми гиперповерхностями:

- *регулярные гиперповерхности уровня $\phi^{-1}(t)$ плюрисубгармонической функции в $\mathbb{M}$;*
- *множество векторов заданной длины в $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ относительно римановой метрики ρ на Q:*

$$D^*_\epsilon Q := \{v \in T^*_x Q | \epsilon = ||v||_\rho\}.$$

2.Лиувиллевы многообразия

Определение

$\mathbb{W} = (W, \partial W, \omega, \lambda, X)$ *называется* **Лиувиллевой областью** *размерности* $dim_{\mathbb{R}} V = 2n$, *если*

- $(W, \partial W)$ *- компактное многообразие с краем,* $W^0 := W - \partial W$;
- $\omega \in \Omega^2(W)$, $\lambda \in \Omega^1(W)$, $X \in \mathcal{X}(W)$ *- тензоры на* W;
- $(W^0, \omega|_{W^0}, \lambda|_{W^0}, X|_{W^0})$ *- точное симплектическое многообразие;*
- *гиперповерхность* ∂W *с естественной ориентацией* ω*-выпуклая.*

Определение

Точное симплектическое многообразие (V, ω, λ, X) *на котором поле* X *полно называется* **Лиувиллевым многообразием** *если существует исчерпание* V *подобластями:*

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i, \;\; W_i \subset W_{i+1}, \;\; \partial W_i \;\; \omega\text{-выпуклы}.$$

Пример

Точные симплектические многообразия $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ *являются Лиувиллевыми многообразиями.*

Конструкция

Для пары Лиувиллевых многообразий $\mathbb{V}_i$ $i \in \{1, 2\}$ *определено произведение* $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2$.

Многообразия конечного типа

Определение

$\mathbb{V} = (V, \omega, \lambda, X)$ *имеет* **конечный тип**, *если все нули* X *лежат в некоторой подобласти*

$$W \subset V, \ X|_{V-W} \neq 0.$$

Конструкция

Рассмотрим Лиувиллеву область $\mathbb{W} = (W, \partial W, \omega, \lambda, X)$. *Поток* X *задает диффеоморфизм*

$$\Phi = (\phi_t, t) : (\partial W \times \mathbb{R}_-, d(e^t\alpha), e^t\alpha, \frac{\partial}{\partial t}) \to (Op(\partial W), \omega, \lambda, X).$$

Используя эту тривиализацию, продолжим (ω, λ, X) *на некомпактное многообразие*

$$\widehat{W} := W \cup_{\partial W} \partial W \times [0, +\infty), \ (\omega, \lambda, X)|_{\partial W \times \mathbb{R}} = (d(e^t\alpha), e^t\alpha, \frac{\partial}{\partial t}).$$

Лиувиллево многообразие конечного типа $\widehat{\mathbb{W}}$ *называется* **пополнением** *области* $\mathbb{W}$.

Замечание

Лиувиллево многообразие $\mathbb{V}$ *конечного типа допускает диффеоморфизм* $\phi : V \to \widehat{W}$ *на пополнение некоторой Лиувиллевой области* $\mathbb{W}$, *сохраняющий все данные* $\mathbb{V} = \phi^* \widehat{\mathbb{W}}$.

Граница на бесконечности

Определение

Границей на бесконечности *Лиувиллева многообразия конечного типа* $\mathbb{V} \approx \widehat{\mathbb{W}}$ *называется*

$$\partial_\infty \mathbb{V} := (\partial W, \xi := \lambda|_{\partial W}), \ \mathbb{W} = (W, \partial W, \omega, \lambda, X).$$

Окрестностью бесконечности $\mathbb{V}$ *называется* X*-инвариантное дополнение* $\widehat{W} - W$.

Определение

Контактоморизм *контактных многообразий* $\mathbb{N}_i = (N_i, \xi_i)$ $i \in \{1, 2\}$, *это диффеоморфизм*

$$\phi : N_1 \to N_2 | \ \phi^* \xi_2 = \xi_1.$$

Замечание

Поток X *определяет диффеоморфизм произвольной окрестности бесконечности* $\mathbb{V}$ *на*

$$(\widehat{W} - W, \omega, \lambda, X) \to (\partial W \times \mathbb{R}, d(e^t \lambda), e^t \lambda, \frac{\partial}{\partial t})$$

сохраняющий Лиувиллеву форму и векторное поле. В частности, граница на бесконечности $\partial_\infty \mathbb{V}$ *не зависит от выбора Лиувиллевой области* $\mathbb{W}$ *с точностью до контактоморфизма.*

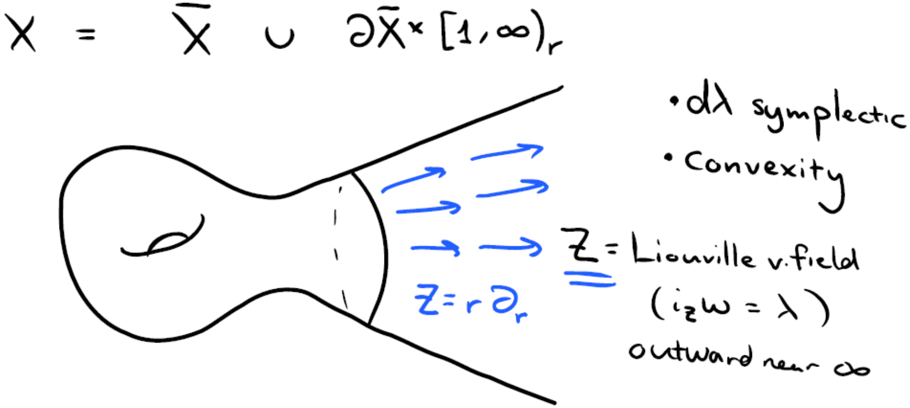


Рис.: На картинке из лекции Ганатры изображена двумерная Лиувиллева область $\overline{X}$. Граница на бесконечности $\partial_\infty \overline{X}$ это окружность, приклеиванием цилиндра к которой получается пополнение X. На окрестности бесконечности $\partial_\infty \overline{X} \times \mathbb{R}_t$ рассматривается координата $r = e^t$, в которой

$$Z|_{\partial_\infty \overline{X} \times \mathbb{R}_t} = \frac{\partial}{\partial t} = r\frac{\partial}{\partial r}.$$

3.Морфизмы Лиувиллевых многообразий

Предложение

Произвольный симплектоморфизм ϕ Лиувиллева многообразия $\mathbb{V} = \widehat{\mathbb{W}}$ конечного типа

$$\mathbb{W} = (W, \partial W, \omega, \lambda, X)$$

можно соединить некоторой диффеотопией внутри группы симплектоморфизмов с точным.

Доказательство.

Форма $\theta = \lambda - \phi^*\lambda$ точна, следовательно ограничивается на окрестность бесконечности как

$$\theta|_{\partial W \times \mathbb{R}} = \pi^*\beta + dF, \text{ где } \beta \in \Omega^1(\partial W), \; F \in \mathcal{C}^\infty(\partial W \times \mathbb{R}_+), \; \pi : \partial W \times \mathbb{R}_+ \to \partial W.$$

Для $\rho \in \mathcal{C}^\infty(V)$ такого, что $\rho|_W = 0$, $\rho|_{\partial W \times [1,+\infty)} = 1$ рассмотрим $\eta \in \Omega^1(V)$ и $Y \in \mathcal{X}(V)$:

$$G := \rho F, \; \eta := \theta - dG \; (\Rightarrow \eta|_{\partial W \times [1,+\infty)} = \pi^*\beta),$$

$$\iota_Y \omega = \eta \; (\Rightarrow Y|_{\partial W \times [1,+\infty)} \; X - \text{ инвариантно}).$$

Поток h_t поля Y определен и задает искомую диффеотопию $\psi_t := h_t \circ \phi$ так как выполнено

$$\mathcal{L}_Y \eta = 0 \Rightarrow h_t^*(\eta) = \eta; \; \mathcal{L}_Y \lambda = \eta + d\iota_Y \lambda \Rightarrow h_t^*(\lambda) = \lambda + t\eta + d\int_0^t h_t^*(\iota_Y \lambda) dt.$$

$$\psi_t^*(\lambda) = h_t^*(\phi^*\lambda) = h_t^*(\lambda - \theta) = h_t^*(\lambda - \eta - dG) = \lambda + (t-1)\eta + d(H_t).$$

Точные симплектоморфизмы не сохраняют $\partial_\infty \mathbb{V}$

Предложение (Курт)

Рассмотрим многообразия N_i $i = 1, 2$, $\dim N_i \geq 5$ такие, что существует диффеоморфизм

$$\phi : N_1 \times \mathbb{R} \to N_2 \times \mathbb{R}.$$

Тогда для произвольной контактной формы α_1 на N_1 найдется контактная форма α_2 на N_2 и симплектоморфизм ассоциированных многообразий: $(N_1 \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha)) \to (N_2 \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha))$.

Замечание

Рассмотрим сферизацию касательного расслоения линзового пространства

$$M(p, q) = S^2 \times L(p, q)$$

Тогда $N_1 = M(7, 1)$ и $N_2 = M(7, 2)$ удовлетворяют условиям теоремы и допускают контактные структуры (как S^*Q). При этом многообразия N_i не диффеоморфны.

Следствие

Существуют Лиувиллевы многообразия конечного типа $\mathbb{V}_i$ и (точный) симплектоморфизм

$$\phi : V_1 \to V_2,$$

такие, что их границы на бесконечности $\partial_\infty \mathbb{V}_i$ даже не диффеоморфны друг другу.

Деформационная эквивалентность

Определение

Изоморфизм *Лиувиллевых многообразий конечного типа* $\mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ *это диффеоморфизм*

$$\phi : V_1 \to V_2 | \ \exists f \in \mathcal{C}^\infty_{cs}(V_1) : \ \phi^* \lambda_2 = \lambda_1 + df.$$

Замечание

Изоморфизм $\mathbb{V}_i$ *индуцирует контактоморфизм границ на бесконечности* $\partial_\infty \mathbb{V}_i$.

Определение

Гомотопия *Лиувиллевых областей на многообразии* $(W, \partial W)$ *это гладкое семейство*

$$\mathbb{W}_t = (W, \partial W, \omega_t, \lambda_t, X_t), \ \ t \in [0,1]$$

Лиувиллевы области $\mathbb{W}_i$ **деформационно эквивалентны**, *если существует гомотопия*

$$\mathbb{W}_0 \sim \phi^* \mathbb{W}_1, \text{ где } \phi \in \mathit{Diff}((W_0, \partial W_0), (W_1, \partial W_1)).$$

Предложение (Теорема стабильности для Лиувиллевых областей)

Пополнения деформационно эквивалентных Лиувиллевых областей изоморфны.

4. Конструкции Лиувиллевых многообразий

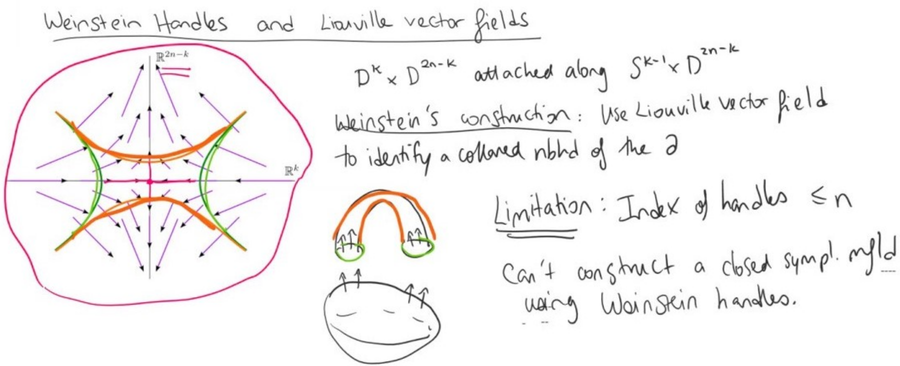


Рис.: На скриншоте из zoom-лекции Старкстон изображено Лиувиллево векторное поле на стандартной симплектической k-ручке размерности $2n$, $k \geq n$. Вайнштейн построил координаты на окрестности изотропной сферы на границе Лиувиллевой области, в которых Лиувиллева форма имеет стандартный вид. Это определяет приклеивание k ручки по изотропной сфере в категории Лиувиллевых областей. Результат не зависит от выбора координат по теореме стабильности.

Определение

Симплектическое расслоение *над Лиувиллевым многообразием конечного типа* $\mathbb{V}$ *это*

$$\pi : (E, \omega) \to V$$

Sp-расслоение, ограничение которого $(E, \omega)|_{\partial W \times \mathbb{R}}$ *инвариантно относительно потока* X.

Конструкция

Зафиксируем комплексную структуру и унитарную связность (J, ∇) *на* E*, такую, что* $(J, \nabla)|_{\partial W \times \mathbb{R}}$ X*-инвариантно. Лиувиллева форма на слоях* $E_x \approx \mathbb{C}^n$ *определяет функционал*

$$\lambda_E \in \Gamma((\pi^* E)^*, E).$$

Компонируя λ_E *с морфизмом* $TE \to \pi^* E$*, определенным* ∇*, получаем форму* $\beta_E \in \Omega^1(E)$.

Предложение (Авдек)

На некоторой открытой окрестности нулевого сечений $V \subset Op(V) \subset E$ *задана структура Лиувиллева многообразия конечного типа* $E_{\mathbb{V}}$ *с Лиувиллевой формой*

$$\pi^* \lambda + \beta_E$$

По теореме стабильности, полученное многообразие $E_{\mathbb{V}}$ *не зависит от выбора* J*,* ∇ *и* $Op(V)$.

Нормальная форма изотропного подмногообразия

Конструкция

Рассмотрим контактное многообразие $(N, \xi = \ker\alpha)$ *и изотропное подмногообразие* $K \subset N$:

$$T_K \subset \xi \Leftrightarrow T_K \subset \xi,\ T_K \subset T_K^{\perp d\alpha}.$$

Конформно-симплектическое нормальное расслоение *это* $CSN(K) := T_K^{\perp d\alpha}/T_K$.

$$\eta_{N/K} = T_N/T_K \approx (T_N/\xi) \oplus (\xi/T_K^{\perp d\alpha}) \oplus CSN(K) \approx \langle R_\alpha \rangle \oplus T_K \oplus CSN(K).$$

$CSN(K)$ *поднимается до симплектического расслоения на Лиувиллевом многообразии* $\mathbb{T}^*\mathbb{N}$.

Предложение (Вайнштейн)

Существует контактоморфизм между $(CSN(K)_{\mathbb{T}^*\mathbb{N}} \times \mathbb{R}, \ker(\lambda + dx))$ *и* $(Op(K), \xi|_{Op(K)})$.

Идея доказательства.

Расщепление $\eta_{N/K}$ *и теорема о трубчатой окрестности устанавливает диффеоморфизм этих многообразий, сохраняющий поля Риба. Контактные структуры индуцируют точные симплектические структуры на* $CSN(K)_{\mathbb{T}^*\mathbb{N}}$ *и структуры Лиувиллева многообразия после уменьшения* $Op(K)$. *Их изоморфность влечет теорема стабильности, т.к. из равенства тензоров на* N *следует существование линейная гомотопии на достаточно малой* $Op(K)$. $\square$

Приклеивание ручки и контактная хирургии

Определение

Симплектической *k*-**ручкой размерности** $2n$ *называется подмногообразие с углами* $H^k(\epsilon)$ *в* $\mathbb{C}^n$ *со стандартной симплектической формой и Лиувилеввым полем, заданное*

$$H^k = D^k(1+\epsilon) \times D^{2n-k}(\epsilon) = \{\Sigma_{j=1}^k x_j^2 \leq (1+\epsilon),\ \Sigma_{j=1}^k y_i^2 + \Sigma_{j=k+1}^n |z_j|^2 \leq \epsilon^2\}.$$

$$X_{st} = \Sigma_{i=1}^k (x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j \frac{\partial}{\partial y_j}) + \frac{1}{2}\Sigma_{j=k+1}^k (x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + y_j \frac{\partial}{\partial y_j}).$$

Корневым диском называется $\mathbb{D} = \mathbb{D}^k_{1+\epsilon} \times \{0\}$, *корневой сферой называется его граница* $\mathbb{S} = \partial\mathbb{D} = S^{k-1} \times \{0\}$, *нижней компонентой границы называется* $\partial^- H^k_\epsilon = \partial(\mathbb{D}^k_{1+\epsilon}) \times \mathbb{D}^{2n-k}_\epsilon$.

Конструкция

Рассмотрим Лиувиллеву область $\mathbb{W}$, *и изотропную сферу* $N \subset \partial W$ *с тривализованным CSN. Существует диффеоморфизм* $\psi : Op_{\partial W}(N) \to \partial^- H^k_\epsilon$, *переводящей* $N \to \mathbb{S}$ *и сохраняющий Лиувиллеву форму. Тогда определена структура Лиувиллевой области на многообразии* $W \cup_{\partial^- H^k_\epsilon} H^k_\epsilon$, *которая не зависит от выбора открытой окрестности, диффеоморфизма* ψ *и изотопии вложения сферы в классе изотропный вложений.*

Определение

$\mathbb{W}_N$ *называется* **приклеиванием ручки** *к* $\mathbb{W}$, *а* $\partial\mathbb{W}_N$ **контактной хирургией** $\partial\mathbb{W}$ *по* N.

Приклеивание ручки к двумерной области

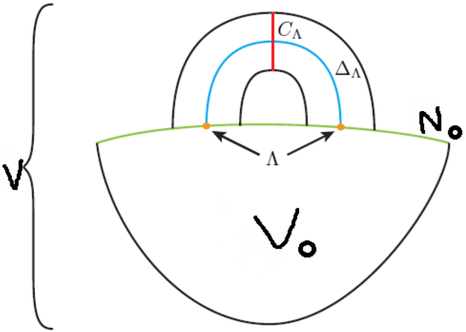


Рис.: На иллюстрации из статью Экхольма-Лекили изображена двумерная Лиувиллева область $\mathbb{V}_0$ с контактной границей $N = \partial V_0$, в котором зафиксирована изотропная сфера Λ. Лиувиллева область $\mathbb{V}$ получается приклеиванием двумерной 1-ручки с корневой сферой Λ. Δ_Λ это корневой диск, C_Λ называется кокорневым диском. Это лагранжево подмногообразие V, если сфера Λ лежандрова.

5. Доказательство теоремы стабильности

Предложение (Грей)

Для гладкого семейства ξ_t контактных структур на компактном многообразии N найдется диффеотопия $\phi_t \in Diff(N)$ и гладкое семейство функций $h_t \in \mathcal{C}^\infty(N)$, такое что $\phi_t^* \xi_t = \xi_0$.

Доказательство.

Построим поток ϕ_t как поток диффеоморфизмов семейства векторных полей X_t. Очевидно

$$\phi_t^*(\alpha_t) = e^{h_t}\alpha_0 \Leftrightarrow \phi_t^*(\dot{\alpha_t} + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*(\alpha_t)) = e^{h_t} h_t^{'}\alpha_0.$$

Подставляя в правую часть исходное равенство и производя обратимые замены $g_t = h_t^{'}$ и $f_t = \phi_{-t} \circ g_t$ получаем, что достаточно найти семейства X_t и f_t, для которых выполнено

$$\phi_t^*(\dot{\alpha_t} + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = h_t^{'}\phi_t^*\alpha_t \Leftrightarrow \phi_t^*(\dot{\alpha_t} + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = g_t\phi_t^*\alpha_t \Leftrightarrow \dot{\alpha_t} + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t - f_t\alpha_t = 0.\ (*)$$

Обозначим левую часть последнего уравнения за $\beta(f_t, X_t)$. Рассмотрим семейства полей:

$$R_t, X_t \in \mathcal{X}(V):\ \iota_{R_t}\alpha_t = 1,\ \iota_{R_t} d\alpha_t = 0;\ \iota_{X_t}(d\alpha_t) = -\dot{\alpha_t}|_{ker\alpha_t}\ , X_t \in ker(\alpha_t).$$

Их существование следует из $\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^{n-1} > 0$. $(f_t := \iota_{R_t}\dot{\alpha_t}, X_t)$ удовлетворяет $(*)$ так как:

$$\beta(f_t, X_t) = \dot{\alpha_t} - \dot{\alpha_t}|_{ker\alpha_t} - f_t\alpha_t \Rightarrow \beta(f_t, X_t)|_{ker\alpha_t} = 0, \iota_{R_t}(\beta(f_t, X_t)) = 0 \Rightarrow \beta(f_t, X_t) = 0.$$

□

Теорема стабильности - начало доказательства

Доказательство.

Рассмотрим гомотопию Лиувиллевых областей $\mathbb{W}_l$ и семейство пополнений

$$\widehat{\mathbb{W}}_l = \mathbb{V}_l = (V, \omega_l, \lambda_l, X_l).$$

Гиперповерхность $N := \partial W \times \{0\} \subset V$ ω_l-выпукла $\forall l$, следовательно задано семейство

$$\alpha_l := \lambda_l|_N \in \Omega^1(N, \mathbb{R}).$$

контактных форм. По теореме Грея, существует $\psi_l \in Diff(N)$ и $h_l \in \mathcal{C}^\infty(N)$ такие, что

$$\psi_l^* \alpha_l = e^{h_l} \alpha_0.$$

Обозначим за δ_l^t - поток поля X_l за время t и рассмотрим семейство вложений, заданное

$$F_l := \delta_l^{-h_l \circ \psi_{-l}} \circ \psi_l : N \to V, \;\; F_l(x) = (\psi_l(x), -h_l(x)) \in \partial W \times \mathbb{R}_{t_l}$$

Продолжим F_l до такого потока диффеоморфизмов $G_l \in Diff(V)$, что

$$G_l|_{V - \partial W \times (-\epsilon, +\epsilon)} = Id, \;\; G_l|_N = F_l;$$

Заметим, что для $G_l^* \widehat{\mathbb{W}}_l$ индуцированное семейство контактных форм на N постоянно

$$G_l^*(\lambda_l)|_N = \psi_l^*((\delta_l^{-h_t \circ \psi_{-t}})^* \lambda_l) = \psi_l^*(e^{-h_l \circ \psi_{-l}} \lambda_l|_N) = e^{-h_t} \psi_l^* \alpha_l = \alpha_0.$$

Доказательство.

Рассмотрим гомотопию Лиувиллевых областей $\mathbb{W}_l$, для которой $\alpha_l = \alpha_0$. Рассмотрим семейство векторных полей Y_l на $\mathcal{X}(W)$ зануляющихся на ∂W, заданное равенством

$$\dot{\lambda}_l|_W = -\iota_{Y_l}\omega_l.$$

Обозначим поток семейства Y_l за ϕ_l. Для семейства ϕ_l диффеоморфизмов W выполнено

$$\frac{\partial}{\partial l}(\phi_l^*\lambda_l) = \phi_l^*(\dot{\lambda}_l + \mathcal{L}_{Y_l}\lambda_l) = d(\iota_{Y_l}(\phi_l^*\lambda_l)) =: df_l,$$

т.е. ϕ_l - поток точных симплектоморфизмов, причем семейство f_l зануляется на N

$$\dot{\lambda}_l|_N = 0 \Rightarrow Y_l|_N = 0 \Rightarrow f_l = \iota_{Y_l}\phi_l^*\lambda_l|_N = 0.$$

Продолжим ϕ_l до семейства диффеоморфизмов V и рассмотрим точные многообразия

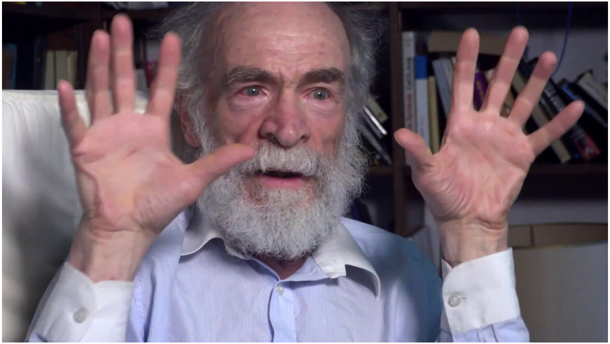
$$(\partial W \times \mathbb{R}_+, \phi_l^*\omega_l|_{\partial W\times\mathbb{R}_+}, \phi_l^*\lambda_l|_{\partial W\times\mathbb{R}_+}, \phi_l^*X_l|_{\partial W\times\mathbb{R}_+}).$$

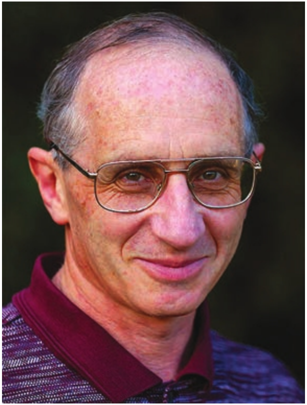
Поток поля $\phi_l^*X_l$ определяет гладкие вложения $\psi_{t,l} : N \to \partial W \times \mathbb{R}_+$ и диффеоморфизм

$$\Psi_l \in Diff(\partial W \times \mathbb{R}_+) : \ \Psi_l^*(\phi_l^*\lambda_l)|_{\partial W\times\{t\}} = e^t\alpha.$$

Тогда применяя постоянный на ∂W диффеоморфизм $\overline{\Psi}_l := \Psi_0^{-1} \circ \Psi_l \in Diff(\partial W \times \mathbb{R}_+)$ мы получаем новое продолжение $\overline{\phi}_t$ потока ϕ_l на V, для которого $(\overline{\phi}_l^*\lambda_l - \lambda_l)|_{\partial W\times\mathbb{R}_+} = 0$. □

Некоторые новые результаты





6. Вайнштейновы многообразия

Определение

$f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ называется **функцией Ляпунова** *для векторного поля X на многообразии V, если существует метрика ρ на V и положительное $\delta \in \mathbb{R}_+$, причем выполнено неравенство:*

$$X \cdot f \geq \delta(|X|^2 + |df|^2).$$

Замечание

X градиентно-подобно для любой своей функции Ляпунова, то есть критические точки f совпадают с нулями X и вне них f растет вдоль интегральных кривых X, так как

$$df(x) = 0 \Leftrightarrow |X|_x = |df|_x = 0 \Leftrightarrow X(x) = 0, \; df(x) \neq 0 \Rightarrow X \cdot f > 0.$$

Определение

Лиувиллева область **Вайнштейнова** *если она деформационно эквивалентна $\mathbb{W}$ и существует морсовская функция Ляпунова f для X, для которой $f^{-1}(c) = \partial W$.*

Пример

$\mathbb{M}$ и $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ являются пополнением Вайнштейновых областей, так как

- *Лиувиллево поле на $\mathbb{M}$ это градиент $\nabla\phi$ плюрисубгармонической функции ϕ;*
- *на $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ определена функция Ляпунова для E, заданная локально как $\phi = \Sigma_{i=1}^n p_i^2$.*

Теоремы Дональдсона и Жиру

Определение

Дивизор Дональдсона *на замкнутом целочисленном симплектическом многообразии*

$$(M,\omega),\ [\omega]\in H^2(M,\mathbb{Z})$$

это симплектическое подмногообразие $N\subset M$ коразмерности 2, представляющая класс

$$[N]=kPD([\omega]),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Предложение (Дональдсон)

Для любого целочисленного (M,ω) и достаточно большого k существует дивизор Дональдсона N, вложение которого в M является $(n-1)$-связным отображением.

Замечание

Если (M,ω) келерово, эта теорема следует из теорем Кодаиры, Бертини и Лефшеца. Тогда комплексное многообразие $M-N$ допускает замкнутое вложение $\mathbb{C}^n$, т.е. Штейново.

Предложение (Жиру)

Для дивизора Дональдсона N в целочисленном многообразии (M,ω) существует Вайнштейнова область $\mathbb{W}=(W,\partial W,\lambda)$ и диффеоморфизм $\phi: W^0\to M-N$, для которого $\phi^*\omega=d\lambda$.

Расслоения Лефшеца

Предложение (Килебак-Элиашберг)

Рассмотрим Вайнштейнову область $\mathbb{W} = (W, \partial W, \omega, \lambda, X)$ *и функцию Ляпунова* f *для* X*, такую, что* $f^{-1}(c) = \partial W$*. Предположим, что задана изотропная сфера* $N = S^k \subset \partial W$ *с тривализованным конформно-симплектическим нормальным расслоением* $CSN(N)$*. Тогда функция* f *может быть продолжена до функции Ляпунова на Лиувиллевой области* $\mathbb{W}_N$*.*

Определение

Расслоение Лефшеца над диском *на Лиувиллевой области* $\mathbb{W} = (W, \partial W, \omega)$ *это почти-комплексная структура* J *на* W*, согласованная с* ω *и* J*-голоморфное отображение*

$$\pi : W \to \mathbb{D} | \ \exists \ Crit(\pi) \subset U \subset W^0 \text{ такое, что } J|_U \text{ интегрируема, } f|_U \text{ - Морсовская.}$$

Исчезающей сферой S *называется прообраз критической точки* p_i *при параллельном переносе вдоль пути из отмеченной точки* $*$ *в* $\pi(p_i)$ *по симплектической связности.*

Замечание

Лиувиллева область $(\mathbb{D} \times \pi^{-1}(*))_{\{S_i\}}$ *деформационно эквивалентна* $\mathbb{W}$*.*

Предложение (Жиру-Пардон)

На любой Вайнштейновой область существует расслоение Лефшеца над диском.

7. Скелет Лиувиллева многообразия

Определение

Скелетом *Лиувиллева многообразия* $\mathbb{V} = (V, \omega, \lambda, X)$ *называется аттрактор потока поля* X

$$Sk(\mathbb{V}) := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{t>0} \phi_{-t}(V_i).$$

Это замкнутое подмножество точек $x \in V$*, имеющих ограниченную траекторию* $\phi_t(x)$*.*

Замечание

- *Лиувиллево многообразие ретрактирется на свой скелет;*
- $Sk(\mathbb{V})$ *не имеет внутренних точек и объема, так как для любого компакта* $W \subset V$*:*

$$Vol(\phi_{-t}(W)) = e^{-t} \int_W \omega^n \to_{t\to\infty} 0 \Rightarrow Vol(Sk(\mathbb{V})) = 0;$$

- *скелет пополнения* $\widehat{\mathbb{W}}$ *содержится в* W*, следовательно* $Sk(\widehat{\mathbb{W}})$ *компактен;*
- $\mathbb{V}$ *имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его скелет* $Sk(\mathbb{V})$ *компактен.*

Пример

Для замкнутого многообразия Q *и Лиувиллевого многообразия* $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ *скелет* $Sk(\mathbb{T}^*\mathbb{Q})$ *это* Q*.*

Скелет двумерной лиувиллевой области

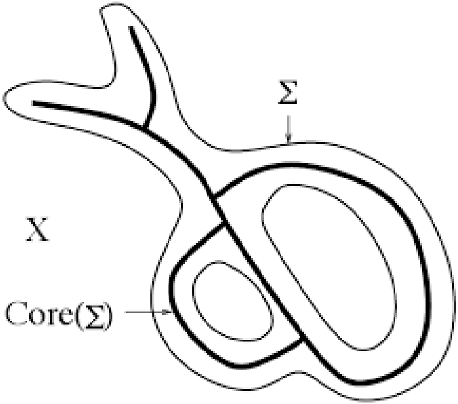


Рис.: Картинка украдена из статьи Элиашберга

Скелет Вайнштейнова многобращия и разложение на ручки

Замечание

Рассмотрим Лиувиллево многообразие $\mathbb{V} = (V, \omega, \lambda, X) = \widehat{\mathbb{W}}$ *и функцию Ляпунова* f *для* X. *Траектория* X *уходит на бесконечность либо стремится к критической точке* f, *то есть*

$$Sk(\mathbb{V}) = \bigcup_{p \in Crit(f)} W^s(p), \; W^s(p) = \{x \in V | \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p\}$$

$W^s(p)$ *это гладкое изотропное подмногообразие, диффеоморфное* $\mathbb{R}^k$: *изотропность достаточно проверить в* p, *так как* $\phi_t^* \omega = e^t \omega$. *Для линеаризации* A *поля* X *в* p *имеем*

$$T_p W^s(p) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A), Re(\lambda) < 0} \bigoplus_{i \geq 0} \ker(A - \lambda Id)^i,$$

$$\forall v_1, v_2 \in T_p W^s(p), \; \omega(v_1, v_2) = \lim_{t \to +\infty} e^{-t} \omega(e^{tA} v_1, e^{tA} v_2) = 0.$$

Т.о. все $p \in Crit(f)$ *имеют* $i(p) \leq n$, V *имеет тип* CW*-комплекса* $\dim \leq n$. *Корневые сферы* $S_p = \phi^{-1}(c) \cap W^s(p)$ *разложения, заданного* f *изотропны в гиперповерхностях* $\phi^{-1}(c)$.

Предложение (Килебак-Элиашберг)

Склейка симплектических ручек по сферам S_p *деформационно эквивалентен* $\mathbb{W}$.

Определение

Лиувиллево многообразие $\mathbb{V}$ $\dim V = 2$, *допускает Лагранжев скелет, если существует такое разбиение*

$$Sk(\mathbb{V}) = C_{subcrit} \cup C_{crit},$$

что $C_{subcrit}$ *замкнуто, изотропно и содержится в образе многообразия размерности* $\leq n-1$, *а* C_{crit} *Лагранжево (является изотропным подмногообразием размерности* n*) в* $V - C_{subcrit}$.

Замечание

- *Скелет Лиувиллева многообразия не сохраняется при изоморфизмах и гомотопиях.*
- *Если многообразие изоморфно Вайнштейновому, то оно допускает лагранжев скелет*
- *Гипотеза арборелизации Надлера утверждает, что любое Вайнштеново многообразие допускает Лагрнжев скелет с особенностями специального классифицируемого вида.*

Предложение (Элиашберг + ..., in progress)

Лиувиллево многообразие может быть восстановлено по лагранжеву скелету.

Пример

Пусть Лиувиллева область $\mathbb{W}$ *имеет гладкий изотропный скелет* $Sk(\mathbb{W}) = Q \subset W$. *Тогда*

$$\mathbb{W} \text{ деформационно эквивалетно } CSN(K)_{\mathbb{T}^*\mathbb{N}}.$$

8.Гибкость: вложения сфер и теорема Мерфи

Предложение (Громов)

Изотропные вложения сфер размерности $< n$ удовлетворяют h-принципу, то есть пространство формальных Лежандровых вложений ретракируется на пространство Лежандровых вложений.

Определение

Лежандрова сфера S в контактном многообразии (N, ξ) называется **свободной**, *если*

$$\exists U \subset N: \ (U, U \cap S; \xi) \approx (\mathbb{R}^{2n-1}, L; \xi_{st}), \ \text{где } \xi_{st} = \ker(dz + \Sigma_i p_i dq_i),$$

$$L = \{(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n, z) |\ q_1 = \frac{1}{2} p_1^2, \ q_2 = \dots = q_n = 0, \ z = -\frac{1}{3} p_1^3\}.$$

Замечание

Лежандрову сферу можно модифицировать, чтобы получилась свободная, без изменения формального класса лежандровой изотопии. Так получается любая свободная сфера.

Предложение (Мерфи)

Для любого контактного многообразия $\dim \geq 5$ *пространство формальных свободных Лежандровых вложений ретракируется на пространство свободных Лежандровых вложений.*

Субкритические Вайнштейновы многообразия

Определение

Симплектическая k-ручка $\dim = 2n$ **критическая**, *если $n = k$ и* **субкритическая** *иначе. Вайнштейнова область называется* **субкритической** *если все ее ручки субкритические.*

Определение

Стабилизацией *Вайнштейновой области $\mathbb{W}$ называется субкритическая область*

$$\mathbb{W} \times (\mathbb{R}^2, \omega_{st}).$$

Предложение (Килебак)

Субкритическая Вайнштейнова область $\mathbb{W}$ деформационно эквивалентна стабилизации

$$\exists \mathbb{W}',\ \phi : W' \times \mathbb{R}^2 \to W |\ \mathbb{W}' \times (\mathbb{R}^2, \omega_{st})\ \phi^* \mathbb{W}.$$

Гибкие Вайнштейновы многообразия

Определение

Вайнштейнова область **гибкая** *если все корневые сферы ее критических ручек свободные.*

Предложение (Килебак-Элиашберг)

Гибкие Вайнштейновы многообразия удовлетворяют следующим свойствам h-принципа.

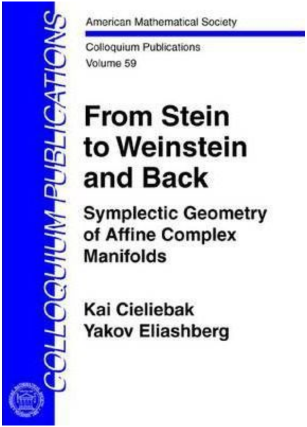
- *Пусть V многообразие* $\dim V = 2n$, $\eta \in \Omega^2(V)$ *невырожденна,* $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ *Морсовская без критических точек индекса* $> n$. *Тогла существует Вайнштейново многообразие*

$$(V, \omega, \lambda, X),$$

такое, что ω *гомотопна* η *в классе невырожденных форм,* f *- функция Ляпунова для* X;

- *Гибкие Вайнштейновы области* $\mathbb{W}_i = (W, \partial W, \omega_i, \lambda_i, X_i)$ *гомотопны в классе Вайнштейновых областей как только существует гомотопия невырожденных форм*

$$\omega_t \in \Omega^1(V, \mathbb{R}).$$


COLLOQUIUM PUBLICATIONS
American Mathematical Society
Colloquium Publications
Volume 59
From Stein to Weinstein and Back
Symplectic Geometry of Affine Complex Manifolds
Kai Cieliebak
Yakov Eliashberg

От Штейна к Вайнштену и обратно

Определение

Функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ на комплексном многообразии M **плюригармоническая**, *если*

$$\forall m \in M,\ \forall v \in T_m V,\ \ -dd^{\mathbb{C}}\phi_z(v, Jv) > 0.$$

Замечание

- *$|z|^2$ ограничивается на любое Штейново многообразие плюрисубгармонично;*
- *условие плюрисубгармоничности открыто, так что ϕ можно считать морсовской;*
- *многообразие с плюрисубгармонической функцией автоматически Вайнштейново.*

Замечание (Грауэрт, Бишоп, Нарасимхан)

Многообразие M, допускающее плюрисубгармоническую функцию, Штейново.

Предложение (Килебак-Элиашберг)

Рассмотрим Вайнштейнову область $\mathbb{W}$. Тогда существует комплексная структура на W^0 и плюрисубгармоническая функция $\phi \in \mathcal{C}^\infty(W)$, $f^{-1}(c) = \partial W$, такая что $\omega = -dd^c\phi$.

Замечание

Эта теорема позваляет усилить теорему Жиру и используется в теореме Жиру-Пардона.

Классификация гибких и субкритических заполнений

Определение

Заполнением *контактного многообразия* $\mathbb{N}$ *называется контактоморфизм*

$$\mathbb{N} \approx \partial_\infty \mathbb{V}$$

на границу на бесконечности некоторого Лиувиллева многообразия конечного типа $\mathbb{V}$

Предложение (МакДафф-Флоер-Элиашберг)

Произвольное заполнение стандартной контактной сферы (S^{2n-1}, ξ_{st}) *диффеоморфно шару.*

Предложение (Барт-Гейгес-Земиш)

Рассмотрим односвязное контактное многообразие $\mathbb{N} = (N, \xi)$ $\dim N \leq 5$, *имеющее субкритическое заполнение. Тогда все заполнения* $\mathbb{N}$ *попарно диффеоморфны.*

Предложение (Лазарев)

Рассмотрим контактное многообразие $\mathbb{N} = (N, \xi)$ $\dim N \leq 3$ *такое что* $c_1(N, \xi) = 0$. *Тогда целочисленные когомологии гибких Вайнштейнвых заполнений попарно изоморфны.*

Скрученная категория Фукая

Определение

Для Лиувиллевой области $\mathbb{V}$ определена $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная $\mathcal{A}^\infty$ категория $\mathcal{W}(\mathbb{V})$ над $\mathbb{Z}$:

- *объекты $\mathcal{W}(\mathbb{V})$ это (L, f, ν): ориентированные Лагранжевы подмногообразия $L \subset V$, точные $df = \lambda|_L$, X-инвариантные на $Op(\partial V)$ и снабженные spin-структурой ν;*
- *для пары $L_0, L_1 \in Ob(\mathcal{W}(\mathbb{V}))$ морфизмы это скрученным комплекс Флоера*

$$Hom_{\mathcal{W}(\mathbb{V})}(L_0, L_1) = CW^*(L_0, L_1).$$

Скрученная категория Фукая $\mathcal{W}(\mathbb{V})$ *определена с точностью до квазиизоморфизма.*

Гипотеза (Концевич)

Существует пучок $\mathcal{A}^\infty$-категорий на скелете $Sk(\mathbb{V})$ глобальным сечениями $\mathcal{W}(\mathbb{V})$.

Пример

Скрученная категория Фукая $\mathbb{T}^*\mathbb{Q}$ имеет единственный генератор $[T_p^*Q]$ и квазиизоморфна

$$\mathcal{W}(\mathbb{T}^*\mathbb{Q}) \approx C_{-*}(\Omega_* Q) - mod.$$

Предложение (Шантрейн-Ризелл-Гигини-Головко, Ганатра-Пардон-Шенде)

Корневые диски C_Λ критических ручек определяют объекты $[C_\Lambda]$, порождаюоие $\mathcal{W}(V)$.

10. Существование Вайнштейновых структур

STABILIZED CONVEX SYMPLECTIC MANIFOLDS ARE WEINSTEIN

YAKOV ELIASHBERG[1], NOBORU OGAWA[2], AND TORU YOSHIYASU[3]

Abstract. We show that a stabilized convex symplectic (also called Liouville) manifold with the homotopy type of a half dimensional CW-complex is symplectomorphic to a flexible Weinstein manifold.

2251v1 [math.SG] 27 Mar 2020

1. Introduction

1.1. **Convex symplectic manifolds.** Recall that a primitive λ of a symplectic form ω, $d\lambda = \omega$, is called a *Liouville form*, and the vector field Z which is ω-dual to λ, $\iota(Z)\omega = \lambda$, is called a *Liouville vector field*. The equation $\iota(Z)\omega = \lambda$ is equivalent to the equation $L_Z\omega = \omega$, where L_Z is the Lie derivative, i.e. Liouville vector fields are *conformally symplectic*.

An open symplectic manifold (V, ω) with an exact symplectic form ω is called *symplectically convex* (see [EG91]), or *Liouville* if there exists a Liouville form λ such that the corresponding Liouville vector field Z is complete and there exists an exhaustion $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, $V_j \subset V_{j+1}$, by compact domains V_j with smooth boundaries ∂V_j such that Z is outward transverse to ∂V_j. The domains V_j with this property are called *Liouville domains*.

Замечание

На ближайших трех слайдах будут изложены результаты статьи **arXiv:2003.12251 Stabilized convex symplectic manifolds are Weinstein** *авторов Eliashberg, Ogawa, Yoshiyasu*

Вопрос

Когда Лиувиллево многообразие $\mathbb{V}$ (удовлетворяющей естественным ограничениям на гомотопический тип и стратификацию скелета) симплектоморфно Вайнштейнову?

Стабильные Лиувиллевы многообразия Вайнштейновы

Предложение (МакДафф)

Для замкнутой поверхности S_g *рода* $g > 1$ *существует Лиувиллево многообразие конечного типа* $\mathbb{V}_g$, *диффеоморфное* $T^*S_g - S_g$, *скелет которого* $Sk(\mathbb{V}_g) \subset V_g$ *имеет коразмерность* 1.

Определение

Многообразие V *имеет* **Морсовский тип** $\leq k$ *если существует функция Морса* $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$

$$\forall p \in Crit(f)\ i(p) \leq k.$$

Замечание

Вайнштейново многообразие размерности $2n$ *имеет Морсовский тип* $\leq n$.

Предложение (Утверждение 1)

Рассмотрим Лиувиллево многообразие конечного типа $\mathbb{V}$ *размерности* $\dim \mathbb{V} = 2n - 2$ *и Морсовского типа* $\leq n$. *Тогда Лиувиллево многообразие* $\mathbb{X} := \mathbb{V} \times (\mathbb{R}, \omega_{st})$, *полученное стабилизацией* $\mathbb{V}$, *симплектоморфно Вайнштейновому многообразию, гибкому при* $n \geq 3$.

Следствие

Для каждого g *стабилизация* $\mathbb{V}_g$ *симплектоморфна гибкому Вайншейнову многообразию.*

Определение

- **Точки подмножества A многообразия V имеют доступ к бесконечности** *если для каждого компактного подмножества $B \subset A$ существует достаточно малая открытая окрестность $U \supset B$ такая что каждая связная компонента дополнения $V - U$ не компактна.*
- *Локально замкнутое подмножество A симплектического многообразия V* **допускает симплектическое расширение положительной коразмерности** *если $\forall a \in A$ существует окрестность $a \in U_a$ и замкнутое симплектическое подмногообразие*

$$U_a \cap A \subset \Sigma_a \subset U_a$$

положительно коразмерности, такое что точки $U_a \cap A$ имеют доступ к бесконечности.

Предложение (Утверждение 2)

Рассмотрим точное многообразие $\mathbb{V}$ размерности $\dim = 2n$, $n \geq 3$ Морсовского типа и $\leq n$. Предположим, что задано покрытие $Sk(\mathbb{V}) = \bigcup_{i\geq 1} C_i$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, причем:
1) C_i допускает симплектическое расширение положительной коразмерности,
2) $\bigcup_{i\geq j} C_i$ компактно для любого $j \geq 1$.
Тогда (V, ω) симплектоморфно гибкому Вайнштейнову многообразию.

Два следствия

Замечание

Скелет Лиувиллева многообразия $\mathbb{X} := \mathbb{V} \times (\mathbb{R}, \omega_{st})$ *очевидно удовлетворяет предыдущему условию, так как содержится в симплектическом подмногообразии* $V \subset X$ *коразмерности* 2.

Определение

Подмногообразие A *симплектического многообразия* (V, ω) **нигде не коизотропно**, *если*

$$\forall x \in A \ (T_x A)^{\perp\omega} \not\subseteq T_x A.$$

Предложение (теорема 3)

Рассмотрим Лиувиллево многообразие $\mathbb{V}$ *размерности* $\dim = 2n \geq 6$ *Морсовского типа* $\leq n$. *Пусть существует стратификация* $Sk(\mathbb{V})$ *нигде не коизотропными подмногообразиями коразмерности* ≥ 3. *Тогда* $\mathbb{V}$ *симплетоморфно гибкому Вайнштейнову многообразию.*

Спасибо за внимание!!!