О СИСТЕМАХ ПОРОЖДАЮЩИХ ДЛЯ ИДЕАЛОВ S-МНОГООБРАЗИЙ

Е. Ю. Смирнов

Доказывается обобщение одной из теорем Костанта, описывающей идеал орбиты суммы старших векторов неприводимых представлений полупростой алгебраической группы. В теореме Костанта предполагается, что старшие веса линейно независимы. Приводится способ снять это ограничение (но при этом появляются новые соотношения).

Введение.

В данной работе рассматриваются аффинные алгебраические многообразия, получаемые в результате замыкания орбиты суммы старших векторов конечного числа неприводимых представлений полупростой алгебраической группы G (они называются S-многообразиями). Классическим примером такого многообразия является грассманов конус $\mathrm{Gr}(m, n)$, полученный как замыкание орбиты старшего вектора в представлении группы SL_n в пространстве $\Lambda^m k^n$. Грассманов конус задаётся набором соотношений, называемых соотношениями Плюккера; более того, эти соотношения порождают его идеал. Предметом этой работы является получение аналогичных соотношений для произвольных S-многообразий. Ранее это было сделано для случая, когда старшие веса линейно независимы (см. [1]).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Э.Б. Винбергу, под руководством которого была выполнена работа, а также доценту Д.А. Тимашёву за ряд ценных замечаний к тексту работы.

Обозначения.

k — основное поле, алгебраически замкнутое и нулевой характеристики;

G — односвязная полупростая алгебраическая группа;

B — фиксированная борелевская подгруппа;

$\mathfrak{X}(T)$ — группа характеров фиксированного максимального тора $T \subset B$;

$\mathfrak{X}_+(T)$ — полугруппа доминантных характеров T;

V_λ — неприводимый G-модуль со старшим весом $\lambda \in \mathfrak{X}_+(T)$;

v_λ^+ — старший вектор модуля V_λ.

1. HV-многообразия.

Рассмотрим самый простой случай: так называемые HV-многообразия, т. е. замыкания орбиты старшего вектора. В [2] доказывается, что HV-многообразие X, являющееся замыканием орбиты старшего вектора в неприводимом представлении V_λ, задаётся системой уравнений

$$\Omega(v \otimes v) = (2\lambda + 2\rho, 2\lambda)(v \otimes v), \tag{1}$$

где Ω — оператор Казимира, ρ — полусумма положительных корней.

В обеих частях (1) стоят элементы пространства S^2V_λ, т. е. (1) можно рассматривать как систему квадратичных уравнений (в количестве $d_\lambda(d_\lambda+1)/2$, где $d_\lambda = \mathrm{dim} V_\lambda$) на координаты вектора v. В случае, когда $G = \mathrm{SL}_n$, а $\lambda = \pi_k$ есть k-тый фундаментальный вес, приведённые соотношения суть в точности соотношения Плюккера.

Усилением результата работы [2] является

Предложение 1. *Соотношения (1) порождают идеал многообразия X.*

Доказательство. Следует из теоремы Костанта, доказательство которой мы приведём в следующем пункте. $\square$

2. S-многообразия: случай линейно независимых весов.

Пусть G — полупростая алгебраическая группа. Рассмотрим S-многообразие, соответствующее набору доминантных весов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathfrak{X}_+(T)$, т. е. замыкание орбиты суммы старших векторов $v_{\lambda_1}^+ + \ldots + v_{\lambda_k}^+ \in V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$. Обозначим это многообразие через $X = X(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Подполугруппу в $\mathfrak{X}_+(T)$, порождённую весами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, будем обозначать через $\mathfrak{E}$, а само множество весов $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — через $\mathfrak{E}_0$.

Из [3] известен вид G-модуля $k[X]$. А именно,

$$k[X] = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{E}} S_\lambda \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{X}_+(\mathfrak{T})} S_\lambda = k[G/U], \tag{2}$$

где $S_\lambda \cong \{f \in k[G] : f(gb) = \lambda(b)f(g)\ \forall g \in G,\ b \in B\}$ (тем самым в S_λ реализуется представление V_λ^* группы G), а вложение $k[X] \hookrightarrow k[G/U]$ G-эквивариантно. Из определения S_λ следует, что кольца $k[X]$ и $k[G/U]$ градуированы элементами полугруппы $\mathfrak{E}$, т. е. $S_\lambda S_\mu = S_{\lambda+\mu}$.

В работе [1] приведена следующая теорема, принадлежащая Костанту. Она обобщает предложение 1. Поскольку основной результат данной работы опирается на доказательство этой теоремы, приведём набросок её доказательства в удобной для нас форме.

Теорема 2 (Костант). *Пусть подполугруппа* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{X}_+(T)$ *свободно порождена конечным набором весов* $\mathfrak{E}_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathfrak{E}$*. Обозначим через* I *идеал в* $k[V] = k[V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}]$*, порождённый координатами тензоров*

$$\Omega(v_\lambda \otimes v_\mu) - (\lambda + \mu + 2\rho, \lambda + \mu)(v_\lambda \otimes v_\mu), \tag{3}$$

где $v_\lambda \in V_\lambda$*,* $v_\mu \in V_\mu$*, а* λ *и* μ *пробегают* $\mathfrak{E}_0$*. Тогда координатная алгебра* S*-многообразия* $X(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *есть* $k[V]/I$*.*

Доказательство. Соотношения $\Omega(v_\lambda \otimes v_\mu) - (\lambda + \mu + 2\rho, \lambda + \mu)(v_\lambda \otimes v_\mu) = 0$ выполняются для суммы старших векторов $v^+_{\lambda_1} + \ldots + v^+_{\lambda_k}$, поскольку $v^+_\lambda \otimes v^+_\mu = v^+_{\lambda+\mu}$. Кроме того, они G-инвариантны. Значит, они выполняются для всех точек орбиты. Это доказывает включение $I \subseteq I(X)$.

Докажем обратное включение. Пусть $n = \dim G$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{x^*_1, \ldots, x^*_n\}$ — базисы алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, дуальные относительно формы Картана–Киллинга. Рассмотрим элемент Казимира $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x^*_i \in U(\mathfrak{g})$. Обозначим через $\lambda[\Omega]$ скаляр $(\lambda + 2\rho, \lambda)$, которым Ω действует на неприводимом представлении V_λ. Отметим, что если для некоторого доминантного веса λ' верно, что $\lambda' = \lambda - \sum k_i \alpha_i$, где α_i — простые корни, а $k_i \geq 0$, причём не все k_i равны нулю, то $\Omega[\lambda] > \Omega[\lambda']$. Действительно, $(\lambda + 2\rho, \lambda) = (\lambda + 2\rho, \lambda') + \sum k_i(\lambda + 2\rho, \alpha_i) = (\lambda' + 2\rho, \lambda') + \sum k_i((\alpha_i, \lambda') + (\lambda + 2\rho, \alpha_i)) > (\lambda' + 2\rho, \lambda')$.

Пусть $\lambda, \mu \in \mathfrak{E}_0$. Запишем оператор $\Omega - (\lambda + \mu)[\Omega]\mathrm{Id}$, действующий на пространстве $V_\lambda \otimes V_\mu$, несколько иначе.

$$(\Omega - (\lambda + \mu)[\Omega]\mathrm{Id})(v_\lambda \otimes v_\mu) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes x^*_i + x^*_i \otimes x_i) - 2(\lambda, \mu) \right) (v_\lambda \otimes v_\mu). \tag{4}$$

Согласно условию теоремы, координаты всех таких выражений принадлежат идеалу I.

Из вида (2) координатной алгебры $k[X]$ следует, что идеал I линейно порождается ядрами проекций на старшие компоненты

$$V_{\lambda_{i_1}} \otimes \ldots \otimes V_{\lambda_{i_m}} \to V_{\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_m}}$$

при всевозможных $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_m} \in \mathfrak{E}_0$. Каждое из этих ядер есть образ линейного оператора $P = \Omega - (\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_m})[\Omega]\mathrm{Id}$.

Простой подсчёт показывает, что

$$P(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) = \sum_{1 \le r < s \le m} (T_{rs} - 2(\lambda_{i_r}, \lambda_{i_s})\mathrm{Id})\,(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m), \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} T_{rs}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m) \;&=\; \sum_{i=1}^{n}(v_1 \otimes \ldots \otimes x_i v_r \otimes \ldots \otimes x_i^* v_s \otimes \ldots \otimes v_m + \\ &\quad + v_1 \otimes \ldots \otimes x_i^* v_r \otimes \ldots \otimes x_i v_s \otimes \ldots \otimes v_m). \end{aligned}$$

Согласно (4), координаты каждого из слагаемых в (5) принадлежат идеалу I. Значит, координаты P также лежат в I. $\square$

Из доказательства теоремы можно получить следствие, которое также приводится в [1].

Следствие 3. *Если в теореме Костанта отбросить условие линейной независимости весов из $\mathfrak{E}_0$, то и в этом случае идеалу I будут принадлежать координаты всех выражений вида $(\Omega - (\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_m})[\Omega])(v_1 \otimes \ldots \otimes v_m)$, где $v_p \in V_{\lambda_{i_p}}$, $\lambda_{i_p} \in \mathfrak{E}_0$.*

3. S-многообразия: случай линейно зависимых весов.

Остаётся вопрос: какими уравнениями можно задать S-многообразие, если старшие веса λ_i линейно зависимы, т. е. в полугруппе $\mathfrak{E}$ имеются соотношения между элементами $\mathfrak{E}_0$? Ясно, что соотношения, аналогичные (3), будут иметь место и в этом случае. Но фактор $k[V]$ по этим соотношениям будет «больше» координатного кольца $k[X]$. А именно, для каждого данного веса λ в это кольцо будут входить не одна, а несколько G-инвариантных компонент вида V_λ^*, по числу представлений λ в виде $\mathbb{Z}_+$-линейной комбинации элементов $\mathfrak{E}_0$. В этом случае конструкцию Костанта следует дополнить, выписав некоторый дополнительный набор соотношений. При этом старшие векторы пространств V_{λ_i} должны быть нормированы определённым образом. Опишем эту конструкцию.

Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_m$ — множество фундаментальных весов ($m = \mathrm{rk}\ G$). Рассмотрим G-модуль $W = V_{\pi_1} \oplus \ldots \oplus V_{\pi_m}$. Зафиксируем в каждом из V_{π_i} старший вектор $v_{\pi_i}^+$.

Всякий неприводимый G-модуль со старшим весом $\lambda = l_1\pi_1 + \ldots + l_m\pi_m$ может быть реализован как подмодуль симметрической алгебры, порождённой пространством W. А именно, $SW = S(V_{\pi_1} \oplus \ldots \oplus V_{\pi_m})$ содержит (приводимый) подмодуль $S^{l_1}V_{\pi_1} \otimes \ldots \otimes S^{l_m}V_{\pi_m}$, старшая неприводимая компонента которого изоморфна V_λ. Старший вектор этого подмодуля может быть выбран каноническим образом, а именно как $(v_{\pi_1}^+)^{l_1} \otimes \ldots \otimes (v_{\pi_m}^+)^{l_m}$. Взяв в качестве λ поочерёдно все веса $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, мы получим изоморфизм между $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ и некоторым подпространством пространства SW и канонический выбор старших векторов во всех V_{λ_i}.

Теперь приведём основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть подполугруппа $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{X}_+$ порождается конечным набором весов $\mathfrak{E}_0 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathfrak{E}$ с определяющими соотношениями вида*

$$n_1\lambda_{i_1} + \ldots + n_r\lambda_{i_r} = m_1\lambda_{j_1} + \ldots + m_s\lambda_{j_s},$$

где $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_r}, \mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_r} \in \mathfrak{E}_0$, $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\} = \varnothing$, $n_i, m_j \in \mathbb{Z}_+$. Пусть также старшие векторы пространств $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ нормированы так, как указано в начале данного раздела.

Тогда идеал $I(X) \subset k[V]$ многообразия $X = X(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ порождается координатами тензоров

$$\Omega(v_\lambda \otimes v_\mu) - (\lambda + \mu + 2\rho, \lambda + \mu)(v_\lambda \otimes v_\mu), \tag{6}$$

где $v_\lambda \in V_\lambda$, $v_\mu \in V_\mu$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{E}_0$, и

$$\pi_1(v_{\lambda_{i_1}}^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_{i_r}}^{n_r}) - \pi_2(v_{\lambda_{m_1}}^{m_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_{j_s}}^{m_s}), \tag{7}$$

где $v_{\lambda_{i_1}}^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_{i_r}}^{n_r} \in S^{n_1}V_{\lambda_{i_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_r}V_{\lambda_{i_r}}$, $v_{\lambda_{m_1}}^{m_1} \otimes \ldots \otimes v_{\lambda_{j_s}}^{m_s} \in S^{m_1}V_{\lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_s}V_{\lambda_{j_s}}$, а π_1 и π_2 — операторы проектирования на старшие неприводимые компоненты $V_{n_1\lambda_{i_1}+\ldots+n_r\lambda_{i_r}}$ и $V_{m_1\lambda_{j_1}+\ldots+m_s\lambda_{j_s}}$ в этих произведениях.

Доказательство. Обозначим через I идеал, порождённый координатами выражений (6) и (7). Эти координаты обращаются в нуль на сумме старших векторов (причём для набора (7) это достигается именно надлежащей нормировкой старших векторов). Кроме того, они порождают G-инвариантный идеал. Следовательно, $I \subseteq I(X)$.

Координатное кольцо $k[V] = k[V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}]$ изоморфно $S(V^*) = \bigoplus\limits_{m \in \mathbb{Z}_+} S^m(V^*)$, причём

$$S^m(V_{\lambda_1}^* \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}^*) = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_k=m} S^{i_1}V_{\lambda_1}^* \otimes \ldots \otimes S^{i_k}V_{\lambda_k}^*.$$

Каждый из G-модулей $S^{i_1}V^*_{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes S^{i_k}V^*_{\lambda_k}$ есть прямая сумма старшей неприводимой компоненты $V^*_{i_1\lambda_1+\ldots+i_k\lambda_k}$ и остальных (младших) компонент разложения. Согласно следствию 3, все младшие компоненты разложения при всех наборах $(i_1, \ldots, i_k)$ содержатся в идеале I.

Образующие идеала I, происходящие из соотношений (7), неформально говоря, отождествляют старшие компоненты пространств $S^{n_1}V^*_{\lambda_{i_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_r}V^*_{\lambda_{i_r}}$ и $S^{m_1}V^*_{\lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_s}V^*_{\lambda_{j_s}}$. Эти соотношения равны нулю на ядре $\operatorname{Ker} F$ оператора $F \in \operatorname{End}(S^{n_1}V_{\lambda_{i_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_r}V_{\lambda_{i_r}} \oplus S^{m_1}V_{\lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_s}V_{\lambda_{j_s}})$, $F\colon v_1 + v_2 \mapsto \pi_1(v_1) - \pi_2(v_2)$, где $v_1 \in S^{n_1}V_{\lambda_{i_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_r}V_{\lambda_{i_r}}$, $v_2 \in S^{m_1}V_{\lambda_{j_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_s}V_{\lambda_{j_s}})$.

Пространство линейных функционалов, равных нулю на $\operatorname{Ker} F$ (обозначим его $\operatorname{Ann}\operatorname{Ker} F$) инвариантно, и в нём реализуется неприводимое представление $V^*_{n_1\lambda_{i_1}+\ldots+n_r\lambda_{i_r}}$. Если идеалу принадлежит хотя бы один элемент из $\operatorname{Ann}\operatorname{Ker} F$ (а это имеет место), то и всё пространство $\operatorname{Ann}\operatorname{Ker} F$ лежит в I.

Любое соотношение в полугруппе $\mathfrak{E}$ получается при суммировании определяющих соотношений, т. е. имеет вид $\sum_k(n_{k1}\lambda_{ki_1} + \ldots + n_{kr}\lambda_{ki_r}) = \sum_k(m_{k1}\lambda_{kj_1} + \ldots + m_{ks}\lambda_{kj_s})$. Для каждого k старшие векторы $v_k = (v^+_{\lambda^*_{ki_1}})^{n_{k1}} \otimes \ldots \otimes (v^+_{\lambda^*_{ki_r}})^{n_{kr}}$ и $\tilde{v}_k = (v^+_{\mu^*_{kj_1}})^{n_{kj}} \otimes \ldots \otimes (v^+_{\lambda^*_{kj_s}})^{n_{kr}}$ старших компонент представлений $S^{n_{k1}}V^*_{\lambda_{ki_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_{kr}}V^*_{\lambda_{ki_r}}$ и $S^{m_{k1}}V^*_{\lambda_{kj_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_{ks}}V^*_{\lambda_{kj_s}}$ сравнимы по модулю идеала I. Следовательно, по модулю идеала I сравнимы векторы $\bigotimes_k v_k$ и $\bigotimes_k \tilde{v}_k$. которые являются старшими векторами старших компонент представлений $\bigotimes_k(S^{n_{k1}}V^*_{\lambda_{ki_1}} \otimes \ldots \otimes S^{n_{kr}}V^*_{\lambda_{ki_r}})$ и $\bigotimes_k(S^{m_{k1}}V^*_{\lambda_{kj_1}} \otimes \ldots \otimes S^{m_{ks}}V^*_{\lambda_{kj_s}})$ соответственно.

Изо всего сказанного следует, что, профакторизовав $k[V]$ по I, мы получим кольцо, вложимое в $\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{E}} S_\lambda = k[X]$. Следовательно, поскольку $I \subset I(X)$, мы получим в точности $k[X]$. Значит, $I = I(X)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lancaster G., Towber J.* Representation-functors and flag-algebras for the classical groups I //J. Algebra **59** (1979), 16–38 .
2. *Lichtenstein W.* A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector //Proc. AMS **84** (1982), №4, 605–608.
3. *Винберг Э.Б., Попов В.Л.* Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий //Изв. АН СССР, сер. матем., **36** (1972), 749–764.