Исчислительная геометрия и 3264 коники

В.А. Кириченко*

*Факультет математики и Лаборатория алгебраической геометрии и её приложений,
Национальный исследовательский университет Высшая Школа Экономики
и
Институт проблем передачи информации им. Харкевича РАН

3 февраля 2012 г.

Задача Аполлония

Сколько окружностей касается трёх заданных окружностей на плоскости?

Ответ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 или бесконечно много

Задача Аполлония

Сколько окружностей касается трёх заданных окружностей на плоскости?

Ответ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 или бесконечно много

Исчислительная геометрия

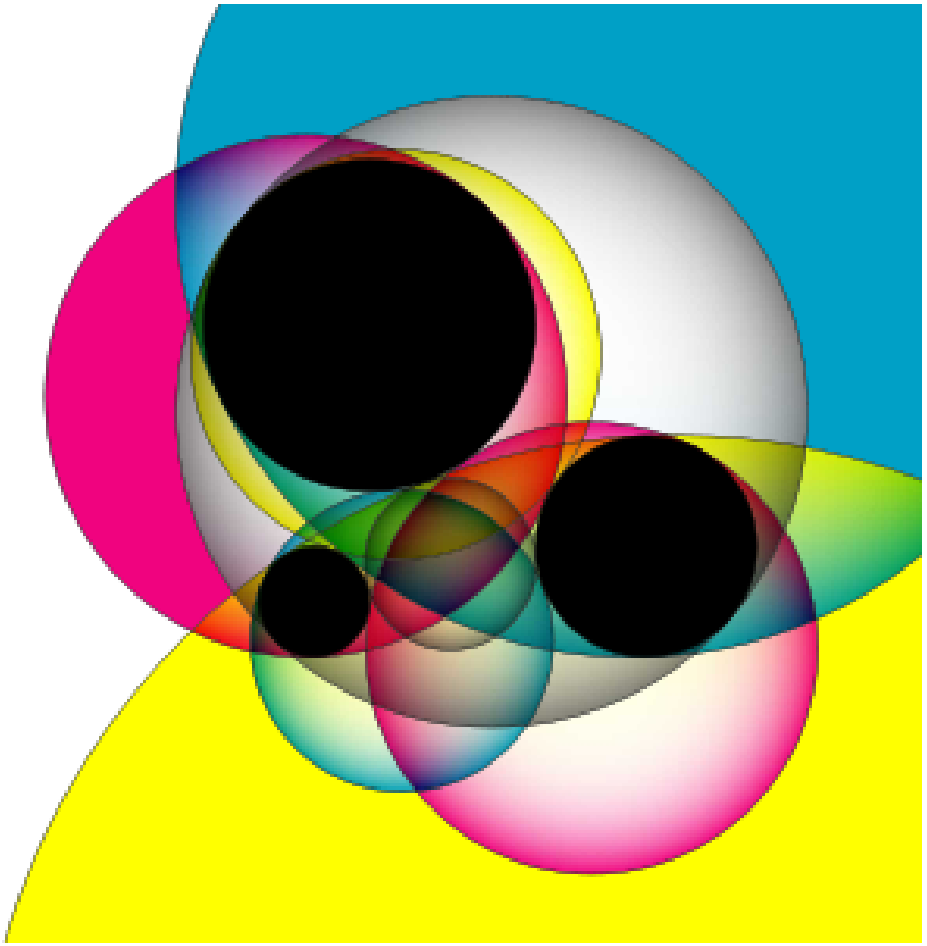


Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Circles_of_Apollonius

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Исчислительная геометрия

Цель

Нас интересуют только те конфигурации, для которых ответ — максимальный конечный. Его и нужно найти.

Мотивировка

В задачах *комплексной* исчислительной геометрии *почти все* конфигурации дают максимальный конечный ответ.

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Задача Шуберта

Сколько прямых проходит через четыре заданные прямые в 3-хмерном пространстве?

Ответ

2

Исчислительная геометрия

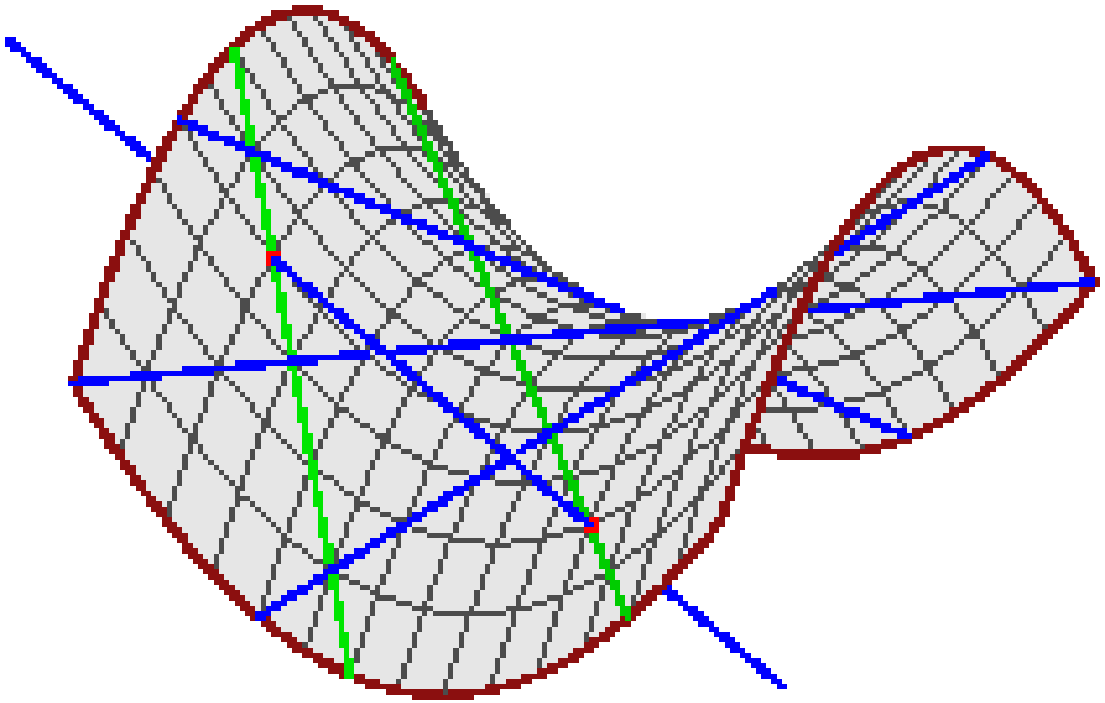


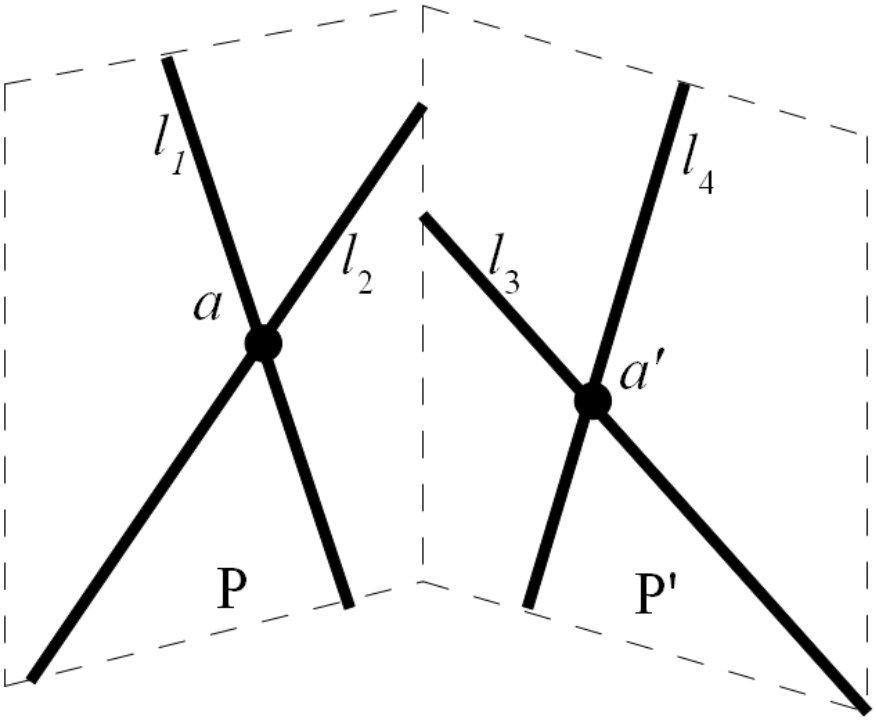
Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/connections.html

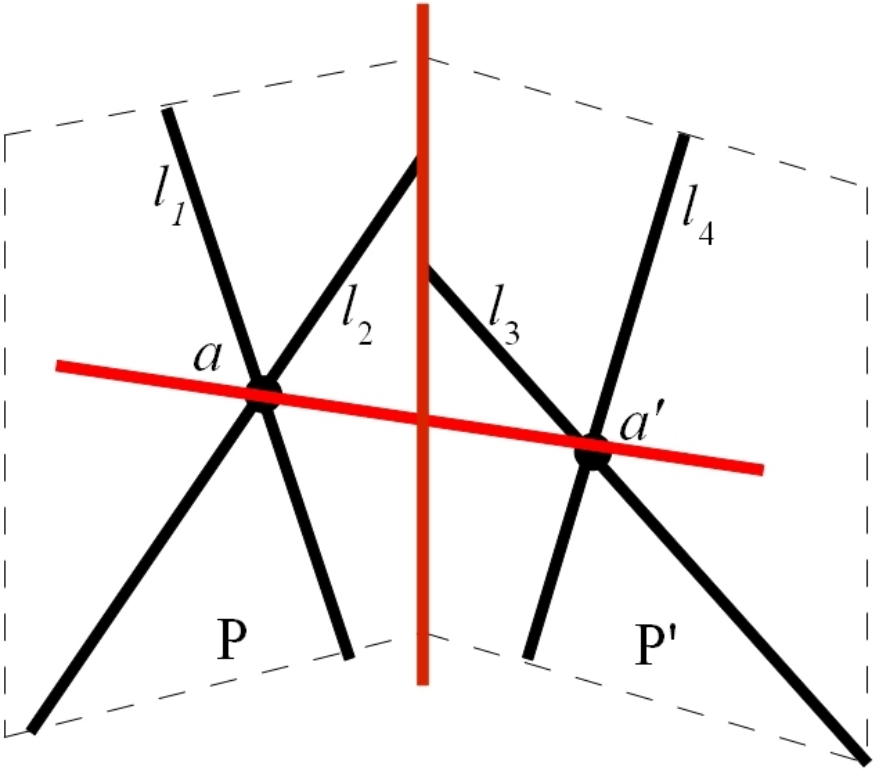
Исчислительная геометрия

Герман Шуберт (1848-1911),
немецкий математик

Исчислительная геометрия



Исчислительная геометрия



Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Метод Шуберта

- Найти ответ для простой конфигурации
- Воспользоваться *принципом сохранения числа*.

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Исчислительная геометрия в современной математике

- Алгебраическая геометрия
- Теория пересечений
- Алгебраическая комбинаторика
- Теория струн
- Исчисление Шуберта

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Определение

Многочлен $f(x)$ степени n — это

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Вопрос

Сколько корней имеет многочлен степени n?

Ответ над $\mathbb{R}$

Не больше чем n.

Ответ над $\mathbb{C}$

Ровно n (с учётом кратностей).

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

Основная теорема алгебры

Пример $n = 2$

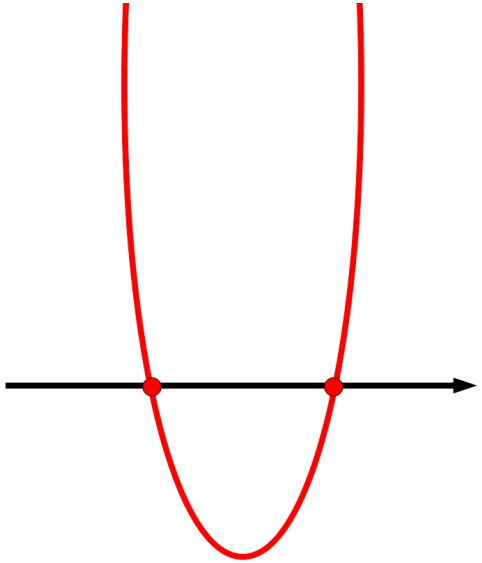
Квадратный многочлен $f(x) = x^2 + px + q$, где $p, q \in \mathbb{R}$

Дискриминант

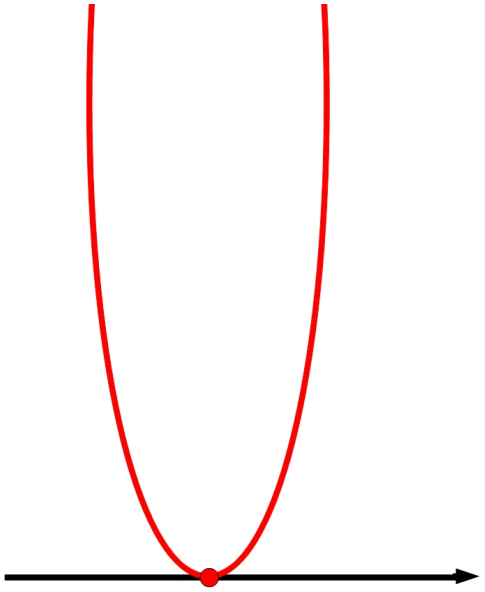
$D = p^2 - 4q$

- $D > 0$ — два различных вещественных корня
- $D = 0$ — один вещественный корень кратности два
- $D < 0$ — нет вещественных корней

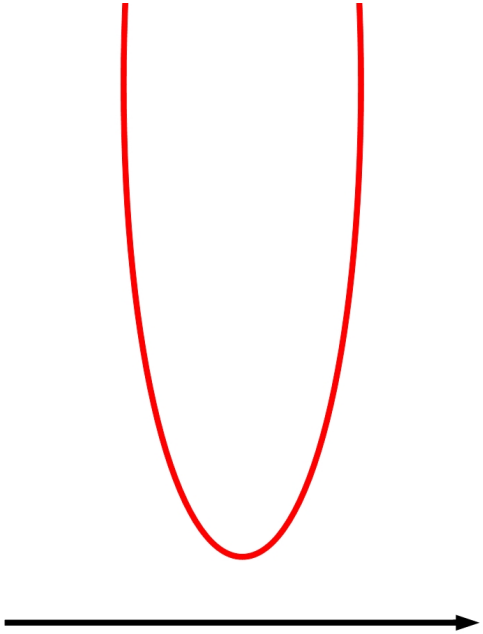
Основная теорема алгебры



$D > 0$



$D = 0$



$D < 0$

Принцип сохранения числа

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени n.

Локальный принцип сохранения числа (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$)

Если f не имеет кратных корней (т.е. график $\{y = f(x)\}$ не касается оси x), то при достаточно маленьком ε многочлены f и $f + \varepsilon g$ имеют одинаковое число корней.

Глобальный принцип сохранения числа (только над $\mathbb{C}$)

Если f и g не имеют кратных корней, то они имеют одинаковое число корней.

Принцип сохранения числа

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены степени n.

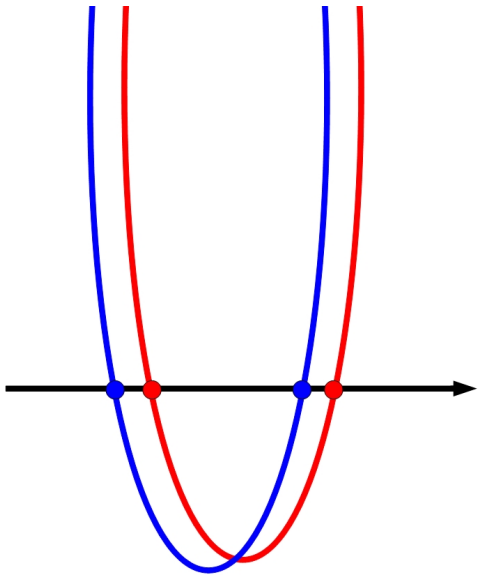
Локальный принцип сохранения числа (над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$)

Если f не имеет кратных корней (т.е. график $\{y = f(x)\}$ не касается оси x), то при достаточно маленьком ε многочлены f и $f + \varepsilon g$ имеют одинаковое число корней.

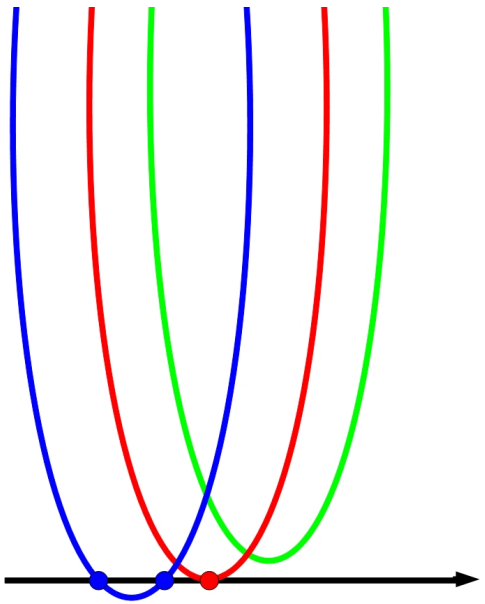
Глобальный принцип сохранения числа (только над $\mathbb{C}$)

Если f и g не имеют кратных корней, то они имеют одинаковое число корней.

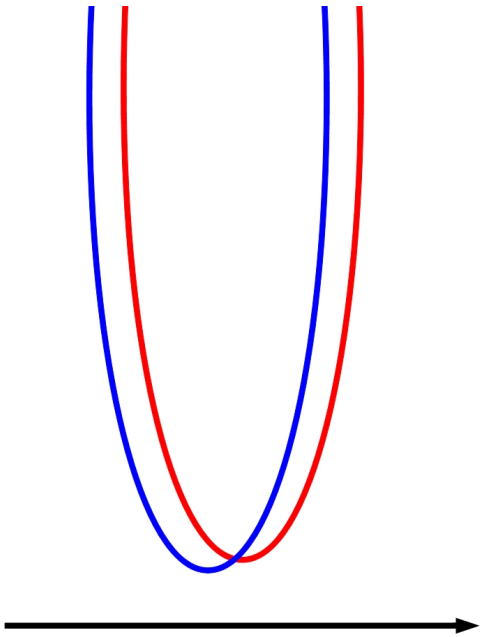
Принцип сохранения числа



$D > 0$



$D = 0$



$D < 0$

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n

$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n

$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

Кратные корни

$a = 0$ — корень кратности n

$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

Пример

$f(x) = x^n - a$, где $a \in \mathbb{R}$

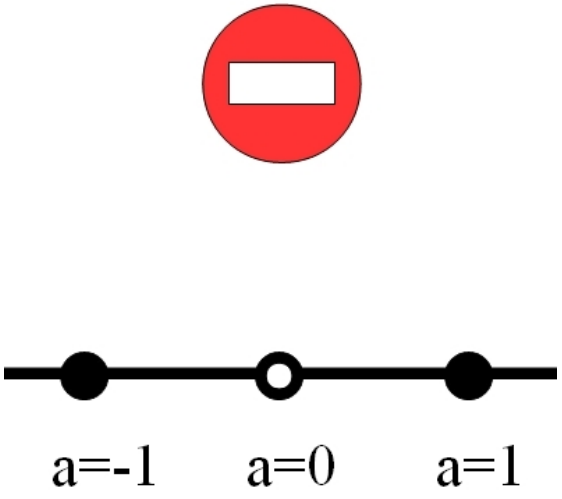
Кратные корни

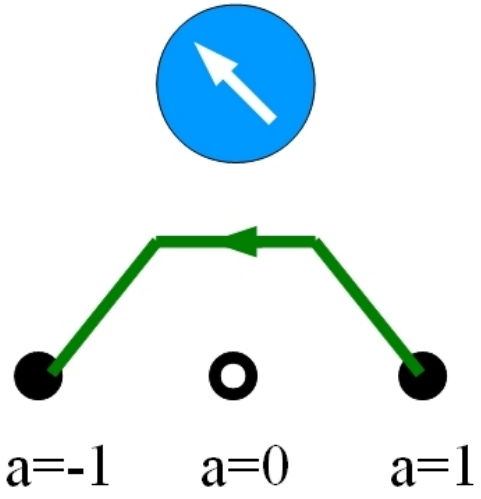
$a = 0$ — корень кратности n

$a \neq 0$ — нет кратных корней

- На вещественной прямой (с координатой a) нельзя пройти из точки $a = 1$ в точку $a = -1$, не проходя через точку $a = 0$.
- На комплексной прямой— можно.

Принцип сохранения числа

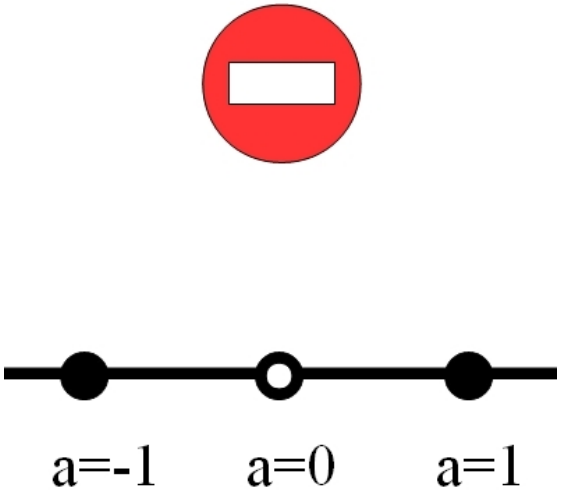


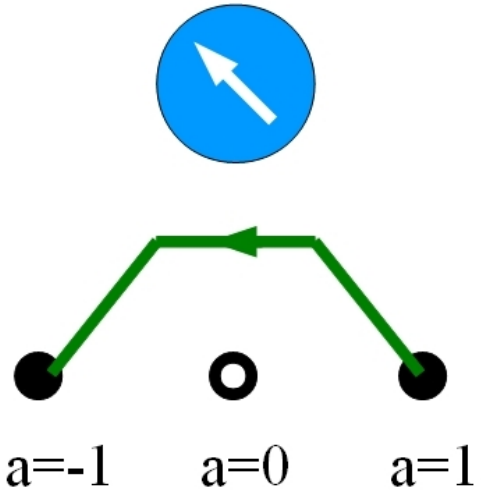


Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Принцип сохранения числа

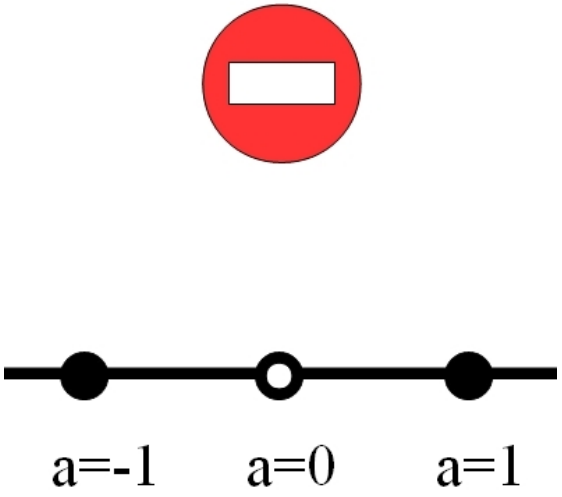


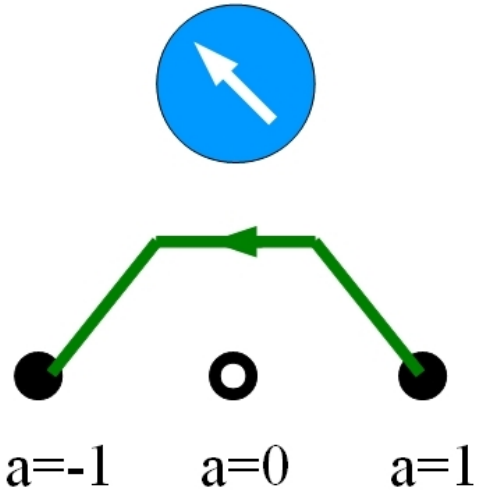


Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Принцип сохранения числа





Над $\mathbb{R}$

Над $\mathbb{C}$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

Условия σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 на прямую l:
условие σ_i выполнено, если прямая l пересекает прямую l_i

Сложение условий

$\sigma_1 + \sigma_2 = (\sigma_1$ или $\sigma_2)$ — *дизъюнкция*

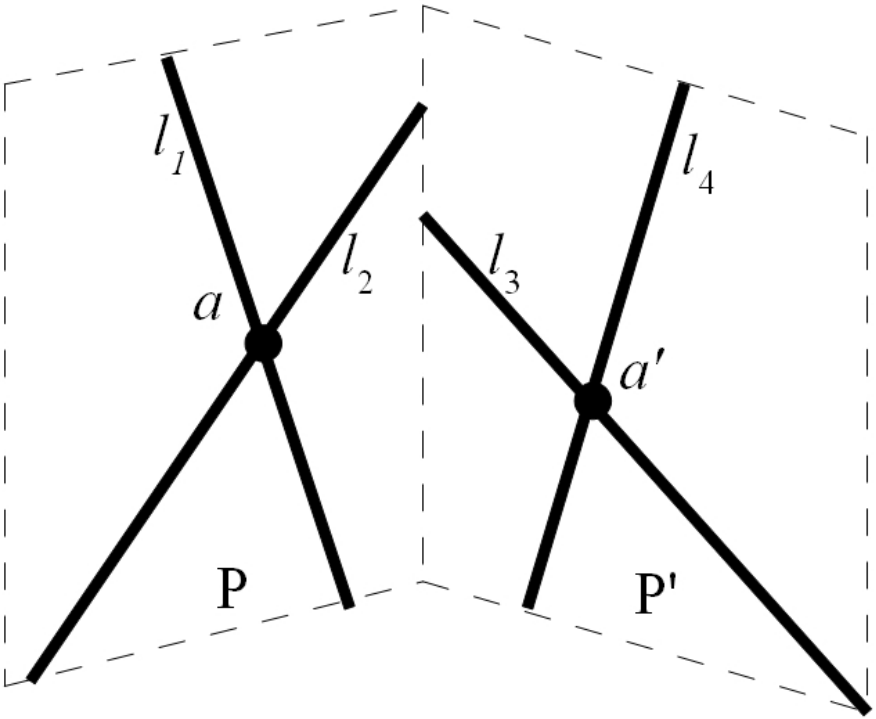
Умножение условий

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (\sigma_1$ и $\sigma_2)$ — *конъюнкция*

Пример

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$ — условие, что прямая l пересекает все четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4

Исчисление условий (исчисление Шуберта)



Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

ρ_a = условие, что прямая l проходит через точку a
τ_P = условие, что прямая l лежит в плоскости P

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \rho_a + \tau_P$
выполнено для двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 (здесь a — точка пересечения, P — плоскость, содержащая обе прямые)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Условия в задаче о 4-х прямых

ρ_a = условие, что прямая l проходит через точку a
τ_P = условие, что прямая l лежит в плоскости P

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \rho_a + \tau_P$
выполнено для двух пересекающихся прямых l_1 и l_2 (здесь a — точка пересечения, P — плоскость, содержащая обе прямые)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Эквивалентные условия

$\rho_a \sim \rho_{a'}$ для любых двух точек a и a'
$\sigma_1 \sim \sigma_2$ для любых двух прямых l_1 и l_2
$\tau_P \sim \tau_{P'}$ для любых двух плоскостей P и P'

Тождество

$\sigma_1 \cdot \sigma_2 \sim \rho_a + \tau_P$
выполнено для любых двух прямых l_1 и l_2 (здесь a — произвольная точка, P — произвольная плоскость)

Обоснование

Использует *кольцо когомологий* комплексного *грассманиана* прямых в 3-хмерном *проективном пространстве*

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Умножение *классов эквивалентности* условий

$[\sigma_1]^2 = [\sigma_1 \cdot \sigma_2]$, где l_1 и l_2 — в общем положении (то есть не лежат в одной плоскости).

Предупреждение

$[\sigma_1]^2 \neq [\sigma_1^2]$ (так как $\sigma_1^2 = \sigma_1$)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Умножение *классов эквивалентности* условий

$[\sigma_1]^2 = [\sigma_1 \cdot \sigma_2]$, где l_1 и l_2 — в общем положении (то есть не лежат в одной плоскости).

Предупреждение

$[\sigma_1]^2 \neq [\sigma_1^2]$ (так как $\sigma_1^2 = \sigma_1$)

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1$, $[\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1$, $[\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1$, $[\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1$, $[\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Исчисление условий (исчисление Шуберта)

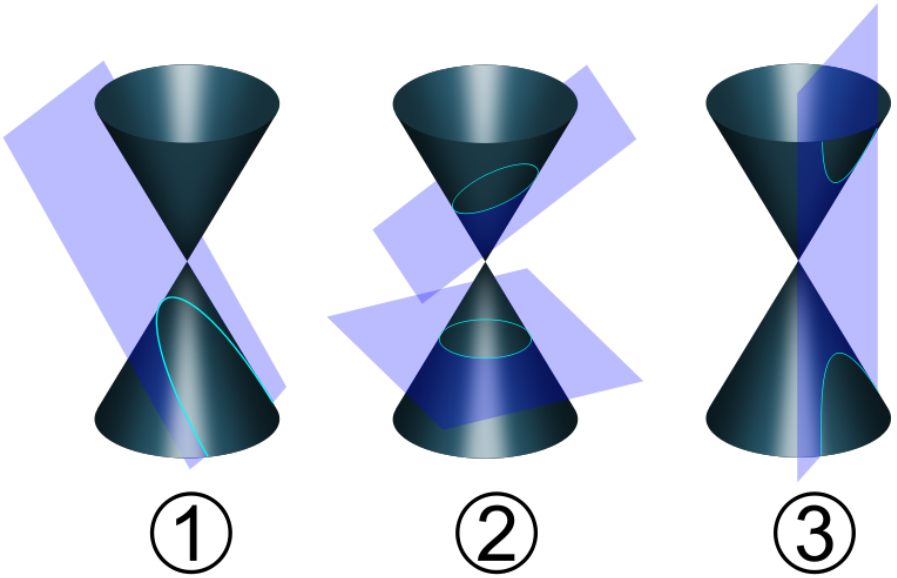
Решение задачи о 4-х прямых

- $[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = [\sigma_1]^4$
- $[\sigma_1]^4 = ([\rho_a] + [\tau_P])^2 = [\rho_a]^2 + 2[\rho_a][\tau_P] + [\tau_P]^2$
- $[\rho_a]^2 = [\tau_P]^2 = 1$, $[\rho_a\tau_P] = 0$

Ответ

$$[\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4] = 2$$

Коники



1. парабола
2. эллипс
3. гипербола

Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Conics

Коники

Определение

Кривая на плоскости, заданная уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

называется *кривой второго порядка* или *коникой*, если a, b и c не равны нулю одновременно.

Определение

Коника называется *невырожденной*, если многочлен

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

неприводим, то есть не раскладывается на линейные множители.

Коники

Определение

Кривая на плоскости, заданная уравнением

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

называется *кривой второго порядка* или *коникой*, если a, b и c не равны нулю одновременно.

Определение

Коника называется *невырожденной*, если многочлен

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

неприводим, то есть не раскладывается на линейные множители.

Коники

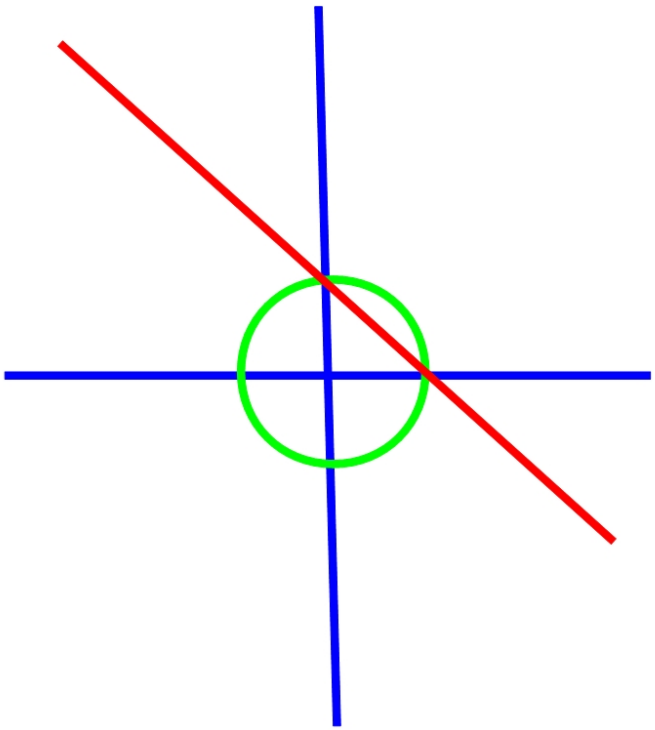
Пример:
вырожденные коники:

$$\{xy = 0\},$$

$$\{(x + y - 1)^2 = 0\},$$

невырожденные:

$$\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$



Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Коники

Задача Штейнера

Сколько невырожденных коник касается данных пяти коник?

Неверный ответ Штейнера (1848)

7776 ($=6^5$)

Ответ де Жонкьера (1859)

3264 (не опубликован)

Ответ Шаля (1864)

3264

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Якоб Штейнер (1796 - 1863),
немецкий математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Эрнест де Жонкьер (1820-1901), французский математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Мишель Шаль (1793-1880),
французский математик

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие κ_i на невырожденную конику C:
κ_i выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\kappa_1 \sim \kappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ одной и той же буквой κ.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие κ_i на невырожденную конику C:
κ_i выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\kappa_1 \sim \kappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ одной и той же буквой κ.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 — коники

Условия на коники

Условие κ_i на невырожденную конику C:
κ_i выполнено, если коника C касается коники Q_i

Эквивалентные условия

$\kappa_1 \sim \kappa_2$ для любых двух невырожденных коник Q_1 и Q_2

Обозначения

Будем обозначать условия $\kappa_1, \ldots, \kappa_5$ одной и той же буквой κ.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$
$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$
$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Самые простые условия на коники

Условие $\mu \Leftrightarrow$ коника C проходит через данную точку
Условие $\nu \Leftrightarrow$ коника C касается данной прямой

Ключевой факт

Условие κ можно выразить через μ и ν, то есть найдутся m и n, такие что $\kappa = m\mu + n\nu$.

Следствие

$\kappa^5 = (m\mu + n\nu)^5 =$
$m^5\mu^5 + 5m^4n\mu^4\nu + 10m^3n^2\mu^3\nu^2 + 10m^2n^3\mu^2\nu^3 + 5mn^4\mu\nu^4 + n^5\nu^5$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0,\ldots,5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2$, $\mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0,\ldots,5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2$, $\mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Произведения самых простых условий

$\mu^k \nu^{5-k}$ = условие, что коника проходит через k данных точек и касается $(5-k)$ данных прямых $(k = 0,\ldots,5)$

Упражнение

$\mu^5 = \nu^5 = 1$, $\mu^4\nu = \mu\nu^4 = 2$, $\mu^3\nu^2 = \mu^2\nu^3 = 4$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Осталось найти m и n.

Трюк Шуберта

Вместо условия касания κ_Q с невырожденной коникой Q, найдём условие касания с вырожденной коникой Q_0.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Пример:

$$Q = \{xy = 1\}$$

$$Q_0 = \{xy = 0\}$$

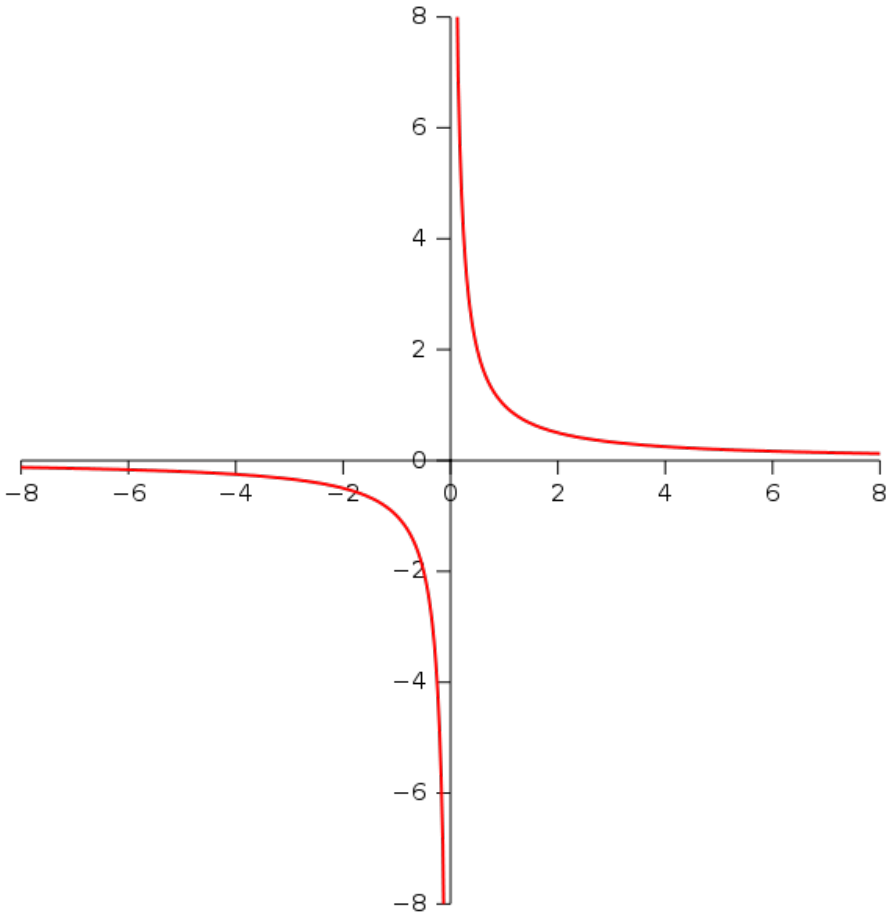


Рисунок из Википедии http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Вычисление

$$\kappa_{Q_0} = \mu + 2\nu$$

$$\kappa_Q = m\mu + n\nu$$

При этом вырожденная коника Q_0 очень хорошо приближает невырожденную конику Q вдали от начала координат. Поэтому $n = 2$.

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Упражнение

$$m = n$$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5 =$$

$$= 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$$

Задача Штейнера о 5-ти кониках

Упражнение

$$m = n$$

Следствие

$$\kappa^5 = m^5 + 10m^4n + 40m^3n^2 + 40m^2n^3 + 10mn^4 + n^5 =$$

$$= 2^5(1 + 10 + 40 + 40 + 10 + 1) = 2^5 \cdot 102 = 3264.$$

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

Ronga, Tognoli, Vust (1997)

Существует конфигурация из пяти гипербол, для которой все 3264 коники оказываются вещественными.

Welschinger (2005)

Для любой конфигурации из пяти эллипсов с непересекающимися внутренностями, найдутся по крайней мере 32 вещественных коники, касающиеся всех пяти эллипсов.

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

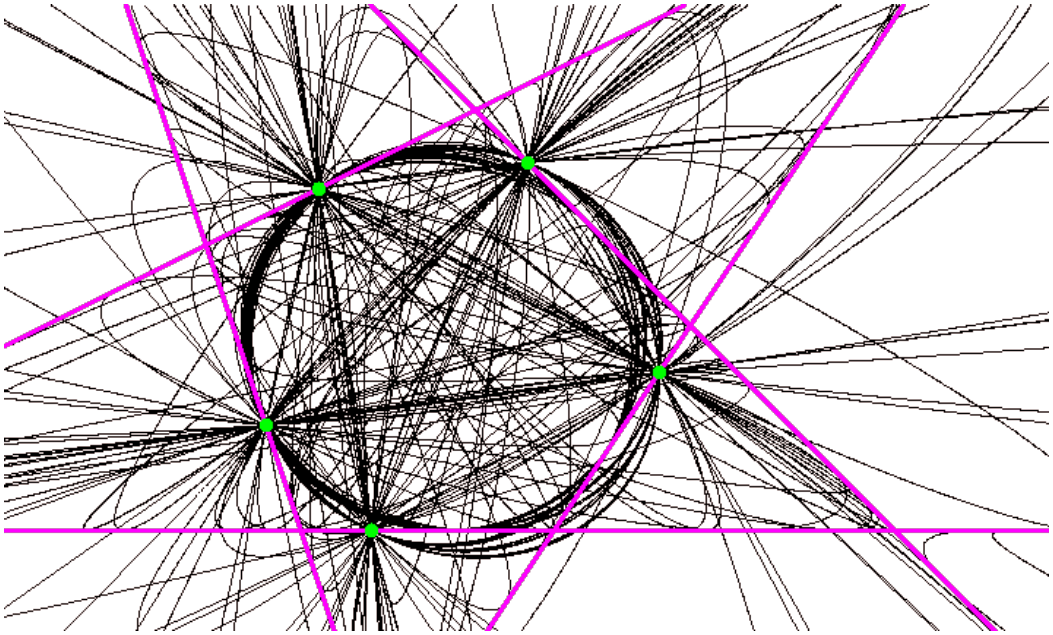
Ronga, Tognoli, Vust (1997)

Существует конфигурация из пяти гипербол, для которой все 3264 коники оказываются вещественными.

Welschinger (2005)

Для любой конфигурации из пяти эллипсов с непересекающимися внутренностями, найдутся по крайней мере 32 вещественных коники, касающиеся всех пяти эллипсов.

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай

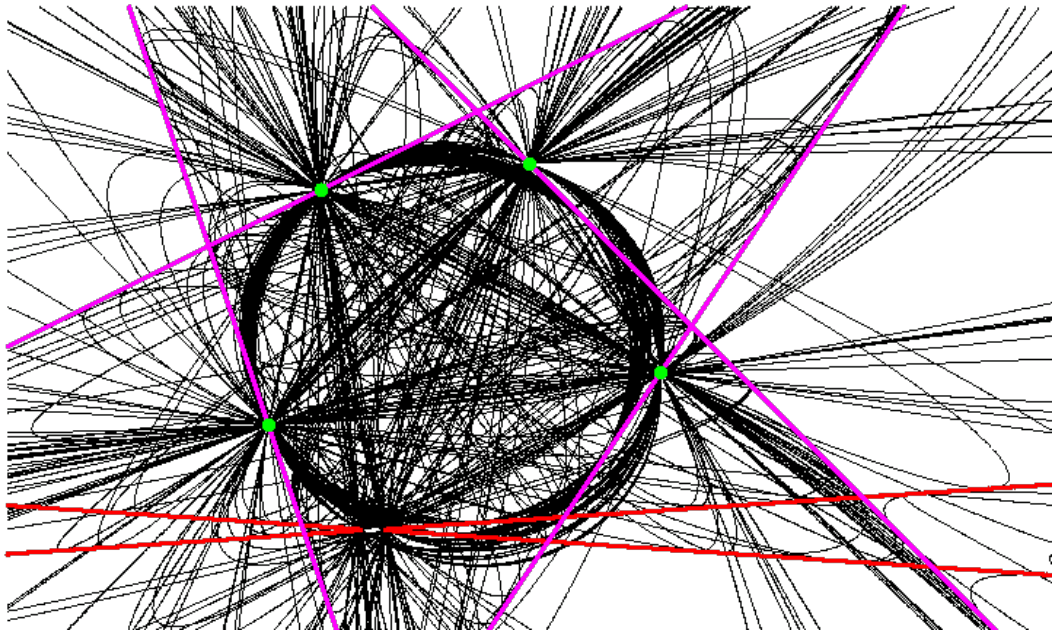


102 коники

Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/3264/

Задача о 5-ти кониках: вещественный случай



204 коники

Рисунок Frank Sottile

http://www.math.tamu.edu/ sottile/research/stories/3264/

Литература

- Акопян А. В., Заславский А. А., *Геометрические свойства кривых второго порядка*, МЦНМО, 2007
- Валентина Кириченко, *Исчислительная геометрия: метод Шаля и Шуберта*, 2010, http://www.mccme.ru/ valya/Chasles.pdf
- S. L. Kleiman, *Chasles's enumerative theory of conics: a historical introduction*, Studies in Algebraic Geometry, Studies in Math., **20**, Math. Assoc. Amer., Washington, D. C, 1980, pp. 117–138
- S. L. Kleiman and Dan Laksov, *Schubert calculus*, The American Mathematical Monthly, **79**, No. 10, (1972), pp. 1061-1082

Спасибо!